



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.







PAA  
Aandelen







# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 4.





# **ANNALEN DER PHYSIK.**

**BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH**

**F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.**

**VIERTE FOLGE.**

**BAND 4.**

**DER GANZEN REIHE 809. BAND.**

**KURATORIUM:**

**F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.**

**UNTER MITWIRKUNG**

**DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT**

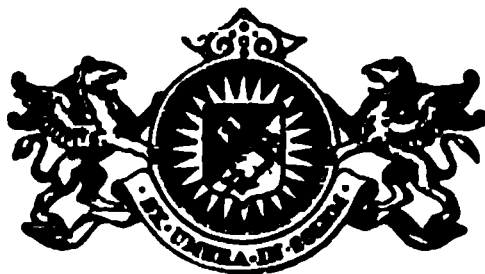
**UND INSBESONDERE VON**

**M. PLANCK**

**HERAUSGEGEBEN VON**

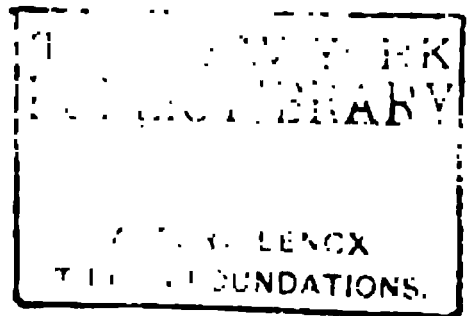
**PAUL DRUDE.**

**MIT NEUN FIGURENTAFELN.**



**LEIPZIG, 1901.**

**VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.**



THE NEW YORK  
PUBLIC LIBRARY

520776

ASTOR, LENOX AND  
TILDEN FOUNDATIONS

R 1901 L

# Inhalt.

## Vierte Folge. Band 4.

### Erstes Heft.

|  | Seite |
|--|-------|
| 1. W. König. Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten . . . . .  | 1     |
| 2. Victor Hensen. Darstellung der Lamellentöne . . . . .   | 41    |
| 3. R. Zsigmondy. Ueber die Absorption des Lichtes in Farbgläsern . . . . .   | 60    |
| 4. F. A. Sundell und Hj. Tallqvist. Ueber das Decrement elektrischer Schwingungen bei der Ladung von Condensatoren                                 | 72    |
| 5. L. Holborn und A. Day. Ueber den Schmelzpunkt des Goldes  | 99    |
| 6. L. Holborn und A. Day. Ueber die Ausdehnung einiger Metalle in hoher Temperatur . . . . .   | 104   |
| 7. W. Jaeger. Ueber die Unregelmässigkeiten Weston'scher Cadmiumelemente mit 14,3 proc. Amalgam in der Nähe von 0°                                 | 123   |
| 8. K. R. Johnson. Beiträge zur Kenntnis der Vorgänge in Inductionsapparaten. (Fortsetzung von p. 744. Bd. 3. 1900) . .                             | 137   |
| 9. H. Hulshof. Ueber die Oberflächenspannung . . . . .   | 165   |
| 10. W. Voigt. Ueber das numerische Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien nach der molecularen Theorie                     | 187   |
| 11. W. Voigt. Ueber das elektrische Analogon des Zeemaneffectes  | 197   |
| 12. W. Voigt. Weiteres zur Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden und absorbirenden Mittel . . . . . | 209   |
| 13. J. Stark. Berechnung der Leitfähigkeit durchströmter Gase in der positiven Lichtsäule . . . . .  | 215   |
| 14. E. Jahnke, O. Lummer und E. Pringsheim. Kritisches zur Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung . . . . .                                   | 225   |
| 15. L. Lewin. Zur Geschichte der Telegraphie . . . . .   | 231   |

*Ausgegeben am 4. Januar 1901.*

**Zweites Heft.**

|   | <b>Seite</b> |
|---|--------------|
| 1. E. Hagenbach. Der elektromagnetische Rotationsversuch und die unipolare Induction . . . . .                                    | 233          |
| 2. F. Paschen. Ueber das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers . . . . .   | 277          |
| 3. F. Paschen. Eine neue Bestimmung der Dispersion des Flusses im Ultrarot . . . . .  | 299          |
| 4. F. Paschen. Bestimmung des selectiven Reflexionsvermögens einiger Planspiegel . . . . .  | 304          |
| 5. Egon v. Schweidler. Ueber das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgange eines elektrischen Stromes . . . . .             | 307          |
| 6. I. Klemenčič. Ueber die Prüfung von Magnetstahlorten . . . . .   | 316          |
| 7. R. Wachsmuth. Bestimmung der Wechselzahl eines Wechselstromes . . . . .  | 323          |
| 8. K. Kerkhof. Ueber die Temperaturen in Geissler'schen Röhren . . . . .  | 327          |
| 9. Heinrich Jaeger. Magnetische Spiegelbilder . . . . .   | 345          |
| 10. Leo Grunmach. Experimentelle Bestimmung von Capillaritätsconstanten condensirter Gase . . . . .                               | 367          |
| 11. Eduard Riecke. Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem Felde elektrostatischer und elektromagnetischer Kraft . . . . . | 378          |
| 12. Eduard Riecke. Ueber Schichtung in einem Strome elektrischer Teilchen . . . . .   | 388          |
| 13. J. Stark. Ueber Ionisirung durchströmter Gase und die unipolare Entladung an glühenden Körpern . . . . .                      | 402          |
| 14. Edmund van Aubel. Ueber das thermoelektrische Verhalten einiger Oxyde und Metallsulfide . . . . .                             | 416          |
| 15. Edmund van Aubel. Ueber die Molecularwärmen zusammengesetzter Körper und das Gesetz Neumann-Joule-Kopp . . . . .              | 420          |
| 16. W. Wien. Zur Theorie der Strahlung; Bemerkungen zur Kritik des Hrn. Planck . . . . .  | 422          |

*Ausgegeben am 1. Februar 1901.*

**Drittes Heft.**

|  |     |
|--|-----|
| 1. Max Wien. Ueber die Erzeugung und Messung von Sinusströmen . . . . .  | 425 |
| 2. Max Wien. Die akustischen und elektrischen Constanten des Telephons . . . . .   | 450 |
| 3. F. Pockels. Zur Theorie der Niederschlagsbildung an Gebirgen . . . . .  | 459 |
| 4. Max Hornemann. Die Wirkungen der Gleichstromschwankungen, der elektrischen Schwingungen und der Elektroinductionsströme auf eine in einem constanten Felde stehende Magnetnadel bez. einen Inductor aus weichem Eisen . . . . . | 481 |

|   | Seite |
|---|-------|
| 5. Albert Einstein. Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen . . . . .  | 513   |
| 6. G. Tammann. Ueber die sogenannten flüssigen Krystalle .  | 524   |
| 7. F. Himstedt. Ueber einige Versuche mit Becquerel- und mit Röntgenstrahlen . . . . .  | 531   |
| 8. F. Himstedt und W. A. Nagel. Ueber die Einwirkung der Becquerel- und der Röntgenstrahlen auf das Auge . . . . .  | 537   |
| 9. Max Planck. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum . . . . .   | 553   |
| 10. Max Planck. Ueber die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität . . . . .  | 564   |
| 11. W. Voigt. Zur Festigkeitslehre . . . . .  | 567   |
| 12. Eduard Riecke. Ueber charakteristische Curven bei der elektrischen Entladung durch verdünnte Gase . . . . .   | 592   |
| 13. Karl F. Lindman. Experimentaluntersuchung über die Metallreflexion der elektrischen Schwingungen . . . . .  | 617   |
| 14. H. Dörrie. Ueber die Verteilung der Elektrizität auf dem Ellipsoid . . . . .  | 638   |
| 15. V. Schumann. Zur Lichtdurchlässigkeit des Wasserstoffs . .  | 642   |
| 16. S. H. Burbury. Ueber die Grundhypothesen der kinetischen Gastheorie . . . . .   | 646   |
| 17. E. Warburg. Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Egon v. Schweidler: Ueber das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgang eines elektrischen Stromes . . . . . | 648   |

*Ausgegeben am 1. März 1901.*

**Viertes Heft.**

|   |     |
|---|-----|
| 1. H. Rubens und F. Kurlbaum. Anwendung der Methode der Reststrahlen zur Prüfung des Strahlungsgesetzes . . . . .                         | 649 |
| 2. E. Wiechert. Elektrodynamische Elementargesetze . . . . .  | 667 |
| 3. Svante Arrhenius. Ueber die Wärmeabsorption durch Kohlensäure . . . . .  | 690 |
| 4. Rudolf H. Weber. Ueber die Oberflächenspannung mit Oel bedeckter Wasseroberflächen und die Wirkungsweite der Molecularkräfte . . . . . | 706 |
| 5. K. R. Johnson. Beiträge zur Kenntnis der Vorgänge in Inductionsapparaten. (Fortsetzung von p. 137. Bd. 4. 1901) . .                    | 722 |
| 6. O. Viol. Mechanische Schwingungen isolirt gespannter Drähte mit sichtbarer elektrischer Seitenentladung . . . . .                      | 734 |
| 7. K. E. Guthe. Beiträge zur Kenntnis der Cohärerwirkung . .  | 762 |
| 8. Louis Lownds. Beiträge zur Kenntnis des thermomagnetischen Longitudinaleffectes . . . . .  | 776 |

|   | Seite |
|---|-------|
| 9. G. Berndt. Ueber die Bandenspectra der Thonerde und des Stickstoffs . . . . .  | 788   |
| 10. J. Koenigsberger. Ueber die Abhängigkeit der Absorption des Lichtes in festen Körpern von der Temperatur . . . .        | 796   |
| 11. T. Mizuno. Ueber den Einfluss eines selbstinductionslosen Widerstandes auf die oscillatorische Condensatorentladung . . | 811   |
| 12. H. A. Naber. Das Luftbarometer . . . . .  | 815   |
| 13. D. A. Goldhammer. Ueber die Spectralgleichung des blanken Platins . . . . .   | 828   |
| 14. D. A. Goldhammer. Ueber den Druck der Lichtstrahlen .   | 834   |
| 15. Carl Fromme. Ueber den Magnetismus des Eisens . . . .   | 853   |

*Ausgegeben am 2. April 1901.*

## Nachweis zu den Figurentafeln.

- Tafel I. König, Figg. 1—11.  
„ II. König.  
„ III—VIII. Zsigmondy.  
„ IX. Paschen.



*Die Redaktion der „Beiblätter zu den Annalen der Physik“ wird vom 25. Bande ab (Januar 1901) Herr Professor Dr. Walter König in Greifswald übernehmen.*

*Ich bitte deshalb, alle Zusendungen für die Redaktion der „Beiblätter“ in Zukunft an Herrn Professor Dr. König zu richten, entweder durch meine Vermittelung oder direkt nach Greifswald, Bismarckstrasse 21.*

*Hochachtungsvoll*

*Johann Ambrosius Barth.*



# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 4.

### 1. *Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten; von W. König.* ✓

(Hierzu Taf. I, Flgg. 1–11 und Taf. II.)

Wenn eine längliche Glasplatte oder ein vierkantiger Glasstab transversale Schwingungen mit freien Enden und zwei oder mehr Knotenlinien ausführt, so wird in den Schwingungsbäuchen, entsprechend den periodischen Verbiegungen, die die Platte hier erfährt, eine periodische Doppelbrechung von der gleichen Art auftreten, wie sie dauernd durch eine statische Durchbiegung der Platte hervorgebracht werden kann. Man kann die Frage aufwerfen, ob auch an den Knotenstellen eine Beeinflussung der Lichtschwingungen durch die elastischen Schwingungen der Platte oder die damit verknüpften elastischen Verbiegungen der Platte vorhanden ist. Einige orientierende Versuche ergaben ohne Schwierigkeit, dass in den Knotenstellen in der That eine Doppelbrechung von eigentümlicher Natur auftritt. Sie erinnert in ihrer Art an die Doppelbrechung, welche Kundt in bewegten reibenden Flüssigkeiten beobachtet hat, und schien mir einer genaueren Prüfung ihrer Gesetze und ihres Ursprunges wert zu sein. Eine solche erforderte aber auch eine genaue Untersuchung der Erscheinungen im Schwingungsbauche, um beide Vorgänge quantitativ miteinander vergleichen zu können. So entstand die nachfolgende Untersuchung. Ihr experimenteller Teil ist schon vor einer Reihe von Jahren im Institut des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. ausgeführt worden; auch habe ich auf der Lübecker Naturforscherversammlung über die experimentellen Ergebnisse kurz berichtet.<sup>1)</sup> In der theoretischen Deutung der Versuche stiess ich anfangs auf eine Schwierigkeit, die

1) W. König, Verhandl. d. Gesellsch. d. Naturf. u. Aerzte, Lübeck 1895. II. Teil. 1. Hälfte. p. 54.

weitere experimentelle und theoretische Studien veranlasste und dadurch zur Folge hatte, dass sich die ausführliche Mittheilung der Untersuchung bis jetzt verzögert hat.

### 1. Beschreibung der Apparate.

a) *Die Glasplatte und ihre Aufstellung.* Die untersuchte Glasplatte hatte eine Länge  $l$  von 70 cm, eine Breite  $b$  von 7 cm und eine Dicke  $d$  von 7 mm. Die Beschaffung einer Platte von dieser Grösse aus gut gekühltem, völlig spannungsfreiem Glase hätte enorme Kosten verursacht. Ich habe mich daher bei diesen Versuchen, die eigentlich nur als vorläufige Versuche betrachtet wurden, mit einer Platte begnügt, die aus gutem Spiegelglas geschnitten war. Die schmalen Längsflächen waren gut polirt, um eine gute Durchsicht in Richtung der Breite  $b$  durch die Platte zu gestatten. Die Verwendung einer derartigen Platte hatte natürlich den Uebelstand, dass die Platte schon in unverbogenem Zustande eine gewisse Doppelbrechung zeigte. Stellte man sie mit ihrer Fläche senkrecht auf die lange, schmale Seitenfläche und blickte zwischen gekreuzten Nicols, deren Polarisationsrichtungen mit der Längsrichtung der Platte Winkel von  $45^\circ$  bildeten, senkrecht durch die Platte in Richtung ihrer Breite hindurch, so erschien sie nicht vollkommen dunkel, sondern zeigte, parallel zu ihren Flächen, helle und dunkle Streifen, entsprechend doppelbrechenden und neutralen Schichten. Der Charakter der Doppelbrechung stimmte durchaus mit den von Czapski an schnell gekühlten Glasplatten gemachten Beobachtungen<sup>1)</sup> überein; die Glasmasse verhielt sich in der Nähe der Flächen wie gepresstes, in der Mitte zwischen den Flächen wie gedehntes Glas, wobei Zug- und Druckrichtung parallel zu den Flächen zu denken sind. Diese Doppelbrechung war nicht stark. Trotz des 7 cm langen Weges, den das Licht in der Platte zu durchlaufen hatte, ging die Interferenzfarbe nicht über das Grau der ersten Ordnung hinaus; eine Glimmerplatte, die das Violett des Ueberganges von der ersten zur zweiten Ordnung zeigte, gab an den hellsten Stellen als Additionsfarbe Blau, als Subtractionsfarbe Rot; danach würde die Gangdifferenz im Maximum

---

1) S. Czapski, Wied. Ann. 42. p. 319—331. 1891.



nicht über  $\lambda/7$  betragen haben. Immerhin bildete diese Eigenschaft der Platte ein störendes Moment, welches die Genauigkeit der Messung der durch Verbiegung hervorgerufenen Doppelbrechung bis zu einem gewissen Grade beeinträchtigte. Eine Berücksichtigung dieses Umstandes in Form einer Correction an den Messungen wäre wohl möglich, aber sehr umständlich gewesen. Bei zweckmässiger Combination verschiedener Messungen gleicht sich der Fehler einigermaassen aus.

Um die beabsichtigten Messungen der Doppelbrechung an vollkommen frei schwingenden Plattenteilen auszuführen, wurde die Platte in solcher Weise zum Schwingen erregt, dass sich vier Knotenlinien auf ihr bildeten, die Platte also ihren dritten Transversalton gab. Nach der Rechnung von Strehlke, unter Berücksichtigung der von Seebeck<sup>1)</sup> angegebenen Correction; würden diese Knotenlinien für die gegebene Platte von 700 mm Länge folgende Abstände von dem einen Ende der Platte haben: Nr. 1 66,08. Nr. 2 249,06, Nr. 3 450,94, Nr. 4 633,92. Die Beobachtung, durch Aufstreuen von Sand auf die Platte, ergab die Werte: 66,0, 247,0. 449,0, 633,0. Zur Hervorbringung dieser Schwingungsform wurde die Platte in dem ersten und vierten Knoten unterstützt und an dem einen Ende mit dem Bogen angestrichen. Die Beobachtungen wurden dann in dem einen der vollkommen freien Knoten Nr. 2 oder Nr. 3 ausgeführt. Die Erscheinungen im Schwingungsbauch wurden im mittelsten Bauch, zwischen den Knoten 2 und 3, also in der Mitte der ganzen Platte beobachtet.

Wurde die Platte horizontal auf zwei Leisten gelegt, die sie in den Knoten 1 und 4 unterstützten, so bog sie sich durch ihr eigenes Gewicht ein wenig durch und zeigte eine dementsprechende Doppelbrechung, mit neutraler Mittellinie und beiderseits nach den Oberflächen hin zunehmender Stärke, von negativem Charakter auf der oberen, concaven, zusammengedrückten Hälfte, und von positivem Charakter auf der unteren, convexen, gedehnten Hälfte. Diesem Uebelstande wurde dadurch abgeholfen, dass die Platte nicht in horizontaler, sondern in verticaler Lage befestigt wurde, und zwar so, dass die langen, schmalen Seiten horizontal, die kurzen vertical standen,

1) A. Seebeck, Abhandl. d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Mathem.-phys. Klasse 1. p. 131—168. 1852.





Zur bequemerer Anordnung der Apparate wurde die Platte dabei in horizontaler Lage belassen. Das Licht eines Auerbrenners fiel durch ein grosses Nicol'sches Prisma senkrecht auf die lange Schmalseite der Platte, ging in Richtung der Breite durch die Platte und wurde durch den Analysator hindurch vom Auge aufgefangen. Um aber die Erscheinungen in ihrer zeitlichen Veränderlichkeit beobachten zu können, wurde durch einen verticalen Spalt, der zwischen Platte und Analysator ganz dicht vor der Platte stand, ein schmales Bündel des Lichtes ausgeblendet und in einem rotirenden Spiegel oder einfacher durch eine Linse betrachtet, die senkrecht zur Richtung des Spaltes hin und her bewegt wurde. Sehr zweckmässig erwies sich auch hierbei wieder die von mir construirte rotirende Linsenscheibe, die schon von Hrn. G. Klinkert in seiner Arbeit über die Saitenschwingungen<sup>1)</sup> beschrieben worden ist. Es war mit diesen Hilfsmitteln möglich, nicht bloss die Erscheinungen im Schwingungsbauch und im Schwingungsknoten einzeln zu analysiren, sondern auch beide wenigstens in ihrer Phasenbeziehung miteinander zu vergleichen, indem mittels geeigneter Spiegelvorrichtungen zwei Lichtbündel gleichzeitig, das eine im Bauch, das andere im Knoten durch die Platte hindurchgeschickt und dann übereinander auf denselben Spalt projecirt wurden. Eine quantitative Vergleichung aber war wegen der Flüchtigkeit der Wahrnehmungen bei dieser Methode ausgeschlossen. Zu diesem Zweck mussten die Erscheinungen photographisch festgehalten werden.

c) *Die photographische Aufnahme der Erscheinungen.* Zur dauernden Fixirung der periodischen Vorgänge wurde das Bild des Spaltes auf eine bewegte photographische Platte projecirt. Hierfür wurde das grosse Fallpendel des Instituts benutzt, das ursprünglich für die Untersuchung des Hrn. Klinkert construiert worden war und inzwischen auch von Hrn. W. Hess bei seiner Untersuchung elektrischer Schwingungen in Inductorien<sup>2)</sup> benutzt worden ist. Es ist von Hrn. Klinkert genau beschrieben worden<sup>3)</sup>, und ich kann mich daher be-

---

1) G. Klinkert, Wied. Ann. 65. p. 851. 1898.

2) W. Hess, Wied. Ann. 66. p. 980—998. 1898.

3) G. Klinkert, Wied. Ann. 65. p. 850. 1898.

gnügen, zu erwähnen dass das Pendel 2 m lang ist, dass es an seinem unteren Ende eine grössere, bleibeschwerte Platte trägt, die mit einem Ausschnitt und einer Vorrichtung zum Einschieben einer Mattscheibe oder einer photographischen Cassette versehen ist, dass es seine Schwingungen in einem von allen Seiten lichtdicht abgeschlossenen Raume ausführt und in diesem Raume in abgelenkter Lage arretirt und durch eine Zugvorrichtung von aussen her im geeigneten Augenblick losgelassen werden kann. Fig. 2 stellt die ganze Versuchsanordnung in einem senkrechten Durchschnitt dar. Als Licht-

o

Fig. 2.

quelle wurde die Sonne benutzt. Ein Uhrwerkheliostat lenkte die Sonnenstrahlen auf den Spiegel *m*. Dieser reflectirte sie senkrecht nach oben; sie durchsetzten den Polarisator *p*, die senkrecht stehende Glasplatte *g* in Richtung ihrer Breite und den Analysator *a* und wurden dann von dem total reflectirenden Prisma *t* wieder in horizontale Richtung übergeführt. Das photographische Objectiv *O*<sub>1</sub> entwarf von der oberen Fläche der Glasplatte ein deutliches Bild auf der Blende *s*; diese trug einen senkrechten Spalt, der aus dem Bilde der Glasfläche senkrecht zu deren Längserstreckung eine feine Linie herausschnitt. Diese Lichtlinie endlich wurde von dem Objectiv *O*<sub>2</sub> auf die photographische Platte projecirt oder richtiger auf diejenige Stelle, welche die am unteren Teil des Fall-

pendels  $P$  angebrachte photographische Platte bei der Schwingung des Pendels passirte.  $K$  ist der untere, kastenartige Teil des Dunkelraumes, der in seiner vorderen Wand das Objectiv  $O_2$  trägt;  $O$  ist eine durch einen überfallenden Sack lichtdicht verschliessbare Oeffnung in der hinteren Wand des Dunkelraumes, die zur Bedienung des Pendels bestimmt ist.

Die Hauptschwierigkeit lag in der richtigen Führung des Lichtes, nicht bloss um die erforderliche Helligkeit, sondern vor allem um die grösste Deutlichkeit der Interferenzerscheinungen in dem Bilde der Glasfläche am Ort des Spaltes  $s$  zu erreichen. Die Bedingung hierfür ist offenbar die, dass die Lichtstrahlen die Glasplatte als ein Parallelstrahlenbündel parallel zu den beiden Plattenoberflächen durchsetzen. Die mangelhafte Beschaffenheit der Glasplatte erschwerte die Erfüllung dieser Bedingung. Es erwies sich als vorteilhaft, die Sonnenstrahlen nicht direct auf den Polarisator und die Platte fallen zu lassen, sondern sie vorher durch eine grosse, schwache Convexlinse zu concentriren und ihnen dann mittels einer starken Concavlinse, die unmittelbar vor dem Spiegel  $m$  stand, den erforderlichen Grad von Parallelität wieder zu verleihen. Durch Verschiebung dieser in Fig. 2 nicht mit gezeichneten Linsen konnte die Lichtführung so geregelt werden, dass im Bilde der Glasfläche auf dem Spalt  $s$  der Querschnitt der Platte gleichmässig erhellt erschien und die Interferenzstreifen bei Verbiegung der Platte zwischen gekreuzten Nicols in voller Schärfe hervortraten.

Indem man die Glasplatte in ihrer eigenen Ebene verschob, konnte man nach Belieben die Erscheinungen im Schwingungsbauch oder im Schwingungsknoten aufnehmen. Schwieriger war das Problem, beide Erscheinungen gleichzeitig, unmittelbar übereinander auf den Spalt  $s$  zu projeciren, um ihre Phasen- und Grössenbeziehung ausmessen zu können. In diesem Falle wurde die Platte so verschoben, dass die Verticalebene der ganzen Aufstellung die Platte genau in der Mitte zwischen Bauch und Knoten schnitt. Das einfallende Lichtbündel wurde durch Spiegel in zwei Teile geteilt und auf getrennten Wegen weiter geleitet, der eine Teil durch den Knoten, der andere durch den Bauch; jedes der beiden Bündel passirte unter und über der Glasplatte seinen eigenen Polarisator und Analysator.



die eintretenden Verschiebungen in erster Annäherung als rein transversal, d. h. nur in Richtung der  $y$ -Axe erfolgend, und daher für alle Punkte desselben Querschnittes der Platte als gleich betrachten. Die Bewegungsgleichung der Platte lässt sich dann in der Form ansetzen:<sup>1)</sup>

$$(1) \quad \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial x},$$

wenn unter  $\mu$  die Dichte des Glases, unter  $P$  die im Querschnitt wirkende tangentielle Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit, verstanden wird. Mit den Verbiegungen der Platte steht diese Kraft im Zusammenhang durch die Beziehung:

$$(2) \quad P = \frac{E \cdot d^3}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

wobei  $d$  die Dicke,  $E$  den Elasticitätscoefficienten des Glases bedeutet. Unter Benutzung dieser Gleichung geht die Bewegungsgleichung der Platte über in die Form:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{E \cdot d^3}{12 \cdot \mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

Wenn der Stab einen einfachen Ton von der Schwingungszahl  $n$  giebt, so lässt sich seine Bewegung darstellen durch die Gleichung:

$$(4) \quad y = u \cdot \sin 2 \pi n t,$$

worin die Amplitude  $u$  eine Function von  $x$  ist und der Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{(2 \pi n)^2 \cdot 12 \cdot \mu}{E \cdot d^3} \cdot u$$

zu genügen hat. Um die Lösung in einfacherer Form schreiben zu können, setze ich mit Kirchhoff<sup>2)</sup> den Factor:

$$(6) \quad \frac{(2 \pi n)^2 \cdot 12 \cdot \mu}{E \cdot d^3} = \left( \frac{p}{l} \right)^4.$$

Dann lautet das allgemeine Integral der Gleichung (5):

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= A \cos \frac{p x}{l} + B \cdot \sin \frac{p x}{l} \\ &+ C \frac{e^{\frac{p x}{l}} + e^{-\frac{p x}{l}}}{2} + D \frac{e^{\frac{p x}{l}} - e^{-\frac{p x}{l}}}{2}. \end{aligned} \right.$$

1) J. Violle, Lehrbuch der Physik, deutsche Ausgabe 2. (1) p. 199.

2) G. Kirchhoff, Mechanik, 4. Aufl. p. 440. 1897.

Die Grenzbedingungen, dass beide Enden der Platte  $x=0$  und  $x=l$  frei schwingende Enden sein sollen, ergeben folgende Gleichungen:

$$C = A, \quad D = B,$$

$$A \left( \frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p \right) + B \left( \frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p \right) = 0,$$

$$A \left( \frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p \right) + B \left( \frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p \right) = 0.$$

Daraus folgt für  $p$  die Gleichung:

$$(8) \quad \cos p \cdot \frac{e^p + e^{-p}}{2} = 1$$

oder

$$\frac{e^p - e^{-p}}{2} = \mp \operatorname{tg} p,$$

wobei das obere oder das untere Zeichen abwechselnd für die aufeinander folgenden Wurzeln  $p_1, p_2, p_3, p_4$  etc. der Gleichung zu nehmen ist. Diese Wurzeln haben die Werte

$$p_1 = 3,011 \frac{\pi}{2}, \quad p_2 = 5,000 \frac{\pi}{2}, \quad p_3 = 7,000 \frac{\pi}{2}, \quad p_4 = 9,000 \frac{\pi}{2}$$

und entsprechen Schwingungen der Platte mit 2, 3, 4, 5 Knoten. Uns interessirt im vorliegenden Falle ausschliesslich die Wurzel

$$p_3 = 7 \frac{\pi}{2}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen für  $p$  lässt sich das Verhältniss  $A/B$  auf eine einfache Form bringen. Denn es ist:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= - \frac{\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p}{\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p}, \\ &= - \frac{\frac{1}{\cos p} - \cos p}{\mp \operatorname{tg} p + \sin p}, \\ &= - \frac{\sin p}{\mp 1 + \cos p}; \end{aligned}$$

$$(9) \quad \frac{A}{B} = \begin{cases} + \operatorname{ctg} \frac{p}{2} & \text{für } p_1, p_3, \dots \\ - \operatorname{tg} \frac{p}{2} & \text{für } p_2, p_4, \dots \end{cases}$$



Daraus folgt, unter Berücksichtigung der oben angegebenen Werte der Wurzeln  $p_1, p_2$  etc., dass für alle Töne des Stabes sehr angenähert die Bedingung erfüllt ist:

$$B = -A.$$

Dann hat die Amplitude den angenäherten Wert:

$$(10) \quad u = A \left\{ \cos \frac{p x}{l} - \sin \frac{p x}{l} + e^{-\frac{p x}{l}} \right\}$$

und demgemäss haben die Verrückungen selbst und ihre Ableitungen die Näherungswerte:

$$(11) \quad y = A \left\{ \cos \frac{p x}{l} - \sin \frac{p x}{l} + e^{-\frac{p x}{l}} \right\} \sin 2 \pi n t,$$

$$(12) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -A \frac{p}{l} \left\{ \cos \frac{p x}{l} + \sin \frac{p x}{l} + e^{-\frac{p x}{l}} \right\} \sin 2 \pi n t,$$

$$(13) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A \frac{p^2}{l^2} \left\{ \cos \frac{p x}{l} - \sin \frac{p x}{l} - e^{-\frac{p x}{l}} \right\} \sin 2 \pi n t,$$

$$(14) \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = A \frac{p^3}{l^3} \left\{ \cos \frac{p x}{l} + \sin \frac{p x}{l} - e^{-\frac{p x}{l}} \right\} \sin 2 \pi n t.$$

Für die nachfolgenden Anwendungen interessieren uns ausschliesslich die Vorgänge im mittleren Schwingungsbauch und im nächstgelegenen Schwingungsknoten für den Fall des dritten Tones, d. h. für  $p = 7 \pi / 2$ .

a) Für die Mitte der Platte ist  $x = l/2$ , folglich ganz allgemein für alle Werte von  $p$ :

$$u = A \left[ \cos \frac{p}{2} + \frac{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}}{2} \right] + B \left[ \sin \frac{p}{2} + \frac{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}}{2} \right].$$

Aus Gleichung (8) lassen sich leicht die Beziehungen herleiten:

$$\begin{aligned} e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}} &= \pm \frac{2 \cos \frac{p}{2}}{\sqrt{\cos p}} \begin{cases} + \text{ für } p_3, p_4, p_7, p_8 \dots \\ - \text{ für } p_1, p_2, p_5, p_6 \dots \end{cases} \\ e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}} &= \pm \frac{2 \sin \frac{p}{2}}{\sqrt{\cos p}} \begin{cases} + \text{ für } p_1, p_4, p_5, p_8 \dots \\ - \text{ für } p_2, p_3, p_6, p_7 \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke ein, und berücksichtigt die Gleichung (9), so erhält man

$$\text{für } p_2, p_4, p_6, p_8 \dots u = 0,$$

d. h. in der Mitte einen Knoten,

für  $p_1, p_3, p_5, p_7 \dots$

$$u = \frac{A}{\cos \frac{p}{2}} [1 \mp \sqrt{\cos p}] \quad \left\{ \begin{array}{l} - \text{ für } p_1, p_5 \dots \\ + \text{ für } p_3, p_7 \dots \end{array} \right.$$

Für den dritten Ton der Platte wäre also der genaue Wert von  $u$  für die Mitte:

$$(15) \quad u_0 = \frac{A}{\cos \frac{p_3}{2}} [1 + \sqrt{\cos p_3}].$$

Da die Wurzeln der Gleichung (8) sehr nahe gleich den ungeraden Vielfachen von  $\pi/2$  sind, so ist  $\cos p$  sehr nahe  $= 0$ ,  $\cos p/2$  sehr nahe  $= \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Bezeichnet man die Amplitude für den Mittelpunkt der Platte mit  $a$ , so ist die Bewegung des mittleren Querschnittes gegeben durch:

$$(16) \quad y = a \cdot \sin 2 \pi n t$$

und  $a$  in erster Annäherung bestimmt durch die Gleichung:

$$(17) \quad a = A \cdot \sqrt{2}.$$

Für die im Schwingungsbauche auftretende Doppelbrechung ist die Krümmung der Platte maassgebend. Der reciproke Wert des Krümmungsradius  $1/\rho$  ist gleich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{d x^2} \sin 2 \pi n t.$$

Berechnet man  $d^2 u / d x^2$  in derselben Weise wie oben  $u$  aus dem vollständigen Ausdrucke für  $u$ , setzt  $x = l/2$  und berücksichtigt dieselben Beziehungen, wie bei der Berechnung von  $u$ , so erhält man für  $p = p_3$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d x^2} &= - \frac{A}{\cos \frac{p_3}{2}} \frac{p_3^2}{l^2} (1 - \sqrt{\cos p_3}), \\ &= - u_0 \frac{p_3^2}{l^2} \frac{1 - \sqrt{\cos p_3}}{1 + \sqrt{\cos p_3}}, \\ &= - u_0 \frac{p_3^2}{l^2} (1 - 2 \sqrt{\cos p_3}), \end{aligned}$$

wenn man die höheren Potenzen von  $\sqrt{\cos p}$  vernachlässigt. Lässt man das ganze Correctionsglied fort, wie bei den nachfolgenden Anwendungen erlaubt ist, so hat man die einfache Beziehung:

$$(18) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -a \left( \frac{7\pi}{2l} \right)^3 \sin 2\pi n t.$$

Man erhält die Formeln (16) und (18) auch unmittelbar aus den Formeln (11) und (13), wenn man in diesen

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad p = 7 \frac{\pi}{2}$$

setzt, und den letzten Summanden  $e^{-p/2}$  als kleine Grösse vernachlässigt.

b) Die Lage der Schwingungsknoten ist bestimmt durch die Bedingung  $u = 0$ . Von Interesse für das Folgende ist die Grösse der tangentialen Kraft im Knoten, die durch Gleichung (2) als Function von  $\partial^3 y / \partial x^3$  definirt war. Die vollständige Durchrechnung des Ausdruckes  $d^3 u / d x^3$  führt in diesem Falle, wegen der complicirteren Bedingung für den Wert von  $x$ , auf keine in dem Grössenverhältnis ihrer Glieder leicht zu überblickende Endformel. Wir begnügen uns daher von vornherein mit dem den Formeln (11) bis (14) zu Grunde liegenden Grade der Annäherung. Die Bedingung  $y = 0$  ergibt aus (11) die Gleichung:

$$e^{-\frac{p x}{l}} = \sin \frac{p x}{l} - \cos \frac{p x}{l},$$

und dies in Gleichung (14) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2 A \frac{p^3}{l^3} \cos \frac{p x}{l} \cdot \sin 2\pi n t.$$

Setzt man für  $p$  den Wert  $7\pi/2$  ein, so ist für die beiden mittleren Knoten nach den Rechnungen von Strehlke und Seebeck

$$\frac{p x}{l} = 1,2453 \pi \quad \text{bez.} \quad = 2,2547 \pi,$$

$\cos p x / l$  also sehr nahe gleich  $\mp \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Daraus folgt:

$$(19) \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = a \left( \frac{7\pi}{2l} \right)^3 \sin 2\pi n t.$$



und photographisch aufgenommen. Figg. 1—4 der Taf. I geben diese Aufnahmen für vier verschieden starke Schwingungszustände der Platte wieder. Die Amplitude  $a$  der Plattenschwingungen ist an den Aufnahmen unmittelbar aus den Sinuslinien zu entnehmen, welche die beiden Plattenränder gezeichnet haben. Dieselbe Sinuscurve beschreibt natürlich auch die neutrale Mittellinie, wie namentlich an den Aufnahmen mit grosser Amplitude ersichtlich ist. Die neutrale Mittellinie wird in gleichmässigen Abständen von senkrecht zu ihr verlaufenden dunklen Linien gekreuzt. Diese treffen die Plattenränder genau in der Mitte zwischen Berg und Thal der Sinuscurven; sie entsprechen denjenigen Augenblicken, in denen die Platte durch die Ruhelage ging und ohne Doppelbrechung war. Innerhalb jeder der so gebildeten Abteilungen sieht man die Punkte gleicher Phasendifferenz, indem sie an die neutrale Zone heran und wieder fortschwingen, eine eigentümliche Curve beschreiben. Die dunklen Curven in den Figuren entsprechen den Gangdifferenzen  $\lambda$ ,  $2\lambda$ ,  $3\lambda$ , die Mitten der hellen Zwischenräume zwischen ihnen den Gangdifferenzen  $\lambda/2$ ,  $3\lambda/2$ ,  $5\lambda/2$ . Dabei ist unter  $\lambda$  die mittlere Wellenlänge des photographisch wirksamen Lichtes verstanden; sie ist in einer früheren Arbeit zu 0,000428 mm ermittelt worden.<sup>1)</sup> Es soll nun zunächst das Gesetz dieser eigentümlichen, isochromatischen Curven entwickelt werden.

b) *Die Gleichung der isochromatischen Curven.* Wir können die Stärke der Doppelbrechung der Grösse der elastischen Deformation proportional setzen. Es sei  $s$  die Länge eines Elementes der Platte in Richtung ihrer Längserstreckung; durch Verbiegung der Platte geht  $s$  über in  $s + \delta s$ . Dann können wir die Phasendifferenz  $\Delta$  ansetzen in der Form:

$$(20) \quad \Delta = C \cdot \frac{\delta s}{s},$$

eine Gleichung, die auch dem Vorzeichen nach richtig sein soll, indem wir die bei einer Verlängerung auftretende Doppelbrechung als positiv, die bei einer Verkürzung auftretende als negativ bezeichnen. Bedeutet  $\eta$  den Abstand des be-

---

1) W. König, Wied. Ann. 69. p. 1—11. 1899.

treffenden Elementes von der neutralen Mittellinie, in der das Element bei der Verbiegung seine Länge  $s$  unverändert beibehalten würde, und bezeichnet  $\varrho$  den Krümmungsradius der Mittellinie, so besteht die Beziehung:

$$\frac{s + \delta s}{s} = \frac{\varrho - \eta}{\varrho}$$

oder

$$(21) \quad \frac{\delta s}{s} = - \frac{\eta}{\varrho},$$

wobei der Krümmungsradius negativ zu rechnen ist, wenn er auf Seite der negativen  $y$ -Werte liegt. Für die Phasendifferenz folgt dann:

$$\Delta = - C \frac{\eta}{\varrho},$$

und unter Benutzung von (18)

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta = C a \cdot \left( \frac{7\pi}{2l} \right)^2 \cdot \eta \cdot \sin 2\pi n t, \\ \quad = D \cdot \eta \cdot \sin 2\pi n t, \end{cases}$$

wenn man

$$D = C \cdot a \cdot \left( \frac{7\pi}{2l} \right)^2$$

setzt. Der Abstand der Punkte gleicher Phasendifferenz von der Mittellinie variirt also nach dem Gesetze:

$$\eta = \frac{\Delta}{D \cdot \sin 2\pi n t}.$$

Für die aufgenommenen Curven sind die Abscissen der Zeit proportional; unter passender Wahl des Maassstabes kann man setzen

$$x = 2\pi n t.$$

Die Ordinaten der Curven aber sind nicht einfach  $= \eta$ ; es ist vielmehr zu berücksichtigen, dass die Mittellinie selber eine auf- und abschwingende Bewegung nach Gleichung (16) ausführt. Daher sind die Ordinaten der Curve

$$y = \eta + a \cdot \sin 2\pi n t,$$

und die vollständige Gleichung der isochromatischen Curven ist:

$$(23) \quad y = \frac{\Delta}{D \cdot \sin x} + a \cdot \sin x.$$







indem die Gangdifferenzen in ihnen für gleiche Punkte sich um eine halbe Wellenlänge unterscheiden; hell und dunkel ist daher in Aufnahme 5 gegen Aufnahme 6 vertauscht. Für die neutrale Mittellinie und die zu ihr senkrechten Linien  $x = 0, \pi, 2\pi$  etc. würde in beiden Aufnahmen die Gangdifferenz  $\frac{1}{2}$  betragen, also eine mittlere Helligkeit für diese Stelle bedingen. Gleichwohl erscheinen diese Stellen in Aufnahme 5 ziemlich dunkel — die Curven  $\Delta = 0$  sind noch durch dunklere Stellen miteinander verbunden — während sie in Aufnahme 6 fast von gleicher Helligkeit wie die hellen Maxima erscheinen. Diese Abweichung hat offenbar ihren Grund in der ursprünglichen Doppelbrechung der Platte, die, wie ich im 1. Abschnitt erwähnt habe, in der Mitte der Platte positiv ist. Die Gangdifferenz ist daher in der Nähe der neutralen Mittellinie bei Aufnahme 5 nicht  $\lambda/4$ , sondern etwas kleiner, und bei Aufnahme 6 nicht  $\lambda/4$ , sondern etwas grösser.

d) *Der Betrag der spezifischen Doppelbrechung.* Aus den Aufnahmen lässt sich endlich das Verhältnis der Phasendifferenz zur elastischen Deformation, d. h. die Constante  $C$  der Formel (20), ermitteln. Allein die Phasendifferenz ist nur ein relatives Maass der Doppelbrechung. Sie ist ausserdem abhängig von dem Verhältnis der Dicke der durchstrahlten Schicht zur Wellenlänge. Um auf Zahlen zu kommen, die für das benutzte Glas unabhängig von seinen Dimensionen gelten, führe ich als Maass der Doppelbrechung die durch die Verbiegung erzeugte Differenz der Brechungsexponenten der beiden Strahlen im Glase ein:

$$\nu = n_1 - n_2.$$

Dann ist

$$\Delta = \frac{\nu b}{\lambda} = C \frac{\delta s}{s}$$

und folglich

$$(24) \quad \nu = \frac{C \lambda}{b} \cdot \frac{\delta s}{s} = G \cdot \frac{\delta s}{s}.$$

Die hier neu eingeführte Grösse  $G$  ist das Verhältnis der Doppelbrechung zur Deformation oder das „Maass der spezifischen Doppelbrechung“ für den hier vorliegenden Fall einer Dehnung oder Zusammendrückung in einer Richtung. Sie ist eine charakteristische Constante des Glases, vorausgesetzt, dass



Zahl absieht, die offenbar zu klein ausgefallen ist, gruppieren sich die Zahlen unregelmässig um den Mittelwert 0,0663. Dass die Schwankungen beträchtlich sind, rührt wesentlich von der Unsicherheit der Messung der kleinen Grösse  $2a$  her; der Plattenrand erscheint in der Vergrösserung des Mikroskopes nicht hinreichend scharf, um eine ganz exacte Messung der Schwingungsamplitude zu gestatten. Leider ist für diese Zahlen eine Umrechnung auf Millimetermaass nicht möglich, weil ich es seinerzeit verabsäumt hatte, das Grössenverhältnis zwischen dem Bild auf der Platte und dem Object durch besondere Messungen für diese Aufnahmen festzustellen. Derartige Messungen liegen aber für andere Aufnahmen vor, die unter etwas anderen Verhältnissen angestellt waren, sodass der für sie gefundene Reductionsfactor auf die obigen Aufnahmen nicht übertragen werden konnte. Ich komme auf diese Aufnahmen, die im besonderen zum Zweck quantitativer Vergleichen der Vorgänge im Bauch und im Knoten gemacht wurden, und von denen einige in Fig. 10 und 11 der Taf. I wiedergegeben sind, weiter unten ausführlicher zu sprechen. Hier will ich nur die Zahlen angeben, die sich für die Grössen  $a$  und  $\eta$  aus den Interferenzcurven des Schwingungsbauches ergeben haben. Ich drücke sie in diesem Falle gleich in mm aus. Aufnahme 10 ergibt mit ihrer sehr kleinen Amplitude sehr unsichere Werte. Aus Aufnahme 11 ergibt sich im Mittel aus drei Messungen:

$$a = 0,13 \text{ mm}, \eta = 1,14 \text{ mm} \text{ für } \Delta = 1, \text{ also } \frac{\Delta}{a \eta} = 6,75.$$

Zwei andere Aufnahmen, die auf der Tafel nicht wiedergegeben sind, ergeben:

$$a = 0,18 \text{ mm}, \eta = 0,95 \text{ mm} \text{ für } \Delta = 1, \text{ also } \frac{\Delta}{a \eta} = 5,85$$

$$a = 0,23 \text{ mm}, \eta = 0,62 \text{ mm} \text{ für } \Delta = 1, \text{ also } \frac{\Delta}{a \eta} = 7,01.$$

Im Mittel folgt daraus für  $\Delta/a \eta : 6,53$ . Der constante Factor in Formel (25) ergibt sich mit  $\lambda = 0,000428$ ,  $l = 700$ ,  $b = 70 \text{ mm}$  zu 0,0248, und danach

$$G = 0,162.$$



wieder mit einem Kathetometermikroskop folgende Grössen ausgemessen: 1. die Abstände der isochromatischen Linien von der Mittellinie für  $\Delta = \pm 1, 2, 3$  und 2. die Abstände der Platten voneinander. Ich gebe in der Tab. 2 die aus diesen Messungen gewonnenen Mittelwerte, und zwar bedeutet  $\eta$  ( $\eta_0$  bis  $\eta_3$  für die Belastungen 0—3 kg) den Abstand des Interferenzstreifens ( $\Delta = 1$ ) von der neutralen Mittellinie, und  $a$  ( $a_1, a_2, a_3$ ) die durch die Belastung hervorbrachte Durchbiegung der Platten, beide Grössen in Scalenteilen des Ocularmikrometers ausgedrückt. Für die Berechnung ist aber zu berücksichtigen, dass die Grössen  $a_1$  bis  $a_3$  nicht die vollständigen Durchbiegungen der Platten angeben, da die Platten schon bei der Belastung Null infolge der gewählten Versuchsanordnung eine gewisse Durchbiegung erfahren. Bezeichnet man diese mit  $\alpha_0$ , so sind die wahren Durchbiegungen der Platten bei den Belastungen 1, 2 und 3 kg

$$\alpha_1 = \alpha_0 + a_1, \quad \alpha_2 = \alpha_0 + a_2, \quad \alpha_3 = \alpha_0 + a_3.$$

Die Platten zeigen daher auch schon bei der Belastung Null eine gewisse Doppelbrechung und geben einen messbaren Wert  $\eta_0$  für  $\eta$ . Wenn man berücksichtigt, dass  $\eta \times \alpha$  constant sein muss, so lässt sich  $\alpha_0$  aus den Beobachtungen berechnen, indem man die Gleichungen ansetzt:

$$\eta_0 \alpha_0 = \eta_1 (\alpha_0 + a_1) = \eta_2 (\alpha_0 + a_2) = \eta_3 (\alpha_0 + a_3).$$

Den aus diesen Beziehungen im Mittel sich ergebenden Wert von  $\alpha_0$  und die daraus berechneten Beträge der wahren Durchbiegungen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  enthält die vierte Columne der Tabelle; die fünfte giebt die Producte  $\eta \times \alpha$ , um zu zeigen, wie weit dieselben constant sind.

Tabelle 2.

Ausmessung der Interferenzen bei statischer Biegung.

| Belastung | $\eta$   | $a$   | $\alpha$ | $\alpha \cdot \eta$ |
|-----------|----------|-------|----------|---------------------|
| 0 kg      | 7,20 sc. | — sc. | 1,71 sc. | 12,31               |
| 1         | 4,76     | 0,88  | 2,59     | 12,33               |
| 2         | 3,54     | 1,75  | 3,46     | 12,25               |
| 3         | 2,90     | 2,54  | 4,25     | 12,32               |



in den kleinen Werten der Durchbiegung. Der kleinen Abweichung, welche die aus den Schwingungsbeobachtungen abgeleitete Zahl für  $G$ , 0,162, von den hier gefundenen Werten — im Mittel 0,170 — zeigt, dürfte daher eine bestimmte Bedeutung nicht beizulegen sein. Vielmehr glaube ich aus der nahen Uebereinstimmung der Zahlen den Schluss ziehen zu dürfen, dass die bei den Schwingungen im Bauche auftretende Doppelbrechung sich auch quantitativ aus der jeweiligen Verbiegung der Platte vollständig erklären lässt.

Der gefundene Wert von  $G$  steht übrigens in guter Uebereinstimmung mit den Werten, die von anderen Beobachtern für Glas gefunden worden sind. Die Doppelbrechung des Glases ist seit den ersten Beobachtungen, die Brewster<sup>1)</sup> darüber angestellt hat, mehrfach gemessen worden, so von F. Neumann in der schon genannten Arbeit, von Wertheim<sup>2)</sup>, Mach<sup>3)</sup> und Pockels.<sup>4)</sup> Die von mir im Obigen eingeführte Grösse  $G$  entspricht dabei folgenden Grössen in der Bezeichnungsweise der verschiedenen Autoren:

$$\text{bei F. Neumann und Mach } G = \frac{5}{4} \cdot \frac{p-q}{G^2},$$

$$\text{bei Wertheim . . . . . } G = \frac{E}{C},$$

$$\text{bei Pockels . . . . . } G = n(1 + \nu) \frac{p-q}{\omega^0}.$$

Berechnet man hiernach die Grösse  $G$  aus den Angaben der verschiedenen Autoren, so findet man folgende Werte:

|  |              |
|--|--------------|
| bei Brewster (nach der Berechnung von F. Neumann <sup>5)</sup>       | $G = 0,168$  |
| bei F. Neumann . . . . .   | $G = 0,157$  |
| bei Wertheim für gewöhnliches Kronglas . . . . .                     | $G = 0,179$  |
| (bei anderen Glassorten liegen die Werte zwischen 0,1633 und 0,2182) |              |
| bei Mach . . . . .   | $G = 0,168$  |
| bei Pockels . . . . .  | $G = 0,174.$ |

---

1) D. Brewster, Phil. Trans. Jahrgang 1816 (1. Teil) p. 156—178; Edinb. Trans. 8. p. 369. 1818.  
 2) W. Wertheim, Ann. chim. phys. (3) 40. p. 156—221. 1854.  
 3) E. Mach, Optisch-akustische Versuche. p. 16. Prag 1873.  
 4) F. Pockels, Wied. Ann. 37. p. 390—391. 1889.  
 5) F. Neumann, l. c. p. 49.





im Gyps mit denen in der Glasplatte zusammen und es tritt je nach dem Vorzeichen der Doppelbrechung in der Glasplatte Addition oder Subtraction der Wirkung, also Verschiebung der Interferenzstreifen nach der einen oder der anderen Richtung ein. Bei der Aufnahme dieser Erscheinungen mit dem Fallpendel projecirt sich das Bild der Interferenzstreifen im Gypskeil zugleich mit dem Bilde der Glasplatte auf den Spalt *s* (Fig. 2) und zwar so, dass die Streifen senkrecht zum Spalt verlaufen. Macht man eine Aufnahme, ohne dass die Platte schwingt, so erhält man das Bild des ruhenden, unverschobenen Streifens (Fig. 8 auf Taf. I). Bei schwingender Platte aber verwandelt sich der geradlinige Streifen in eine Wellenlinie (Fig. 9 auf Taf. I), deren Periode der ganzen Periode der Plattenschwingung entspricht, indem der Streifen bei der einen Aufhellungsperiode nach oben, bei der nächsten nach unten verschoben wird.

Aufnahmen dieser Art geben zugleich ein Mittel an die Hand, um die Stärke der maximalen Doppelbrechung im Knoten zu messen. Die Amplitude der Wellencurve des Interferenzstreifens — die halbe Ordinatendifferenz von Berg und Thal der Curve — giebt die maximale Verschiebung des Streifens aus seiner Ruhelage. Misst man ausserdem auf den Aufnahmen den Abstand zweier benachbarter Streifen des Gypskeiles, deren Phasendifferenz eine ganze Schwingungsdauer beträgt, so bedeutet das Verhältniss beider Grössen die von der Glasplatte bewirkte maximale Phasendifferenz in Bruchteilen der Schwingungsdauer des Lichtes. Doch haben diese Messungen kein Interesse, wenn nicht zugleich die Amplitude der Plattenschwingung oder die gleichzeitige Stärke der Doppelbrechung im Schwingungsbauche festgestellt werden kann. Es war daher nötig, gleichzeitige Aufnahmen der Vorgänge im Bauch und im Knoten auszuführen. Die Anordnung dieser Versuche ist bereits auf p. 7 u. 8 beschrieben. Zwei Beispiele derartiger Aufnahmen enthält Taf. I unter Figg. 10 u. 11. Bevor ich jedoch auf die quantitative Vergleichung der beiden Arten von Doppelbrechung eingehe, empfiehlt es sich, die Beziehungen festzustellen, die in Bezug auf die Phasen und die Vorzeichen zwischen ihnen bestehen.

b) *Die Phase der Periode.* Die Doppelaufnahmen lassen ohne weiteres erkennen, dass die Maxima der Doppelbrechung







beim Durchgang durch den Knoten in die um  $90^\circ$  verschiedene Lage im anderen Schwingungsbauche allmählich herumdreht. Denkt man sich nun das Nicolsystem aus der  $45^\circ$ -Stellung heraus nach rechts gedreht, so lehrt die Betrachtung der Figuren unmittelbar, dass in den beiden gezeichneten Fällen Auslöschung an bestimmten Stellen des rechten oberen und des linken unteren Quadranten eintreten muss; umgekehrt bei Drehung nach links. Diesen Folgerungen aus den Zeichnungen entsprechen die in Fig. 3 dargestellten Thatsachen. Sie können also als Beweis für die Richtigkeit der Behauptungen angesehen werden, die ich oben hinsichtlich des Vorzeichens der Doppelbrechung im Knoten aufgestellt habe.

Ich füge in Bezug auf die beschriebenen Erscheinungen noch die folgenden Bemerkungen hinzu: Aus der obigen Darlegung folgt, dass für die beiden gezeichneten Fälle die Curven bei derselben Nicolstellung die gleiche Lage haben. Sie ändern also die Lage nicht, während die Platte aus einer Verbiegung in die entgegengesetzte hinüberschwingt, und sind daher auch während der Schwingung deutlich sichtbar. Die Form der Curven aber, wie sie in Fig. 3 dargestellt ist, entspricht nicht ganz den Beobachtungen. Die Curven machten zwar den Eindruck von Hyperbeln, doch war die Knotenlinie augenscheinlich nicht die eine Asymptote. Auch machten sich Verzerrungen der Curven bemerklich, indem in diesem Bereich geringer künstlicher Doppelbrechung die ursprüngliche Doppelbrechung der Glasplatte stärkere Störungen verursachte. Der in Fig. 3 gezeichnete Fall würde verwirklicht sein, wenn die Platte vollkommen homogen und die durch Scheerung hervorgerufene Doppelbrechung durch die ganze Plattendicke constant wäre. Wie weit die Abweichungen durch die Nichterfüllung dieser letzteren Bedingung oder durch die Inhomogenität der Platte verursacht sind, soll hier nicht weiter untersucht werden. Ich werde später auf diesen Punkt zurückkommen.

d) *Die Grösse der Doppelbrechung.* Die Doppelaufnahmen wurden mit dem Kathetometermikroskop ausgemessen und zwar wurden folgende Grössen festgestellt: 1. an dem Knotenbilde die Amplitude der Wellencurve des Interferenzstreifens und der Abstand zweier Interferenzstreifen voneinander — das Verhältniss beider Zahlen giebt die Phasendifferenz  $\Delta_k$  im



bediene ich mich der von F. Neumann aufgestellten Gleichungen.<sup>1)</sup> Es seien  $\alpha, \beta, \gamma$  drei zu einander senkrechte „relative Dilatationen“;  $v_x, v_y, v_z$  seien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes für Strahlen, deren Schwingungen sich im deformirten Körper parallel zu  $\alpha, \beta, \gamma$  vollziehen, die also mit ihrer Fortpflanzungsrichtung und ihrer Polarisationsrichtung senkrecht zu den genannten Richtungen liegen. Endlich sei  $v$  die Geschwindigkeit des Lichtes im nicht deformirten Glase. Dann kann man ganz allgemein ansetzen:

$$v_x = v + q \cdot \alpha + p \beta + p \gamma,$$

$$v_y = v + p \cdot \alpha + q \beta + p \gamma,$$

$$v_z = v + p \cdot \alpha + p \beta + q \gamma.$$

Ich denke mir im Folgenden die  $x$ -Axe stets in die Richtung der grössten Dehnung gelegt; die  $z$ -Axe in die Richtung des durchfallenden Lichtes. Dann ist die beobachtete Phasendifferenz bestimmt durch die Differenz der beiden Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_y$  nach der Formel:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{b}{\lambda} (n_x - n_y) \\ &= \frac{b \cdot v_0}{\lambda} \frac{v_y - v_x}{v_y \cdot v_x}, \end{aligned}$$

in der  $v_0$  die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume bedeutet. Im Product des Nenners kann bei kleinen Deformationen der Unterschied der Grössen  $v_x$  und  $v_y$  von  $v$  vernachlässigt werden. Setzt man dann noch den Brechungsexponenten des Glases  $v_0/v = N$ , so ist:

$$\Delta = \frac{b N^2}{\lambda \cdot v_0} (p - q) (\alpha - \beta).$$

Im Knoten hat die Deformation den Charakter einer Schiebung. Die Richtungen der grössten Dehnung und Zusammendrückung liegen unter  $45^\circ$  zur Richtung der scheerenden Kraft; die Zusammendrückung hat dieselbe Grösse wie die Dehnung, und in der dritten Richtung ist die Deformation gleich Null, also  $\beta = -\alpha, \gamma = 0$ :

$$\Delta_k = \frac{b \cdot N^2}{\lambda \cdot v_0} (p - q) \cdot 2 \alpha_k,$$

wenn  $\alpha_k$  die Dehnung im Knoten bedeutet.

1) F. Neumann, l. c.





Wert. Die Querschnitte verschieben sich eben nicht parallel mit sich selbst, sondern neigen sich gegeneinander in dem Maasse, als sich die Axe des Stabes krümmt; die Schiebungen der Querschnitte gegeneinander aber sind bedingt durch die Aenderungen der Krümmung und sind diesen nach Gleichung (2) proportional. Ist  $P$  die durch diese Gleichung definirte tangentielle Kraft,  $n$  der Starrheitscoefficient des Glases, so ist:

$$\sigma_k = \frac{P}{n},$$

folglich:

$$\alpha_k = \frac{E}{2n} \frac{d^3}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Zwischen dem Elasticitätsmodul  $E$  und dem Starrheitscoefficienten  $n$  besteht aber die Beziehung:

$$n = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_k = (1 + \mu) \frac{d^3}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

und

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{d^3}{6 \cdot \eta} \times \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (18) und (19) ergibt sich daraus für die schwingende Platte:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{p \cdot d^3}{6 \cdot l} \times \frac{1}{\eta} = \frac{7 \pi d^3}{12 l} \times \frac{1}{\eta}$$

und wenn man die Dimensionen der Platte einsetzt:

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = 0,128 \times \frac{1}{\eta}.$$

Nach dieser Theorie würde also der empirisch bestimmte Wert der Constante nicht ganz doppelt so gross sein (0,22 gegen 0,13) wie der theoretische.

Doch auch diese Theorie entspricht der Wirklichkeit nur in sehr geringer Annäherung. Eine strenge Theorie der Biegung eines Stabes ist von de Saint-Venant<sup>1)</sup> entwickelt worden. Nach dieser sind die tangentialen Kräfte im Querschnitt des gebogenen Stabes nicht constant, sondern von Punkt zu Punkt

1) de Saint-Venant, Liouville's Journal (2) 1. p. 89–189. 1856.









Die in den Knoten auftretende Doppelbrechung rührt von den in der Platte bei ihrer Verbiegung entstehenden scheerenden Kräften her. Ihre Axen liegen unter  $45^\circ$  zur Längsrichtung der Platte; ihre Grösse ist gering; sie scheint, entsprechend der Theorie, in der Mitte der Platte am grössten zu sein und nach den Rändern hin abzunehmen. Ihr Verhältniss zur Schwingungsamplitude der Platte stimmt sehr nahe überein mit demjenigen Wert, der sich theoretisch dafür berechnen lässt, wenn man die von de Saint-Venant für die scheerenden Kräfte bei statischer Verbiegung gegebenen Ausdrücke auf die Verbiegung der schwingenden Platte überträgt.

Greifswald, October 1900.

(Eingegangen 26. October 1900.)

---

## 2. *Darstellung der Lamellentöne;* ✓ *von Victor Hensen.*

---

In der Arbeit über die Lamellentöne<sup>1)</sup> war ich schuldig geblieben, Aufnahmen der Wellenformen zu geben. Da sich findet, dass diese unentbehrlich für eine eindringendere Analyse des Vorganges sind, erlaube ich mir, dieselben jetzt zu bringen. Es handelt sich also darum, mit Hülfe des Lichtes gleichsam zu belauschen, was geschieht, wenn sich die Massenschwingung eines Gases auf ein anderes Gas überträgt, wie die Massenschwingung selbst gestaltet ist, und wie sie durch die Dazwischenkunft einer continuirlich fliessenden Gaslamelle erzeugt wird.

Der Druck des Brenngases hat auf die Tonhöhe wenig Einfluss. Man kann dessen Zuleitung comprimiren, ohne die Tonhöhe erheblich zu ändern. Das Flackern der Flamme verändert deren Ton, aber der Vorgang ist langsam und in dem kleinen, 45 cbm fassenden Raum, in dem experimentirt wurde, war es meistens nicht störend. Wenn die Flamme in engem Raum eingeschlossen wird, zerstört die Hitze, die je nach der Tonhöhe verschieden stark entsteht, die Constanz des Tones. Der Luftstrom der Lamelle wurde aus einem 2 cbm fassenden Separatgasometer im Keller des physiologischen Institutes entnommen. Von dort ging er durch ein Rohr von etwa 1 cm Lichtendurchmesser in einen festen Behälter von 0,5 cbm Inhalt, dann weiter durch feste Röhren und schliesslich durch einen weiten kurzen Kautschukschlauch zu dem Spaltrohr. Die variometrischen, durch vorüberziehende Wolken und Aehnliches verursachten, kurzen Schwankungen des Luftdruckes können auf

---

1) V. Hensen, Ann. d. Phys. 2. p. 719. 1900.



































die Einfallslote. Die gestrichelten Linien sind Verlängerungen des Radius, die Winkel  $\beta$  sind die Amplitudenwinkel. Die Mittelpunkte der Spiegel werden von der optischen Axe  $Ax$  getroffen. Von hier aus gehen die beiden punktirten Linien  $1H$  und  $2H$  in der Länge  $h$  parallel mit dem Krümmungs-

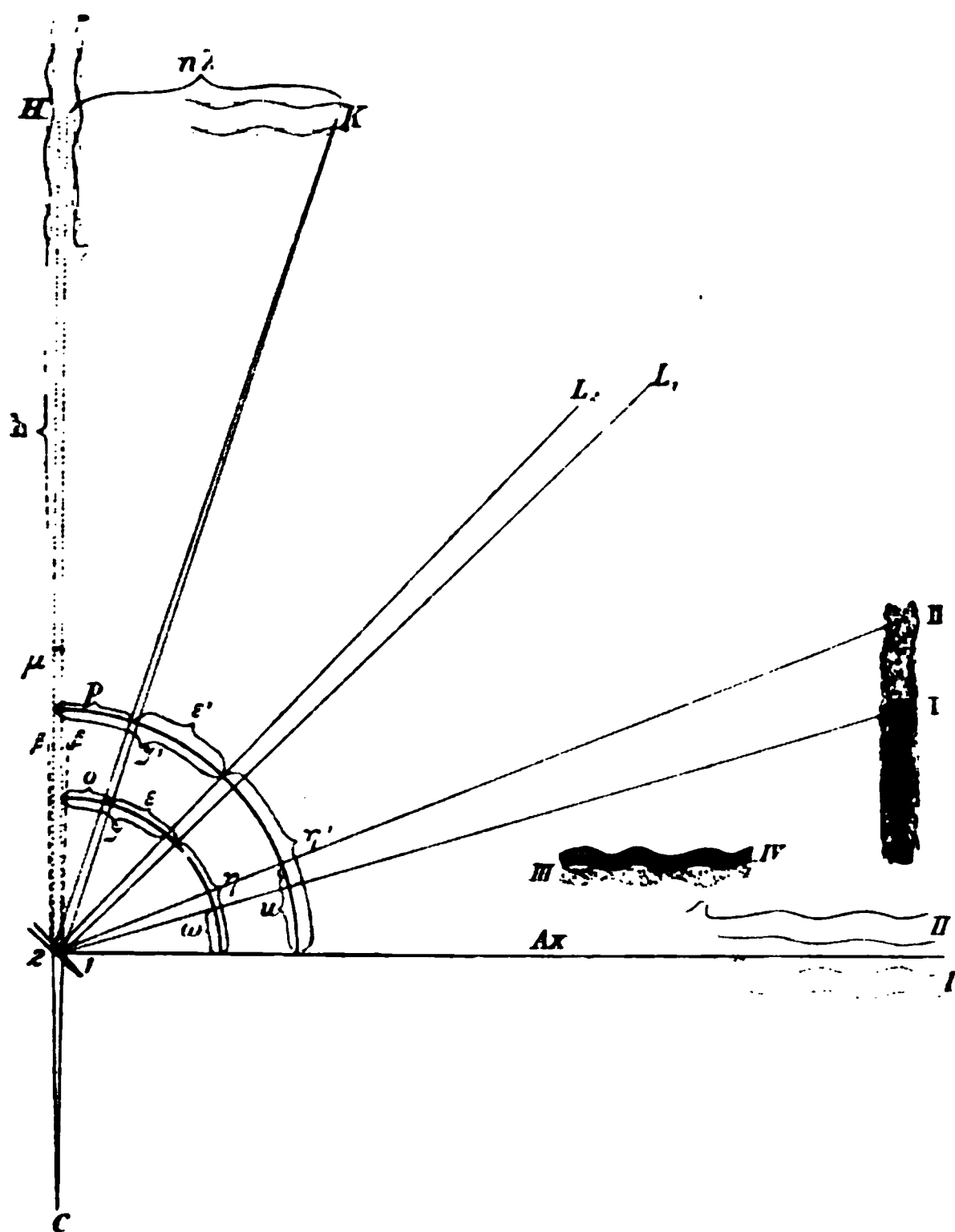


Fig. 10.

radius der *Ruhelage* der Gabel bis zur Ebene des zu spiegelnden Objectes. Die Flamme  $H$  ist senkrecht durch die Ebene des Papiere gehend zu denken, das Flammenbild  $K$  verläuft in dessen Ebene. Die Bilder geben zwei entgegengesetzte Phasen der im Fortschritt begriffenen Wellen, die eine Phase punktirt.  $\mu$  der Abstand der Spiegel voneinander. Es handelt





spät finde, lässt sich die Flamme in der Tonhöhe recht gut fesseln, wenn man eine *zweite*, unisono tönende Gabel dicht neben sie hält. Die Molecularschwingung der Luft wirkt auf die Massenschwingung der Flamme so ein, dass die Wulstbildung unter der blasenden Lamelle durch die Molecularschwingungen in der Luft verzögert oder beschleunigt wird.

Hr. Dr. Deetjen hat mir auch bei dieser Arbeit ausdauernd geholfen.

(Eingegangen 13. October 1900.)

---

Die Figuren 2, 8 und 9 liessen sich durch Autographie nicht klar genug herstellen, sie sind daher lithographirt worden.

---



Messung ein möglichst getreues Bild der Lichtabsorption von Farbgläsern bestimmter Zusammensetzung gegeben werden.

Es wurden Gläser nach bestimmten Typen, deren Zusammensetzung den in folgender Tabelle gegebenen Zahlen entspricht, unter Zusatz bestimmter Mengen färbender Oxyde, bei Oxydationsfeuer abgeschmolzen, die Extinctionscoefficienten dieser Gläser mit dem Glan'schen Spectralphotometer gemessen und nach Reduction auf ein vergleichbares Maass in Curven dargestellt.

Tabelle I.

| Zusammensetzung der Glastypen |   |                  |                   |                  |      |       |      |                               |
|-------------------------------|---|------------------|-------------------|------------------|------|-------|------|-------------------------------|
| Nr.                           | in Aequivalenten                              | in Procenten     |                   |                  |      |       |      |                               |
|                               |   | SiO <sub>2</sub> | Na <sub>2</sub> O | K <sub>2</sub> O | CaO  | ZnO   | PbO  | B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> |
| 1                             | Na <sub>2</sub> O, 3SiO <sub>2</sub>          | 74,5             | 25,4              | —                | —    | —     | —    | —                             |
| 2                             | K <sub>2</sub> O, 3SiO <sub>2</sub>           | 65,7             | —                 | 34,3             | —    | —     | —    | —                             |
| 3                             | Na <sub>2</sub> O, CaO, 5SiO <sub>2</sub>     | 71,8             | 14,8              | —                | 13,4 | —     | —    | —                             |
| 4                             | K <sub>2</sub> O, CaO, 5SiO <sub>2</sub>      | 66,7             | —                 | 20,9             | 12,4 | —     | —    | —                             |
| 5                             | Na <sub>2</sub> O, PbO, 5SiO <sub>2</sub>     | 51,4             | 10,6              | —                | —    | —     | 38,0 | —                             |
| 6                             | K <sub>2</sub> O, PbO, 5SiO <sub>2</sub>      | 48,7             | —                 | 15,2             | —    | —     | 36,0 | —                             |
| 7                             | Na <sub>2</sub> O, ZnO, 5SiO <sub>2</sub>     | 67,6             | 13,9              | —                | —    | 18,25 | —    | —                             |
| 9                             | Na <sub>2</sub> B <sub>4</sub> O <sub>7</sub> | —                | 30,7              | —                | —    | —     | —    | 69,3                          |
| 11                            | B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>                 | —                | —                 | —                | —    | —     | —    | 100                           |
| 15                            | Bleisilicat                                   | 20               | —                 | —                | —    | —     | 80   | —                             |

Ausser den in der Tabelle angeführten Gläsern wurden noch zwei Borosilicatgläser (ein Natronborosilicatglas Nr. 12 und ein Barytborosilicatglas Nr. 14) in den Kreis der Untersuchung einbezogen.

Die Sätze der in der vorstehenden Tabelle angeführten Gläser wurden mit den färbenden Oxyden bez. mit Lösungen der Nitrats der färbenden Oxyde<sup>1)</sup> derart versetzt, dass auf je 100 g der farblosen Glassubstanz die folgenden Mengen färbenden Oxydes kamen:

|                   |                  |
|-------------------|------------------|
| Chromoxyd 1 g     | Manganoxyd 1,0 g |
| Kupferoxyd 2 g    | Eisenoxyd 2,0 g  |
| Kobaltoxyd 0,1 g  | Uranoxyd 2,0 g   |
| Nickeloxyd 0,25 g |                  |

1) Bei Chromgläsern auch mit reiner Chromsäurelösung.



Absorptionsgrösse  $A$  des färbenden Oxydes für die betreffende Wellenlänge.

Es ist

$$A = \frac{E}{g \cdot S},$$

wenn  $S$  das specifische Gewicht des Glases und  $g$  die Anzahl Milligramm Farboxyd in 1 g des Versuchsglases bedeuten.

Die Grösse  $A$  wurde nun an verschiedenen Stellen des Spectrums bestimmt und als Function der Wellenlängen graphisch dargestellt.

#### Vereinfachungen und Fehlerquellen.

Dem Zwecke der vorliegenden Arbeit gemäss, ein den thatsächlichen Verhältnissen annähernd entsprechendes Bild der Lichtabsorption von *zahlreichen* Farbgläsern zu entwerfen, wurden einige Vereinfachungen bei der Messung der physikalischen Constanten durchgeführt, die bei ganz exacten Messungen nicht oder nur unter besonderen Umständen erlaubt sein würden.

So brachte ich, um nicht von jedem Farbglase zwei Plättchen verschiedener Dicke anwenden zu müssen, als Vergleichsglas vor die untere Spalthälfte ein farbloses Glas von annähernd dem gleichen Brechungsexponenten, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass dadurch die Fehler der Reflexion selbst bei stark gefärbten Gläsern genügend eliminirt werden.

Ferner wurde das specifische Gewicht derjenigen Glas-sorten, welche nur geringe Mengen färbender Oxyde enthielten, nicht besonders bestimmt, sondern gleich dem specifischen Gewicht des typischen, ungefärbten Glases selbst gesetzt.<sup>1)</sup>

Als weiterer Mangel der vorliegenden Arbeit ist anzuführen, dass das benutzte Glan'sche Spectralphotometer im violetten Teile so lichtschwach war, dass die Messungen nicht über das ganze sichtbare Spectrum, sondern nur etwa bis zur

---

1) Der Extinctionscoefficient wurde nicht aus dem Mittel zahlreicher Winkelablesungen am Spectralphotometer berechnet, sondern meist aus dem Mittel zweier Ablesungen, wenn diese genügend genau untereinander übereinstimmten; bei einiger Uebung war dies nicht schwer zu erreichen. Diese Vereinfachung auf Kosten der Genauigkeit musste ich einführen, um das grosse Material in der gegebenen Zeit bewältigen zu können.



den Curven von  $Co_5$  und  $Co_7$  liegt diejenige von  $Co_4$ ; die letztere ist nicht eingetragen.

Mit Hilfe des Vergleichsspectroskopes wurden noch die Gläser  $Co_1$  und  $Co_3$  mit den obigen verglichen. Es ergibt sich, dass das Spectrum von  $Co_3$  mit dem von  $Co_7$  zusammenfällt und dasjenige von  $Co_1$  mit dem von  $Co_5$ .

Fig. 1.

a Absorptionsspectrum des Kobaltglases nach Messung mit dem Spectralphotometer  
b Absorptionsspectrum des Kobaltglases nach Beobachtung mit dem Spectroskop.

Von Interesse ist die weitgehende Uebereinstimmung der Absorption der nach dem Typus  $R'_2O.R''O.5SiO_2$  zusammengesetzten Kobaltgläser.

Viel geringer, wenn auch im Verlauf ganz ähnlich, ist die Absorption des Boraxglases  $Co_6$ ; ganz abweichend dagegen

gezeichnet. Ähnliche Abänderungen finden sich auch bei anderen Gläsern; so wurden bei Nickel- und Chromgläsern 100 Å, bei den sehr schwach absorbirenden Eisengläsern sogar 3000 Å aufgetragen.











kann. Die drei Oxyde: Eisenoxyd, Eisenoxydul und Eisenoxydul-  
oxyd können sowohl einzeln, als nebeneinander in ungebun-



Fig. 2.

denem Zustande als auch in Verbindung mit Kieselsäure oder  
Borsäure vorhanden sein, sowie endlich als Doppelsalz, teil-





finnländischen Gesellschaft der Wissenschaften“ enthaltenen Abhandlungen.<sup>1)</sup>

### Methoden der Decrementsberechnung.

2. Wenn die beiden Belegungen eines Condensators von der Capacität  $C$  plötzlich durch eine Leitung verbunden werden, deren Widerstand  $W$  ist und die eine Batterie von der elektromotorischen Kraft  $E$  sowie eine Inductionsspule vom Selbstpotential  $L$  enthält, so genügt bekanntlich die während der Ladung des Condensators stattfindende veränderliche Potentialdifferenz  $p$  seiner Belegungen der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{W}{L} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{LC} = \frac{E}{LC}.$$

Für die augenblickliche Stromstärke  $i$  hat man den Ausdruck

$$(2) \quad i = C \frac{dp}{dt}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) setzen ein constantes  $C$  voraus.

Weil das Isolationsvermögen der isolirenden Schichten der Inductionsspule nie absolut vollkommen ist, und eine kleine Leitfähigkeit dieser Schichten wegen der in der Spule vorhandenen und schnell wechselnden Spannungsdifferenzen einen merkbaren Einfluss auf das Decrement der Ladungsschwingungen ausübt, um so mehr, je kleiner der Widerstand des Stromkreises ist, so muss die Gleichung (1) noch vervollständigt werden. Einen ähnlichen Einfluss kann eine Leitfähigkeit des Dielektricum des Condensators ausüben. Indem man den Stromkreis als gespaltet betrachtet, erhält man statt (1) die Differentialgleichung<sup>2)</sup>

$$(3) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + \left\{ \frac{W}{L} + \frac{1}{C} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \right\} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{LC} = \frac{E}{LC},$$

worin  $R$  und  $r$  bez. die Widerstände des Condensators und der isolirenden Schichten der Inductionsspule bezeichnen und

1) A. F. Sundell, Acta Soc. Scient. Fenn. 24. Nr. 11. 1899; Hj. Tallqvist, Acta Soc. Scient. Fenn. (I) 23. Nr. 4. 1897; (III) 26. Nr. 3. 1899.

2) Hj. Tallqvist, l. c. (I) p. 32.





festen Platte um  $-dD$  nähert, beim Erheben eines der gegenseitigen Anziehung der Platten gleichen Gewichtes

$$mg = \frac{Fp^2}{8\pi A^2 D^2},$$

wo  $A$  das Verhältniss der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheit der Elektrizität ist, so wird hierbei verrichtet die Arbeit

$$-mg dD = -\frac{Fp^2}{8\pi A^2 D^2} dD = \frac{1}{2} p^2 d \frac{F}{4\pi A^2 D} = \frac{1}{2} p^2 dC,$$

welche auch der Batterie entzogen werden muss.

In einem Condensator mit festem Dielektricum muss man sich die entsprechende Arbeit in irgend einer Weise zur Vermehrung der dielektrischen Polarisirung angewandt denken.

Für die Energiegleichung bekommt man jetzt

$$(5) \quad \begin{cases} Ei = Wi^2 + Cp \frac{dp}{dt} + \frac{1}{2} p^2 \frac{dC}{dt} + \frac{1}{2} p^2 \frac{dC}{dt} + Li \frac{di}{dt} \\ = Wi^2 + pi + Li \frac{di}{dt} \text{ [laut Gleichung (4)]}. \end{cases}$$

Nach Division mit  $i$  folgt hieraus die Gleichung

$$(6) \quad E = Wi + p + L \frac{di}{dt},$$

welche für den Fall einer unveränderlichen Capacität sehr bekannt ist.

Durch Elimination von  $i$  zwischen (4) und (6) erhält man als Differentialgleichung des Ladungsvorganges

$$(7) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{W}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E}{L},$$

oder auch

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2 p}{dt^2} = \left\{ \frac{W}{L} + \frac{2}{C} \frac{dC}{dt} \right\} \frac{dp}{dt} \\ + \left\{ \frac{1}{LC} + \frac{W}{L} \frac{1}{C} \frac{dC}{dt} + \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{dt^2} \right\} p = \frac{E}{LC}, \end{cases}$$

welche beiden Gleichungen lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten darstellen.

3. Wir behandeln einen einfachen Specialfall, indem wir annehmen, dass die Capacität sich gleichförmig mit der Zeit ändert, und somit

$$(9) \quad C = C_0 + h t$$

setzen. Die Gleichung (8) giebt dann

$$(10) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + \left\{ \frac{W}{L} + \frac{2h}{C} \right\} \frac{dp}{dt} + \frac{1 + Wh}{LC} p = \frac{E}{LC},$$

eine lineare Differentialgleichung, wo die Coefficienten immer noch veränderlich sind, weil  $C$  von der Zeit abhängt. Für unseren Zweck genügt es jedoch einen constanten mittleren Wert  $C_m$  für  $C$  einzuführen, da wir diese Gleichung nur auf eine sehr kurze Zeit (zwei oder drei Halbosillationen) anwenden werden. Unter solchen Verhältnissen stellt die Gleichung (10) eine regelmässig gedämpfte Schwingung dar. Das allgemeine Integral ist:

$$p = \frac{E}{1 + Wh} + e^{-\left(\frac{W}{2L} + \frac{h}{C_m}\right)t} \{A \cos \beta t + B \sin \beta t\},$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1 + Wh}{LC_m} - \frac{1}{4} \left( \frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{LC_m} - \left( \frac{W}{2L} \right)^2 - \left( \frac{h}{C_m} \right)^2}, \end{aligned}$$

wo  $T$  die Schwingungszeit ist. Ferner hat man das logarithmische Decrement

$$\alpha = \left( \frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m} \right) \frac{\pi}{2\beta}.$$

In  $\beta$  können die Glieder

$$\left( \frac{W}{2L} \right)^2 \quad \text{und} \quad \left( \frac{h}{C_m} \right)^2,$$

die von derselben Ordnung sind, im Vergleich mit  $1/LC_m$  vernachlässigt werden. Somit hat  $h$  keinen Einfluss auf die Schwingungszeit und für das Decrement ergibt sich

$$(11) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \left( \frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m} \right) \sqrt{LC_m} = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C_m}{L}} + \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}}.$$

Durch eine gleichförmige Veränderung der Capacität wird somit das logarithmische Decrement um

$$\pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = \frac{h T}{2 C_m}$$

vergrößert (oder verkleinert).

Es werde die Grösse  $\alpha$  „augenblickliches Decrement“, die Grösse  $h = e^{\alpha}$  „augenblickliches Dämpfungsverhältnis“ genannt.

4. Da bei langsam erfolgender Veränderung der Capacität die Schwingung für eine kurze Zeit als regelmässig gedämpft angesehen werden kann, erhält man den mittleren Wert  $Q$  der „normalen Ladung“, um welche die Ladung hin und her oscillirt, aus drei aufeinander folgenden Ladungsextremen  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$ , durch die Gleichung

$$(12) \quad Q_n = \frac{M_{n-1} M_{n+1} - M_n^2}{M_{n-1} + M_{n+1} - 2 M_n} = M_{n-1} - \frac{(M_{n-1} - M_n)^2}{(M_{n-1} - M_n) + (M_{n+1} - M_n)}.$$

Der Veränderung von  $Q$ , wie sie diese Reihe zeigt, ist die Veränderung von  $C$  proportional. Somit wird eine Schätzung von  $h$  möglich mittels der Formel

$$(13) \quad h = \frac{C'' - C'}{t'' - t'} \quad \text{oder} \quad \frac{h}{C_m} = \frac{C'' - C'}{C_m(t'' - t')} = \frac{Q'' - Q'}{Q_m(t'' - t')},$$

wo  $C'$   $C''$ ,  $Q'$   $Q''$  die Werte von  $C$  und  $Q$  am Anfange und am Ende des betrachteten Zeitintervalles,  $C_m$ ,  $Q_m$  dagegen die mittleren Werte sind. Folglich ist auch das Decrement wegen des Einflusses von  $h$  corrigirbar.

5. Es soll hier die Decrementberechnung in extenso für eine Curve gegeben werden, deren Daten sind:

$$C = 1,0119 \text{ Mikrof.},$$

$$L = 0,5933 \text{ Henry},$$

$$W = 3,191 \text{ Ohm.}$$

Der Condensator war ein vorzüglicher Glimmercondensator, welcher im Laboratorium als Normalinstrument benutzt wurde. Die Ladungsextreme der Curve sind in Scalenteilen angegeben:



## Tabelle I.

Die beobachteten  $Q$  sind überhaupt mit der Zeit wachsend. Der zweite, dritte und vierte Wert sind wegen des fehlerhaften zweiten Maximums stark abweichend und wurden bei der Interpolation nicht benutzt.

6. Für die Berechnung des Dämpfungsverhältnisses sind drei Ladungsextreme unzureichend. Denn bezeichnet man die Ladungen in den Punkten  $E, F, G$  (vgl. nachstehende Figur), in welchen die Curve für die normale Ladung die Schwingungscurve schneidet, mit  $Q_1, Q_2, Q_3$ , die nach (12) berechnete normale Ladung in  $H$  mit  $Q$ , so erhält man aus



Statt von  $\alpha$  oder  $k$  bedient man sich für die logarithmische Rechnung am bequemsten des Decrementes

$$\gamma = \log \text{vulg } k = \alpha \log \text{vulg } e = M\alpha = 0,43429 \alpha.$$

Um das „augenblickliche“ Decrement ( $\gamma$  beobachtet in der Tab. II)

$$(16) \quad \gamma_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{M_{n-1} - M_n}{M_{n+1} - M_{n+2}}$$

auf das „definitive“ Decrement zu reduciren, womit der Grenzwert von  $\gamma$  für  $h = 0$  und  $C_m$  gleich der vollen Capacität  $C$ , d. h. die Grösse

$$(17) \quad M \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C}{L}}$$

verstanden ist, sind zwei Reductionen erforderlich, nämlich:

1. Für das Ansteigen der Capacität die Reduction

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 \gamma &= -M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = -M \frac{h}{2} \frac{T}{C_m} \\ &= -M \frac{T}{2 C_m} \frac{C_{n+1} - C_n}{\frac{1}{2} T} = -M \frac{Q_{n+1} - Q_n}{\frac{1}{2} (Q_n + Q_{n+1})}, \end{aligned} \right.$$

wobei  $h$  nach der Formel (13) derjenigen Halboszillation entnommen ist, für deren Mitte der Wert von  $\gamma$  gilt.  $Q_n$  und  $Q_{n+1}$  sind zwei successive Werte aus der Columnne „ $Q$  verbessert“ in der Tab. I.

2. Auf die volle Capacität 1,0119 Mikrof. und die entsprechende normale Ladung 231,98, welche die „definitive Ladung“ des Condensators ist, die Reduction

$$(19) \quad \Delta_2 \gamma = \frac{\pi}{4} W M \sqrt{\frac{C_m}{L} \frac{C - C_m}{C_m}} = \frac{1}{2} \gamma \frac{\Delta C}{C_m} = \frac{1}{2} \gamma \frac{\Delta Q}{\frac{1}{2} (Q_n + Q_{n+1})},$$

wobei  $\Delta Q = 231,98 - \frac{1}{2} (Q_n + Q_{n+1})$  ist; den Wert von  $\gamma$  in der Formel (19) genügt es, angenähert anzusetzen.

Die Tab. II enthält die für  $\gamma$  berechneten Werte und braucht wohl keiner näheren Erklärung.

gross und zu klein, aber diese Variation beträgt in unserem Falle nur etwa 3 Einheiten der letzten Decimale und wird somit gänzlich durch die Beobachtungsfehler gedeckt.





Am bequemsten führt man die Rechnung in einer compendiösen, in der Tab. III veranschaulichten Weise aus. Die  $\log \pm (M_n - M_{n-1})$  werden so aufgeschrieben: der letzte unter den ersten, der vorletzte unter den zweiten etc., und die Differenzen werden gebildet. Von zwei successiven Differenzen nimmt man das Mittel, an welches die entsprechende Summe der Reductionen  $\Delta_1 \gamma + \Delta_2 \gamma$  anzubringen ist, nämlich an das erste Mittel die Summe sämtlicher Reductionen, an das zweite die Summe aller Reductionen mit Ausnahme der ersten und der letzten etc. Die so erhaltenen Zahlen sind identisch mit den oben erwähnten Summen der  $\gamma$ -Werte und enthalten das reducirte Decrement 18, 16, 14 . . . 4, 2 mal.

Tabelle III.

|                   | $\log \pm (M_n - M_{n-1})$ | Differenz | Mittel    | Reduction<br>$= \Sigma (\Delta_1 \gamma + \Delta_2 \gamma)$ | Multipl<br>von $\gamma$ | $\gamma$  |
|-------------------|----------------------------|-----------|-----------|---|-------------------------|-----------|
| $M_1 - M_0$       | 2,64579                    | 0,41371   | 0,39086   | - 697   | 0,38389 = 18 $\gamma$   | 0,02133   |
| $M_{19} - M_{20}$ | 2,23208                    |           |           |   |                         |           |
| $M_1 - M_2$       | 2,62262                    | 0,36802   | [0,34430] | - 612   | [0,33818] = 16 $\gamma$ | [0,02114] |
| $M_{19} - M_{18}$ | 2,25460                    |           |           |   |                         |           |
| $M_3 - M_2$       | [2,59795]                  | [0,32057] | [0,29820] | - 531   | [0,29289] = 14 $\gamma$ | [0,02092] |
| $M_{17} - M_{18}$ | 2,27738                    |           |           |   |                         |           |
| $M_3 - M_4$       | [2,57538]                  | [0,27583] | [0,25734] | - 451   | [0,25283] = 12 $\gamma$ | [0,02107] |
| $M_{17} - M_{16}$ | 2,29955                    |           |           |   |                         |           |
| $M_5 - M_4$       | 2,55800                    | 0,23885   | 0,21650   | - 377   | 0,21273 = 10 $\gamma$   | 0,02127   |
| $M_{15} - M_{16}$ | 2,31915                    |           |           |   |                         |           |
| $M_5 - M_6$       | 2,53499                    | 0,19415   | 0,17383   | - 304   | 0,17079 = 8 $\gamma$    | 0,02135   |
| $M_{15} - M_{14}$ | 2,34084                    |           |           |   |                         |           |
| $M_7 - M_6$       | 2,51461                    | 0,15351   | 0,13059   | - 229   | 0,12830 = 6 $\gamma$    | 0,02138   |
| $M_{13} - M_{14}$ | 2,36110                    |           |           |   |                         |           |
| $M_7 - M_8$       | 2,49247                    | 0,10767   | 0,08587   | - 154   | 0,08433 = 4 $\gamma$    | 0,02108   |
| $M_{13} - M_{12}$ | 2,38480                    |           |           |   |                         |           |
| $M_9 - M_8$       | 2,47108                    | 0,06408   | 0,04213   | - 77  | 0,04136 = 2 $\gamma$    | 0,02068   |
| $M_{11} - M_{12}$ | 2,40700                    |           |           |   |                         |           |
| $M_9 - M_{10}$    | 2,44868                    | 0,02017   |           |   |                         |           |
| $M_{11} - M_{10}$ | 2,42851                    |           |           |   |                         |           |



genau wie früher, was zu erwarten war. Von den beiden Rechnungsmethoden ist die erste vorzuziehen, da man keine Amplituden zu berechnen braucht und da das Schema nach Tab. III die Rechnung ausserordentlich erleichtert und beschleunigt.

#### Tabelle IV.

9. Um den zeitlichen Verlauf der Capacität zu ermitteln, wurden Ladungscurven ohne Inductionsspule aufgenommen. Diese Curven zeigen einerseits, dass die Capacität eines guten Glimmercondensators ihren vollen Wert erst nach etwa zwei Secunden erlangt, und andererseits, dass schon nach sehr kurzer Zeit der Unterschied der augenblicklichen Ladung von der maximalen nur wenige Zehntel Procent ist. Es ist daher sehr unwahrscheinlich, dass die normale Ladung z. B. bei







$$\begin{aligned}
k_p^2 &= \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p} \frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}}, \\
&= \frac{Q_{p-1} - M_{p-2}}{M_{p-1} - Q_{p-1}} \frac{M_{p+1} - Q_{p+2}}{Q_{p+2} - M_{p+2}}, \\
&= \frac{M_{p-2} - Q_{p-3}}{Q_{p-2} - M_{p-2}} \frac{Q_{p+2} - M_{p+3}}{M_{p+3} - Q_{p+3}}, \\
&\dots \dots \dots \\
&= \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+2} - M_{p-q+2}} \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-1}}, \\
&= \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}}.
\end{aligned}$$

Durch Multiplication sämtlicher Werte erfolgt:

$$20) \left\{ \begin{aligned} k_p^{2q} &= \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+2} - M_{p-q+2}} \dots \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p}, \\ &\frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}} \dots \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-1}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}}. \end{aligned} \right.$$

Mittels logarithmischer Differentiation berechnet man hieraus bis auf kleine Grössen höherer Ordnung genau denjenigen Fehler  $\Delta \alpha_p$ , der in  $\alpha_p$  entsteht, wenn man die Ladungen  $Q$  im zweiten, dritten . . . letzten Zähler zur Gleichheit mit  $Q$  im ersten, zweiten . . . vorletzten Nenner abändert, sowie  $Q_{p-q+1}$  im ersten Zähler und  $Q_{p+q}$  im letzten Nenner mit  $Q_{p+1/2}$  ersetzt. Man erhält:

$$(21) \quad 2q \Delta \alpha_p = \pm \left\{ \frac{1 + k^{2q-1}}{1 + k} \frac{k}{A_{p-q}} + (q - \frac{1}{2}) \frac{A_{p-q} + A_{p+q}}{A_{p-q} A_{p+q}} \right\} g, \\
q = 1, 2, 3 \dots,$$

wo  $A$  die Amplituden sind,  $g$  die Zunahme von  $Q$  während einer Halboszillation bedeutet, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem  $p - q$  und  $p + q$  die Indices zweier Minima (beide gerade) oder die Indices zweier Maxima (beide ungerade) sind.

Wendet man jetzt die Formel (21) zur Fehlerschätzung bei der Formel (15) an, so erhält man z. B. für die drei ersten nach der Tab. V corrigirten Extreme  $M_0 (= 0)$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ , wobei also  $p = q = 1$  ist,

$$\Delta \alpha_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{A_0} + \frac{1}{2} \frac{A_0 + A_2}{A_0 A_2} \right) g = \frac{(1 + k)^2}{4 A_0} g_{12},$$









$L$  und  $C$  bekannt sind, die Grösse  $1/R + 1/r$  oder ihr reziproker Wert

$$(24) \quad w = \frac{Rr}{R+r}$$

berechnen. Man erhält hierbei, wenn man sich auf die ohne Oscillation der Capacität berechneten Werte des Decrementes beschränkt, folgende Zusammenstellung:

| Serie | $w$ in Ohm |
|-------|------------|
| Ia    | 28090      |
| Ib    | 27290      |
| Ic    | 27700      |
| Id    | 27380      |

Diese Werte zeigen, dass  $w$  innerhalb der Fehlergrenzen constant bleibt, denn ihr Mittel beträgt

$$w = 27\,620 \pm 120$$

und der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung  $240 = 0,9$  Proc., während das Mittel der wahrscheinlichen Fehler der Coefficienten  $a$  (p 92) gleich 1,1 Proc. ist.

Sämtliche Serien gehören derselben Combination von Windungsgruppen an der Inductionsspule und somit demselben Werte des Selbstinductionscoefficienten an. Es verbleibt also  $r$  derselbe in allen Serien. Dagegen variiert  $R$  von Serie zu Serie, weil die Capacität eine andere ist. Da  $w$  jedoch constant bleibt, so muss  $R$  überhaupt so gross sein, dass  $w$  von  $R$  unabhängig ist, und

$$(25) \quad w = r$$

zu nehmen ist. Dies stimmt auch mit der Erfahrung, dass der Isolationswiderstand eines guten Glimmercondensators noch in Megohm zu zählen ist.

Mit der Combination von Windungsgruppen an der Inductionsspule zeigte sich  $w$  als wesentlich veränderlich.<sup>1)</sup>

*In der experimentellen Bestimmung des Coefficienten  $a$  der Formel (22) besitzt man nach dem oben Gefundenen ein Mittel zur Messung des Isolationswiderstandes einer Inductionsspule.*

---

1) Hj. Tallqvist, Untersuchungen über elektrische Schwingungen I. p. 96.







| Nr. der Curven |             | Capacitäts-<br>differenz bei<br>Schwingungen | Capacitäts-<br>differenz bei<br>directer Ladung | Differenz |
|----------------|-------------|--|---|-----------|
| Serie Ia       | Curve Nr. 1 | 0,58   | 0,49  | + 0,09    |
|                | „ „ 2       | 0,64   | 0,49  | + 0,15    |
|                | „ „ 3       | 0,34   | 0,49  | – 0,15    |
| Serie Ib       | „ „ 1       | 0,10   | 0,47  | – 0,37    |
|                | „ „ 2       | 0,61   | 0,47  | + 0,14    |
|                | „ „ 3       | 0,33   | 0,47  | – 0,14    |
|                | „ „ 4       | 0,45   | 0,47  | – 0,02    |
|                | „ „ 5       | 0,41   | 0,47  | – 0,06    |
| Serie Ic       | „ „ 1       | 1,06   | 0,45  | + 0,61    |
|                | „ „ 2       | 0,43   | 0,45  | – 0,02    |
|                | „ „ 3       | 0,34   | 0,45  | – 0,11    |
| Serie Id       | „ „ 1       | 0,66   | 0,42  | + 0,24    |
|                | „ „ 2       | 0,58   | 0,42  | + 0,16    |
|                | „ „ 3       | 0,35   | 0,42  | – 0,07    |
|                | „ „ 4       | 0,63   | 0,42  | + 0,21    |
|                | „ „ 5       | 0,32   | 0,42  | – 0,10    |
|                | „ „ 6       | 0,29   | 0,42  | – 0,13    |
|                | „ „ 7       | 0,35   | 0,42  | – 0,07    |
| Curve (A)      |             | 0,64   | 0,57  | + 0,07    |
| „ (B)          |             | 0,63   | 0,38  | + 0,25    |
| „ (C)          |             | 0,98   | 0,74  | + 0,24    |
| „ (D)          |             | 0,32   | 0,59  | – 0,27    |
| „ (E)          |             | 0,68   | 0,54  | + 0,14    |
| „ (F)          |             | 0,42   | 0,53  | – 0,11    |
| Mittel:        |             | 0,51   | 0,48  | + 0,03    |

17. Weil die experimentell gefundenen Werte der Coefficienten  $b$  mit den theoretischen Werten stimmen, kann man sie für die Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten und Capacitäten verwenden. In dem gegebenen Stromkreise mit unveränderter Capacität und Selbstinduction, aber wenigstens zwei verschiedenen Widerständen werden elektrische Oscillationen hervorgerufen, die Oscillationszeit  $T$  und der Coefficient  $b$  bestimmt. Alsdann kann man  $C$  und  $L$  berechnen. Die Bestimmung dieser beiden Grössen wird folglich auf Zeit- und Widerstandsmessungen allein zurückgeführt. Für die Berechnung von  $C$  und  $L$  hat man die aus den Formeln

$$T = 2 \pi \sqrt{L C}$$

und

$$b = M \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

folgenden Ausdrücke

$$(27) \quad C = \frac{1}{M \pi^2} T b = 0,23330 T b,$$

$$(28) \quad L = \frac{M}{4} \frac{T}{b} = 0,10857 \frac{T}{b},$$

wobei für  $T$  die auf definitive Capacität corrigirten Werte zu gebrauchen sind. Diese Correction ist sonst sehr klein; für die unten gegebenen Schwingungszeiten

$$\Delta T = T \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} = \text{etwa } 0,0022 T.$$

Für die Serien Ib, Ic und Id hat man folgende Zusammenstellung:

| Serie:  | Ib        | Ic        | Id        |
|---|-----------|-----------|-----------|
| Oscillationszeit $T$ in Millisecunden:        | 4,840     | 5,920     | 6,867     |
| Coefficient „ $b$ beob.“ in $10^{-9}$ sec/cm: | 0,0008815 | 0,0010967 | 0,0012588 |

und berechnet mittels der Formeln (27) und (28)

|                                       |        |        |        |
|---------------------------------------|--------|--------|--------|
| Capacität in Mikrofarad:              | 0,995  | 1,515  | 2,017  |
| Selbstinductionscoefficient in Henry: | 0,5961 | 0,5861 | 0,5928 |

welche Werte alle annehmbar sind. Das Mittel der Werte von  $L$  ist 0,5915, somit sehr gut.

(Eingegangen 27. October 1900.)



## 5. Ueber den Schmelzpunkt des Goldes; von L. Holborn und A. Day. ✓

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Im Anschluss an die Messung hoher Temperaturen mit dem Luftthermometer haben wir die Schmelzpunkte verschiedener Metalle zwischen 300 und 1100° bestimmt.<sup>1)</sup> Wir benutzten zwei Verfahren, die wir als die Tiegelmethode und die Drahtmethode bezeichneten. Der Schmelzpunkt des Goldes wurde damals nur nach dem letzteren Verfahren gemessen, indem wir einen etwa 1 cm langen Golddraht in die Lötstelle des Thermoelementes einschmolzen. Bei der Wichtigkeit, welche gerade dem Schmelzpunkt des Goldes für die Vergleichung der Temperaturscalen verschiedener Beobachter zukommt, erschien es uns angemessen, diesen Schmelzpunkt auch nach der Tiegelmethode zu bestimmen und gleichzeitig zu prüfen, ob die umgebende Atmosphäre die Schmelztemperatur beeinflusst.

Für den Versuch kamen stets etwa 450 g Gold zur Verwendung, das als reines Metall von der Frankfurter Gold- und Silberscheideanstalt bezogen war. Eine Probe von 2 g, nochmals im chemischen Laboratorium der Reichsanstalt analysirt, enthielt keine Verunreinigung.

Das Gold wurde in dem früher beschriebenen elektrischen Schmelzofen erhitzt und die Temperatur mit demselben Thermoelement gemessen, das vorher bei der Drahtmethode benutzt worden war.

Vorversuche, die anfangs mit einer kleineren Goldmenge (350 g) und einem dünnwandigen Schmelztiegel aus Porzellan angestellt wurden, ergaben infolge der geringen Schmelzwärme des Metalles keinen guten Verlauf der Zeitcurven und namentlich Abweichungen zwischen Erstarrungspunkt und Schmelzpunkt bis zu 4°. Erst als wir 450 g Gold nahmen und den dünnwandigen Porzellantiegel in einen mit Asbest ausgefütterten weiteren Tiegel einsetzten, um das Gold der directen Ein-

---

1) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 523. 1900.

wirkung der Heizspule mehr zu entziehen, erhielten wir bessere Resultate. Bei dem Gebrauch von Graphittiegeln, deren Wandung 5 mm dick war, waren die Schwierigkeiten überhaupt geringer, sodass wir später solche ausgebrannte Tiegel, deren Wandung nur noch Thon enthielt, da benutzten, wo es uns auf die reducirende Wirkung des Graphits nicht ankam.

Das schmelzende Gold befand sich entweder in der reducirenden Atmosphäre eines Graphittiegels, wobei in einigen Fällen noch Kohlensäure durch ein dünnes Porzellanröhrchen (1 mm weit und 0,5 mm Wandstärke) in das Metall eingeleitet wurde, oder es kam ein doppelter Porzellantiegel oder ein Thontiegel (ausgebrannter Graphittiegel) zur Anwendung, in denen das Metall einmal unter Luftzutritt, das andere Mal unter Einleiten von Sauerstoff zum Erstarren oder Schmelzen gebracht wurde.

Tab. I enthält die Temperatur *t* (in Mikrovolt und Grad), die für den Erstarrungspunkt *E* und den Schmelzpunkt *S* beobachtet wurde. *i* bedeutet die Stromstärke der Heizspule.

Tabelle I.

| Tag  | <i>i</i><br>(Amp.) |          | <i>t</i> |         | Mittel   |
|--|--------------------|----------|----------|---------|----------|
|  |                    |          | MV       | Grad    |          |
| Im Graphittiegel.                                      |                    |          |          |         |          |
| 21. Juni   | 8,0                | <i>E</i> | 10194    | 1063,3° | 1063,5 ° |
|  | 9,2                | <i>S</i> | 10197    | 1063,6  |          |
|  | 7,5                | <i>E</i> | 10194    | 1063,3  |          |
|  | 8,8                | <i>S</i> | 10197    | 1063,6  |          |
| 9. Juli  | 6,8                | <i>E</i> | 10197    | 1063,6  |          |
|  | 8,3                | <i>S</i> | 10196    | 1063,5  |          |
|  | 6,8                | <i>E</i> | 10197    | 1063,6  |          |
|  | 8,2                | <i>S</i> | 10195    | 1063,4  |          |
| Im Graphittiegel unter Einleiten von CO <sub>2</sub> . |                    |          |          |         |          |
| 11. Juli   | 7,2                | <i>E</i> | 10198    | 1063,6° | 1063,5 ° |
|  | 8,5                | <i>S</i> | 10198    | 1063,6  |          |
|  | 7,0                | <i>E</i> | 10196    | 1063,5  |          |
|  | 8,2                | <i>S</i> | 10199    | 1063,7  |          |
|  | 6,8                | <i>E</i> | 10194    | 1063,3  |          |
|  | 7,9                | <i>S</i> | 10196    | 1063,5  |          |

Tabelle I (Fortsetzung).

| Tag | <i>i</i><br>(Amp.) | <i>t</i> |    |      | Mittel |
|-----|--------------------|----------|----|------|--------|
|     |                    |          | MV | Grad |        |

## Im doppelten Porzellantiegel.

|          |   |     |          |       |         |   |         |
|----------|---|-----|----------|-------|---------|---|---------|
| 27. Juni | { | 8,0 | <i>E</i> | 10190 | 1063,0° | } | 1063,3° |
|          |   | 9,0 | <i>S</i> | 10198 | 1063,6  |   |         |
|          |   | 7,5 | <i>E</i> | 10188 | 1062,8  |   |         |
|          |   | 9,5 | <i>S</i> | 10197 | 1063,6  |   |         |

## Im doppelten Porzellantiegel (oder Thontiegel) unter Einleiten von O.

|          |   |     |          |       |         |   |         |
|----------|---|-----|----------|-------|---------|---|---------|
| 29. Juni | { | 7,3 | <i>E</i> | 10200 | 1063,8° | } | 1063,5° |
|          |   | 8,7 | <i>S</i> | 10199 | 1063,7  |   |         |
|          |   | 7,0 | <i>E</i> | 10192 | 1063,1  |   |         |
|          |   | 8,5 | <i>S</i> | 10199 | 1063,7  |   |         |
| 12. Juli | { | 6,7 | <i>E</i> | 10189 | 1062,9  |   |         |
|          |   | 7,8 | <i>S</i> | 10195 | 1063,4  |   |         |
|          |   | 6,5 | <i>E</i> | 10193 | 1063,2  |   |         |
| 13. Juli | { | 6,2 | <i>E</i> | 10198 | 1063,6  |   |         |
|          |   | 7,5 | <i>S</i> | 10203 | 1064,1  |   |         |

Die verschiedenen Werte von *t* zeigen keine systematischen Unterschiede, als Gesamtmittel ergibt sich 1063,5°.

Der Verlauf der Zeitcurven, von denen einige Beispiele in Tab. II enthalten sind, stimmt in den verschiedenen Fällen nicht so gut überein. Namentlich fallen diejenigen auf, die bei dem Einleiten von Sauerstoff erhalten werden. Einerseits stellt sich der stationäre Zustand hier nicht so scharf her wie sonst, andererseits pflegt die Temperatur bei dem Schmelzen des Metalles vielfach über den Schmelzpunkt glatt hinüber zu steigen und später erst wieder darauf zurückzukommen. Dass die Ursache hierfür nicht in dem Rühren liegt, welches das Einleiten der Gasblasen bewirkt, zeigen die Fälle, wo Kohlensäure in das Gold eingeleitet wurde. Ueberhaupt verlaufen die Zeitcurven bei dem Einleiten von Sauerstoff und selbst bei dem Zutritt der gewöhnlichen Atmosphäre vielfach unregelmässig.

Tabelle II.  
Zeitcurven (MV).

| Minuten | Gold<br>im Graphittiegel |          | Gold<br>im Graphittiegel<br>unter Einleiten<br>von CO <sub>2</sub> |          | Gold<br>unter Einleiten<br>von O |          | Kupfer<br>in Luft |
|---------|--------------------------|----------|--|----------|----------------------------------|----------|-------------------|
|         | <i>E</i>                 | <i>S</i> | <i>E</i>   | <i>S</i> | <i>E</i>                         | <i>S</i> | <i>E</i>          |
| 1       | 10331                    | 10084    | 10402  | 10117    | 10366                            | 10027    | 10590             |
| 2       | 10261                    | 10150    | 10346  | 10166    | 10276                            | 10074    | 10470             |
| 3       | 10209                    | 10190    | 10298  | 10192    | 10223                            | 10101    | 10352             |
| 4       | 10207                    | 10194    | 10246  | 10195    | 10205                            | 10144    | 10281             |
| 5       | 10203                    | 10195    | 10200  | 10197    | 10201                            | 10170    | 10217             |
| 6       | 10200                    | 10195    | 10199  | 10194    | 10199                            | 10198    | 10204             |
| 7       | 10199                    | 10195    | 10199  | 10194    | 10199                            | 10254    | 10212             |
| 8       | 10198                    | 10195    | 10199  | 10194    | 10198                            | 10238    | 10212             |
| 9       | 10197                    | 10197    | 10198  | 10194    | 10196                            | 10222    | 10212             |
| 10      | 10197                    | 10199    | 10198  | 10196    | 10193                            | 10205    | 10212             |
| 11      | 10197                    | 10203    | 10198  | 10196    | 10194                            | 10202    | 10212             |
| 12      | 10196                    | 10212    | 10198  | 10197    | 10193                            | 10201    | 10212             |
| 13      | 10196                    | 10222    | 10198  | 10198    | 10194                            | 10202    | 10212             |
| 14      | 10195                    | 10231    | 10198  | 10199    | 10192                            | 10203    | 10212             |
| 15      | 10194                    | 10240    | 10197  | 10200    | 10191                            | 10203    | 10212             |
| 16      | 10192                    | 10248    | 10198  | 10201    | 10189                            | 10203    | 10212             |
| 17      | 10188                    | 10257    | 10197  | 10202    | 10186                            | 10208    | 10211             |
| 18      | 10178                    | 10272    | 10197  | 10205    | 10184                            | 10216    | 10210             |
| 19      | 10070                    | 10400    | 10197  | 10206    | 10184                            | 10212    | 10208             |
| 20      | 9995                     | —        | 10196  | 10205    | 10183                            | 10222    | 10204             |
| 21      | —                        | —        | 10196  | 10209    | 10174                            | 10230    | 10195             |
| 22      | —                        | —        | 10195  | 10204    | 10159                            | 11360    | 10176             |
| 23      | —                        | —        | 10195  | 10202    | 10065                            | —        | 10027             |
| 24      | —                        | —        | 10194  | 10214    | —                                | —        | —                 |
| 25      | —                        | —        | 10192  | 10296    | —                                | —        | —                 |
| 26      | —                        | —        | 10190  | 10400    | —                                | —        | —                 |
| 27      | —                        | —        | 10186  | —        | —                                | —        | —                 |
| 28      | —                        | —        | 10177  | —        | —                                | —        | —                 |
| 29      | —                        | —        | 10083  | —        | —                                | —        | —                 |

Hiernach lässt sich vermuten, dass das schmelzende **Metall** in diesen Fällen Sauerstoff aufnimmt. Der Einfluss dieser Erscheinung auf den Schmelzpunkt kann jedoch nur **gering** sein und übersteigt nicht die sonstigen Beobachtungsfehler.

Von demselben Gold, das für die Schmelzungen im Tiegel gedient hat, wurden einige Gramm zu einem Draht von 0,25 mm Durchmesser ausgezogen, den wir dann als Schmelzprobe für die Drahtmethode benutzten, deren Brauchbarkeit für das Gold natürlich besonders erwünscht ist. Es kam hierbei dasselbe Thermoelement zur Verwendung. Die beiden Drähte, die durch einen kurzen Golddraht verbunden waren, ragten möglichst spannungsfrei in den Schmelzofen, in dem sich ein leerer Porzellantiegel befand.

Fünf Versuche ergaben folgende Werte für die Schmelztemperatur:

|               |   |           |         |
|---------------|---|-----------|---------|
| 26. September | { | 10 206 MV | 1064,3° |
|               |   | 10 197    | 1063,6  |
|               |   | 10 203    | 1064,1  |
|               |   | 10 199    | 1063,7  |
|               |   | 10 198    | 1063,6  |

Der Mittelwert 1063,9° weicht nur um 0,4° von dem Resultate der Tiegelmethode ab und um 0,1° von dem früheren Ergebnis der Drahtmethode, für die wir andere Goldproben benutzten.

Bei der Aichung von Thermoelementen kann man sich also ohne Bedenken der Drahtmethode für die Bestimmung des Goldschmelzpunktes bedienen. Man braucht in diesem Falle für einen Versuch nur etwa 0,03 g Gold.

Zieht man aber aus irgend einem Grunde die Tiegelmethode vor, so kann man auch dann für die Aichung den naheliegenden Schmelzpunkt des Kupfers unter Luftzutritt benutzen, der von uns zu 1064,9° bestimmt worden ist. Dieser Punkt ist, abgesehen von den geringeren Kosten, wegen der grösseren Schmelzwärme des Kupfers bequemer. Tab. II enthält zum Vergleich mit dem Gold eine Zeitcurve, die am 1. October mit 370 g Kupfer (im dünnwandigen Porzellantiegel) beobachtet wurde. Die Stärke  $i$  des Heizstromes betrug 5,2 Amp., war also geringer gewählt als in irgend einem Falle bei der Erstarrung des Goldes.

(Eingegangen 7. November 1900.)



gefälle, von dem ausserdem nicht nur der Mittelwert, sondern auch der ganze Verlauf gemessen wird.

*Längenmessung.* — Die Ausdehnung wird mit dem Ocularmikrometer feststehender Mikroskope gemessen, die auf Teilstriche an den Enden des Stabes gerichtet sind. Die ganze Aufstellung war auf einem grossen Steinpfeiler so dauerhaft eingerichtet, dass wir nach Tagen noch keine Verschiebungen beobachten konnten, welche die Grenze der Beobachtungsfehler überschritten.

Den Unterschieden, welche die Messungen der verschiedenen Stäbe im kalten Zustande zwischen den einzelnen Heizungen aufweisen, entsprechen deshalb dauernde Längenänderungen der Stäbe. Vielfach ist dies auch dadurch bestätigt worden, dass die Länge eines Stabes vor und nach dem Heizen auf der Teilmaschine gemessen wurde.

Weil jedoch trotzdem eine zufällige kleine Aenderung der Aufstellung nicht überall ausgeschlossen ist, so wurde die Ausdehnung auf den kalten Zustand vor der Heizung bezogen, der immer an demselben Tage kurz vor Beginn der Erwärmung gemessen wurde, während die Bestimmung am Schluss der Reihe erst am folgenden Tage nach der vollständigen Abkühlung des Ofens erfolgen konnte. Wir teilen die meistens nur geringen Unterschiede zwischen den beiden Messungen mit.

Selbstverständlich ist hierbei von den Aenderungen abzu-  
sehen, die bei der ersten Heizung eines Stabes auftraten und die oft einen viel grösseren Betrag erreichen, d. h. wir gehen stets von dem ausgeglühten Zustande aus, der sich durch eine einmalige Erhitzung auf die höchste der später angewandten Temperaturen herstellte.

Erwähnt sei noch, dass der Schraubenwert der Mikroskope sich unmittelbar aus den Ablesungen bei Zimmertemperatur ergab, da die Intervalle der Teilstriche vorher auf der Teilmaschine gemessen waren. Die sonstigen Einzelheiten der Längenmessung gehen ohne weiteres aus dem unten angeführten Beispiel einer Beobachtungsreihe hervor.

*Temperaturmessung.* — Bei den Ausdehnungsbestimmungen wurde die Temperatur nur in der Mitte des Stabes gemessen, und zwar mit einem Thermoelement, dessen blanke Lötstelle auf dem Stabe auflag. Das Temperaturgefälle nach den Enden





Tabelle 1.  
Temperaturgefälle im Heizrohr (MV).

| Von der<br>Mitte<br>entfernt | Platin      |       |       |       |              |       |       |       |
|------------------------------|-------------|-------|-------|-------|--------------|-------|-------|-------|
|                              | I. Heizrohr |       |       |       | II. Heizrohr |       |       |       |
|                              | 250°        | 500°  | 750°  | 1000° | 250°         | 500°  | 750°  | 1000° |
| 6 cm Ost                     | − 22        | − 10  | + 17  | 0     | + 10         | + 35  | + 46  | + 77  |
| 12 „                         | − 33        | − 23  | + 27  | + 25  | + 56         | + 125 | + 183 | + 227 |
| 19 „                         | − 170       | − 230 | − 250 | − 443 | + 79         | + 157 | + 189 | + 171 |
| 23 „                         | − 282       | − 310 | − 610 | − 900 | − 79         | − 196 | − 248 | − 411 |
| 6 West                       | + 57        | + 170 | + 230 | + 335 | − 5          | + 9   | + 49  | + 99  |
| 12 „                         | + 73        | + 220 | + 315 | + 540 | + 38         | + 135 | + 238 | + 342 |
| 19 „                         | − 62        | − 5   | 0     | + 53  | + 89         | + 227 | + 345 | + 398 |
| 23 „                         | − 210       | − 250 | − 880 | − 480 | − 12         | + 42  | − 9   | − 143 |
| Δ                            | − 44        | − 11  | + 4   | + 51  | + 25         | + 64  | + 116 | + 135 |

| Von der<br>Mitte<br>entfernt | II. Heizrohr |       |       |       |        |       |       |       |
|------------------------------|--------------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
|                              | Palladium    |       |       |       | Silber |       |       |       |
|                              | 250°         | 500°  | 750°  | 1000° | 250°   | 500°  | 750°  | 875°  |
| 6 cm Ost                     | + 13         | + 29  | + 55  | + 80  | + 3    | + 21  | + 35  | + 19  |
| 12 „                         | + 59         | + 128 | + 180 | + 236 | + 47   | + 107 | + 150 | + 142 |
| 19 „                         | + 80         | + 155 | + 188 | + 164 | + 78   | + 140 | + 163 | + 125 |
| 23 „                         | − 100        | − 165 | − 210 | − 402 | − 84   | − 174 | − 220 | − 344 |
| 6 West                       | − 1          | + 12  | + 53  | + 94  | + 1    | + 15  | + 52  | + 20  |
| 12 „                         | + 52         | + 148 | + 269 | + 356 | + 23   | + 82  | + 153 | + 177 |
| 19 „                         | + 95         | + 233 | + 358 | + 399 | + 48   | + 133 | + 217 | + 223 |
| 23 „                         | + 12         | + 34  | − 3   | − 129 | + 3    | + 48  | − 29  | + 11  |
| Δ                            | + 31         | + 77  | + 124 | + 135 | + 16   | + 49  | + 80  | + 62  |

| Von der<br>Mitte<br>entfernt | Nickel im II. Heizrohr |       |       |       |       |       |
|------------------------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                              | 250°                   | 375°  | 500°  | 750°  | 750°  | 1000° |
|                              |                        |       |       |       |       |       |
| 6 cm Ost                     | + 16                   | + 22  | + 27  | + 59  | + 57  | + 82  |
| 12 „                         | + 64                   | + 91  | + 124 | + 196 | + 191 | + 258 |
| 19 „                         | + 89                   | + 117 | + 147 | + 194 | + 168 | + 196 |
| 23 „                         | − 87                   | − 111 | − 150 | − 205 | − 226 | − 337 |
| 6 West                       | + 4                    | + 15  | + 26  | + 64  | + 75  | + 120 |
| 12 „                         | + 55                   | + 110 | + 163 | + 303 | + 333 | + 458 |
| 19 „                         | + 99                   | + 177 | + 248 | + 405 | + 445 | + 509 |
| 23 „                         | + 13                   | + 20  | + 21  | − 29  | − 26  | − 221 |
| Δ                            | + 38                   | + 74  | + 109 |       | + 152 | + 185 |



Beobachtungen des Platinstabes am 10. Juni.

|      |       |       |       |       |        |       |       |      |        |       |       |
|------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|------|--------|-------|-------|
| t    | 6,238 | 20,3° | 6,329 | 6,329 | 1814MV | 1812  | 1830  | t    | 4131MV | 4134  | 4151  |
| I    | ↓     | ↑     | ↓     | ↑     | ↓      | ↓     | ↑     | I    | ↓      | ↓     | ↑     |
| II   | 6,950 | 6,927 | 6,956 | 6,829 | 5,743  | 5,746 | 5,740 | II   | 4,489  | 4,487 | 4,480 |
| III  | 7,846 | 7,851 | 7,837 | 7,848 | 6,369  | 6,374 | 6,370 | III  | 5,112  | 5,113 | 5,114 |
| F    | 8,527 | 8,530 | 8,523 | 8,529 | 7,259  | 7,250 | 7,257 | IV   | 6,000  | 6,001 | 6,000 |
| IV   | 8,787 | 8,787 | 8,781 | 8,790 | 8,199  | 8,199 | 8,191 | V    | 6,941  | 6,937 | 6,938 |
| V    | 9,634 | 9,642 | 9,638 | 9,648 | 8,538  | 8,529 | 8,529 | F    | 7,798  | 7,798 | 7,801 |
|      |       |       |       |       | 9,053  | 9,049 | 9,054 |      | 8,531  | 8,537 | 8,532 |
| I'   | 0,725 | 0,728 | 0,720 | 0,723 | 1,070  | 1,061 | 1,068 | I'   | 0,865  | 0,862 | 0,859 |
| II'  | 1,683 | 1,682 | 1,680 | 1,684 | 2,029  | 2,029 | 2,028 | II'  | 1,831  | 1,827 | 1,830 |
| III' | 2,638 | 2,636 | 2,632 | 2,632 | 2,991  | 2,991 | 2,990 | III' | 2,783  | 2,779 | 2,788 |
| F'   | 3,000 | 2,993 | 2,991 | 2,999 | 2,991  | 2,991 | 2,990 | F'   | 2,995  | 2,998 | 2,999 |
| IV'  | 3,586 | 3,583 | 3,581 | 3,588 | 3,941  | 3,943 | 3,939 | IV'  | 3,749  | 3,746 | 3,744 |
| V'   | 4,247 | 4,242 | 4,230 | 4,240 | 4,596  | 4,595 | 4,596 | V'   | 4,403  | 4,398 | 4,402 |
| t    |       |       |       | 20,3° | 1814MV | 1825  |       | t    | 4132MV | 4144  |       |

|      |        |       |       |       |        |       |       |      |        |        |        |
|------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|------|--------|--------|--------|
| t    | 6600MV | 6605  | 6625  | 6605  | 9412MV | 9423  | 9436  | t    | 19,3°  | 6,768  | 6,770  |
| I    | ↓      | ↓     | ↓     | ↓     | ↓      | ↓     | ↓     | I    | ↓      | ↓      | ↓      |
| II   | 3,211  | 3,184 | 3,162 | 3,187 | 1,618  | 1,581 | 1,561 | II   | 6,762  | 6,768  | 6,770  |
| III  | 3,840  | 3,821 | 3,791 | 3,811 | 2,241  | 2,207 | 2,196 | III  | 7,393  | 7,389  | 7,392  |
| IV   | 4,728  | 4,710 | 4,687 | 4,699 | 3,139  | 3,100 | 3,092 | F    | 8,263  | 8,275  | 8,281  |
| V    | 5,666  | 5,653 | 5,629 | 5,642 | 4,070  | 4,043 | 4,036 | IV   | 8,531  | 8,538  | 8,537  |
| F    | 6,529  | 6,511 | 6,491 | 6,499 | 4,931  | 4,917 | 4,901 | V    | 9,210  | 9,212  | 9,218  |
|      | 8,531  | 8,531 | 8,527 | 8,529 | 8,530  | 8,535 | 8,532 |      | 10,059 | 10,071 | 10,078 |
| I'   | 0,685  | 0,675 | 0,639 | 0,645 | 0,298  | 0,275 | 0,256 | I'   | 1,190  | 1,181  | 1,182  |
| II'  | 1,647  | 1,637 | 1,607 | 1,613 | 1,262  | 1,222 | 1,211 | II'  | 2,133  | 2,148  | 2,149  |
| III' | 2,607  | 2,590 | 2,572 | 2,576 | 2,219  | 2,191 | 2,181 | F'   | 2,997  | 2,989  | 2,998  |
| F'   | 2,991  | 2,999 | 3,000 | 2,991 | 2,989  | 2,990 | 2,996 | III' | 3,107  | 3,107  | 3,105  |
| IV'  | 3,567  | 3,562 | 3,538 | 3,539 | 3,192  | 3,150 | 3,141 | IV'  | 4,048  | 4,051  | 4,044  |
| V'   | 4,225  | 4,220 | 4,195 | 4,198 | 3,855  | 3,819 | 3,816 | V'   | 4,703  | 4,702  | 4,712  |
| t    | 6596MV |       |       | 6616  | 9432MV | 9428  |       | t    | 4,708  | 4,702  | 19,3°  |

Tabelle 10.  
Beobachtungen des Platinstabes am 16. Juni.

| $t$     | $t'$    | I'     | II'    | III'   | IV'    | V'     | Mittel $u'$ | Mittel $M'$<br>mm |
|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|-------------|-------------------|
| 20,8°   | 1818 MV | 0,352  | 0,355  | 0,360  | 0,362  | 0,358  | 0,357       | 0,375             |
| 20,8    | 1822    | 0,347  | 0,351  | 0,363  | 0,360  | 0,365  | 0,357       | 0,375             |
| 1818 MV | 4132    | -0,221 | -0,206 | -0,210 | -0,197 | -0,200 | -0,207      | -0,217            |
| 1822    | 4143    | -0,212 | -0,208 | -0,215 | -0,204 | -0,204 | -0,209      | -0,219            |
| 4132    | 6600    | -0,176 | -0,188 | -0,186 | -0,183 | -0,178 | -0,182      | -0,191            |
| 4143    | 6615    | -0,220 | -0,220 | -0,211 | -0,207 | -0,204 | -0,212      | -0,222            |
| 6600    | 9422    | -0,386 | -0,385 | -0,379 | -0,369 | -0,368 | -0,377      | -0,395            |
| 6615    | 9429    | -0,369 | -0,386 | -0,381 | -0,366 | -0,371 | -0,379      | -0,397            |
| 19,3°   | 20,8°   | 0,469  | 0,458  | 0,470  | 0,464  | 0,462  | 0,463       | 0,485             |
| 19,3    | 20,8    | 0,468  | 0,468  | 0,475  | 0,464  | 0,473  | 0,468       | 0,491             |

Schraubenumdrehungen ( $\alpha$  und  $\alpha'$ ) ausgedrückten Werte zu einem Mittel zusammengefasst und in Millimeter umgerechnet, deren Summen alsdann unter  $\Sigma$  aufgeführt sind.

Für die übrigen Beobachtungsreihen beschränken wir uns darauf, die Werte von  $M$ ,  $M'$  und  $\Sigma$  mitzuteilen. Tab. 1c enthält diese Werte für die Beobachtungen an dem Platinstabe, der während der ersten beiden Tage im ersten Heizrohr, später im zweiten lag. Je zwei zusammengehörige Werte von  $\Sigma$  stimmen befriedigend überein.

Tabelle 1c.  
Platinstab.

Die Werte  $\Sigma$  sind alsdann auf runde Temperaturgrenzen, 0 und 250° etc., umgerechnet, indem aus einer Näherungsformel für die Ausdehnung  $\lambda$ , des Stabes die hierzu not-



Benoît<sup>1)</sup> hat für die Ausdehnung von reinem Platin aus Beobachtungen, die er zwischen 0 und 75° nach der Fizeau'schen Methode anstellte, die Formel

$$\lambda = \{8901 t + 1,21 t^2\} 10^{-9}$$

abgeleitet. Extrapoliert man diese Gleichung, so tritt erst bei 1000° ein Unterschied von 1 Proc. gegen unseren beobachteten Mittelwert auf.

## 2. Palladium.

Für den Palladiumstab (5 mm dick) sind in Tab. 2a und 2b die Beobachtungen mitgeteilt, die alle mit dem zweiten Heizrohr angestellt wurden. Anfangs war der Stab im ersten

Tabelle 2 a.  
Palladiumstab.

Tabelle 2 b.  
Palladiumstab.

| t    | $\Sigma'$ (mm) |          | $\lambda_0$ (mm) |       |
|------|----------------|----------|------------------|-------|
|      | 26. Juni       | 28. Juni | beob.            | ber.  |
| 0°   |                |          | 0                | 0     |
| 250  | 1,476          | 1,470    | 1,478            | 1,475 |
| 500  | 1,611          | 1,616    | 3,087            | 3,082 |
| 750  | 1,729          | 1,739    | 4,821            | 4,821 |
| 1000 | 1,878          | 1,858    | 6,689            | 6,692 |

1) R. Benoît, Trav. et Mém. du Bureau international 6. p. 1. 1888.  
Annalen der Physik. IV. Folge. 4. 8

Heizrohr ausgeglüht. Hierbei sind zwischen 250, 500 und 750 für die Ausdehnung die Werte 1,617, 1,720 und 1,840 mm beobachtet. Nach der Abkühlung war eine Verlängerung 0,024 mm eingetreten, während die bleibenden Aenderungen nach den Beobachtungsreihen der Tabelle jedesmal um 0,01 mm blieben.

Für die Ausdehnung des Stabes ergibt sich:

$$\lambda_s = 5,636 t + 0,00106 t^2 (\mu),$$

und da die Länge 482,9 mm bei 0° betrug, so folgt:

$$\lambda = \{11670 t + 2,187 t^2\} 10^{-9}.$$

3. Platiniridium (80 Pt, 20 Ir).

Die Beobachtungen an dem Platiniridiumstabe, die in Tab. 3a und 3b enthalten sind, wurden alle mit dem er

Tabelle 3a.  
Platiniridiumstab.

|          | <i>t</i> | <i>M</i><br>(mm) | <i>M'</i><br>(mm) | $\Sigma$<br>(mm) |
|----------|----------|------------------|-------------------|------------------|
| 19. Jan. | 16,9°    |                  |                   |                  |
|          | 1810 MV  | 0,348            | 0,595             | 0,943            |
|          | 4193     | 0,850            | 0,318             | 1,168            |
|          | 6757     | 0,636            | 0,592             | 1,228            |
|          | 9514     | 0,969            | 0,322             | 1,291            |
|          | 9569     | 1,045            | 0,276             | 1,321            |
|          | 9560     | 1,043            | 0,273             | 1,316            |
|          |          |                  |                   |                  |
| 24. Jan. | 17,9°    |                  |                   |                  |
|          | 1862 MV  | 0,675            | 0,291             | 0,966            |
|          | 4181     | 0,654            | 0,462             | 1,116            |
|          | 6708     | 0,607            | 0,604             | 1,211            |
|          | 9528     | 1,163            | 0,189             | 1,352            |
|          |          |                  |                   |                  |
| 26. Jan. | 18,8°    |                  |                   |                  |
|          | 1843 MV  | 0,557            | 0,406             | 0,963            |
|          | 4170     | 0,664            | 0,456             | 1,120            |
|          | 6705     | 0,411            | 0,813             | 1,224            |
|          | 9527     | 1,786            | −0,450            | 1,336            |
|          | 9539     | 1,797            | −0,463            | 1,334            |
|          |          |                  |                   |                  |



Tabelle 3 b.  
Platiniridiumstab.

| <i>t</i> | $\Sigma'$ (mm)            |          |                  | $\lambda$ , (mm) |       |
|----------|---------------------------|----------|------------------|------------------|-------|
|          | 19. Jan.                  | 24. Jan. | 26. Jan.         | beob.            | ber.  |
| 0°       |                           |          |                  | 0                | 0     |
| 250      | 1,031                     | 1,033    | 1,034            | 1,033            | 1,033 |
| 500      | 1,130                     | 1,111    | 1,110            | 2,150            | 2,151 |
| 750      | 1,202                     | 1,204    | 1,213            | 3,357            | 3,355 |
| 1000     | { 1,277<br>1,280<br>1,280 | 1,308    | { 1,294<br>1,287 | 4,645            | 4,645 |

Heizrohr angestellt. Sie waren die ersten, bei denen noch nicht das oben beschriebene Schema überall innegehalten wurde. Nur bei 1000° ist mehr als ein Satz von Ablesungen gemacht. Der Stab, dessen Länge 483,1 mm bei 0° betrug, wurde nur im ausgeglühten Zustande beobachtet. Die berechneten Formeln lauten:

$$\lambda_s = 3,960 t + 0,000685 t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{8198 t + 1,418 t^2\} 10^{-9}.$$

#### 4. Silber.

Der Silberstab war 6 mm dick und besass an jedem Ende sieben Teilstriche, die jedoch oft teilweise wegen der grossen Ausdehnung durch die Ofenwand verdeckt waren, sodass sie nicht alle bei jeder Temperatur abgelesen werden konnten. Der Stab wurde zuerst bei 900° ausgeglüht und dehnte sich dabei um 0,13 mm aus. Er war sehr weich geworden und konnte bei hoher Temperatur nur schwer gegen eine kleine Durchbiegung geschützt werden. Aus diesem Grunde wohl und weil die bleibenden Aenderungen auch später grösser als bei den vorhergehenden Stäben waren, weichen die Beobachtungen bei den höheren Temperaturen mehr voneinander ab. Die letzte Beobachtung bei 875° ist bei der Berechnung nicht berücksichtigt. Die Heizung des Silberstabes geschah ebenso, wie bei allen folgenden Metallen, im zweiten Rohr.



bis die Heizung am Schluss der dritten Beobachtungsreihe auf  $1000^{\circ}$  getrieben wurde. Bei dieser Temperatur verschwanden nicht allein die Striche, sondern auch der ganze oxydirte Stab war kaum von der Rohrwandung zu unterscheiden.

Es wurde darauf an jedem Ende ein Platinplättchen ( $5 \times 5$  mm) von 0,5 mm Dicke in eine ausgefeilte, schwalbenschwanzförmige Nute eingeschoben. Auf der freien Platinoberfläche, die wieder in die Axe des Stabes zu liegen kam, wurden neue Striche gezogen, die bei den letzten beiden Beobachtungsreihen als Marken dienten. Nimmt man an, dass 1 Proc. der Ausdehnung bei dieser Anordnung von dem Platin herührt, so macht dies bei  $750^{\circ}$  erst einen Unterschied von  $0,01 (5,78 - 3,57) = 0,02$  mm.

Tabelle 5a.

Nickelstab.

|           | <i>t</i>       | <i>M</i><br>(mm) | <i>M'</i><br>(mm) | $\Sigma$<br>(mm) |  | <i>t</i>       | <i>M</i><br>(mm) | <i>M'</i><br>(mm) | $\Sigma$<br>(mm) |
|-----------|----------------|------------------|-------------------|------------------|--|----------------|------------------|-------------------|------------------|
| 30. Juni  | $19,1^{\circ}$ |                  |                   |                  |  | $19,0^{\circ}$ |                  |                   |                  |
|           | 1811 MV        | 1,354            | 0,227             | 1,581            |  | 1815 MV        | 1,377            | 0,218             | 1,595            |
|           | 4072           | 1,548            | 0,407             | 1,955            |  | 4081           | 1,542            | 0,415             | 1,957            |
|           | 6551           | 1,257            | 0,882             | 2,139            |  | 6561           | 1,261            | 0,865             | 2,126            |
|           |                |                  |                   |                  |  |                |                  |                   |                  |
| 2. Juli   | $19,8^{\circ}$ |                  |                   |                  |  | $19,8^{\circ}$ |                  |                   |                  |
|           | 1808 MV        | 1,102            | 0,469             | 1,571            |  | 1815 MV        | 1,142            | 0,463             | 1,605            |
|           | 2914           | 0,953            | 0,038             | 0,991            |  | 2927           | 0,941            | 0,029             | 0,970            |
|           | 4066           | 0,651            | 0,330             | 0,981            |  | 4075           | 0,639            | 0,343             | 0,982            |
|           | 6551           | 1,286            | 0,863             | 2,149            |  | 6563           | 1,306            | 0,848             | 2,154            |
|           |                |                  |                   |                  |  |                |                  |                   |                  |
| 4. Juli   | $20,2^{\circ}$ |                  |                   |                  |  | $20,2^{\circ}$ |                  |                   |                  |
|           | 1793 MV        | 0,937            | 0,673             | 1,609            |  | 1799 MV        | 0,953            | 0,648             | 1,601            |
|           | 4078           | 1,766            | 0,202             | 1,968            |  | 4083           | 1,753            | 0,218             | 1,971            |
|           | 6552           | 1,314            | 0,822             | 2,136            |  | 6560           | 1,325            | 0,814             | 2,139            |
|           |                |                  |                   |                  |  |                |                  |                   |                  |
| 18. Sept. | $17,7^{\circ}$ |                  |                   |                  |  | $17,8^{\circ}$ |                  |                   |                  |
|           | 6541 MV        | 5,674            | -0,005            | 5,669            |  | 6537 MV        | 5,671            | -0,013            | 5,658            |
|           | 9356           | 2,591            | -0,205            | 2,386            |  | 9358           | 2,612            | -0,222            | 2,390            |
| 19. Sept. | $18,4^{\circ}$ |                  |                   |                  |  | $18,4^{\circ}$ |                  |                   |                  |
|           | 6578 MV        | 5,942            | -0,271            | 5,671            |  | 6578 MV        | 5,939            | -0,275            | 5,664            |
|           | 9332           | 2,495            | -0,158            | 2,337            |  | 9330           | 2,505            | -0,179            | 2,326            |



die direct auf dem 6 mm dicken Stabe gezogen waren, nahm infolge allmählicher Oxydation ab, obwohl die Beobachtungen nur bis 500° ausgedehnt wurden. Die bleibenden Aenderungen des Stabes überschritten nicht 0,01 mm, die Länge bei 0° betrug 483,0 mm.

Tabelle 6a.

Constantanstab.

|           | <i>t</i> | <i>M</i><br>(mm) | <i>M'</i><br>(mm) | <i>Σ</i><br>(mm) | <i>t</i> | <i>M</i><br>(mm) | <i>M'</i><br>(mm) | <i>Σ</i><br>(mm) |
|-----------|----------|------------------|-------------------|------------------|----------|------------------|-------------------|------------------|
| 24. Sept. | 17,9°    |                  |                   |                  | 17,9°    |                  |                   |                  |
|           | 1818 MV  | 1,854            | − 0,023           | 1,831            | 1821 MV  | 1,877            | − 0,057           | 1,820            |
|           | 4036     | 2,215            | − 0,125           | 2,090            | 4036     | 2,187            | − 0,100           | 2,087            |
| 25. Sept. | 17,9°    |                  |                   |                  | 17,9°    |                  |                   |                  |
|           | 1815 MV  | 1,723            | 0,090             | 1,818            | 1820 MV  | 1,750            | 0,052             | 1,802            |
|           | 2917     | 1,374            | − 0,348           | 1,026            | 2927     | 1,366            | − 0,335           | 1,031            |
|           | 4007     | 0,972            | 0,056             | 1,028            | 4011     | 0,956            | 0,063             | 1,019            |

Tabelle 6b.

Constantanstab.

| <i>t</i> | <i>Σ'</i> (mm) |           | <i>λ<sub>s</sub></i> (mm) |       |
|----------|----------------|-----------|---------------------------|-------|
|          | 24. Sept.      | 25. Sept. | beob.                     | ber.  |
| 0°       |                |           | 0                         | 0     |
| 250      | 1,916<br>2,159 | 1,903     | 1,910                     | 1,910 |
| 375      |                | 1,040     | 2,950                     | 2,956 |
| 500      |                | 1,106     | 4,063                     | 4,063 |

Die Ergebnisse (Tab. 6a und 6b) werden durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$\lambda_s = 7,156 t + 0,00194 t^2 (\mu),$$
$$\lambda = \{14810 t + 4,024 t^2\} 10^{-9}.$$

7. Schmiedeeisen.

Der Stab aus Schmiedeeisen, wie der aus Stahl, wurde sogleich anfangs mit Platinplättchen in derselben Weise versehen, wie es bei Nickel angegeben ist. Infolge der Er-



Tabelle 7b.

Eisenstab.

| $t$ | $\Sigma'$ (mm) |          |          | $\lambda$ , (mm) |         |
|-----|----------------|----------|----------|------------------|---------|
|     | 19. Juli       | 21. Juli | 25. Juli | beob.            | ber.    |
| 0°  |                |          |          | 0                | 0       |
| 250 | 1,570          | 1,565    | 1,577    | 1,571            | 1,571   |
| 375 | 1,890          | 0,905    | 1,889    | 2,476            | 2,475   |
| 500 |                | 0,979    |          | 3,459            | 3,459   |
| 625 | 1,967          | 1,960    | 0,990    | 4,449            | (4,522) |
| 750 |                |          | 0,964    | 5,419            | (5,664) |

Der Eisenstab (6 mm dick) hatte bei 0° eine Länge von 482,7 mm und erfuhr nach den drei Heizungen eine dauernde Aenderung von + 0,01, - 0,025 und - 0,025 mm. Tab. 7a und 7b enthalten die Beobachtungen, die sich bis 500° in befriedigender Weise durch eine Parabel darstellen lassen. Die Gleichungen lauten:

$$\lambda_s = 5,650 t + 0,00254 t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{11705 t + 5,254 t^2\} 10^{-9}.$$

Oberhalb 500° wächst die Ausdehnung in geringerem Grade.

#### 8. Stahl.

Um gegen Schmiedeeisen einen möglichst grossen Unterschied zu erhalten, wurde ein kohlenstoffreicher Stahl gewählt. Der 6 mm dicke Stab hatte anfangs eine Länge von 482,8 mm bei 0° und verkürzte sich bei der ersten Heizung um 0,10 mm, während die Aenderungen später 0,01 mm nicht überschreiten.

Die Beobachtungen sind in Tab. 8a und 8b aufgeführt. Legt man durch die Punkte 0, 250 und 500° die Curve

$$\lambda_s = 4,428 t + 0,00402 t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{9173 t + 8,336 t^2\} 10^{-9},$$

so stimmt diese schon mit dem Wert bei 375° nicht gut überein. Die Ausdehnung des Stahles scheint also schon unter 500° unregelmässig zu werden.

Tabelle 8a.

Stahlstab.

Tabelle 8b.

Stahlstab.

| $t$ | $\Sigma'$ (mm) |          |          | $\lambda_s$ (mm) |         |
|-----|----------------|----------|----------|------------------|---------|
|     | 6. Juli        | 16. Juli | 17. Juli | beob.            | ber.    |
| 0°  |                |          |          | 0                | 0       |
| 250 | 1,361          | 1,360    | 1,357    | 1,359            | (1,359) |
| 375 | 1,866          | 0,898    | 1,871    | 2,255            | (2,227) |
| 500 |                | 0,958    |          | 3,221            | (3,221) |
| 625 | 1,582          | —        | 0,979    | 4,200            | (4,341) |
| 750 |                |          | 0,704    | 4,904            | (5,586) |

(Eingegangen 7. November 1900.)



✓

**7. Ueber die Unregelmässigkeiten  
Weston'scher Cadmiumelemente mit 14,3 proc.  
Amalgam in der Nähe von 0°;  
von W. Jaeger.**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Eine kürzlich erschienene Arbeit von Hrn. H. T. Barnes<sup>1)</sup> über Untersuchungen, die er an Cadmiumelementen (mit 14,3 proc. Amalgam) angestellt hat, giebt mir im Zusammenhang mit anderen Angriffen, welche diese Elemente erfahren haben<sup>2)</sup>, Veranlassung, meine bisher nicht veröffentlichten Versuchsreihen über das unregelmässige Verhalten von Cadmiumelementen (mit 14,3 proc. Amalgam) in der Nähe von 0° aus dem Jahre 1896<sup>3)</sup> hier mitzuteilen und bei dieser Gelegenheit einige nicht zutreffende Bemerkungen und Anschauungen über die Elemente und die Veröffentlichungen der Reichsanstalt richtig zu stellen.

Auf die betreffenden Unregelmässigkeiten der Cadmiumelemente ist zuerst von Wachsmuth und von mir hingewiesen worden<sup>4)</sup>; nach Aufstellung der Temperaturformel für das Cadmiumelement wurde (l. c. p. 583) geschrieben: „diese Formel gilt nach ihrer Ableitung zwischen 0° und 26°, doch haben spätere Beobachtungen gezeigt, dass einige Elemente sich zwischen 0° und etwa 5° in der Weise unregelmässig verhalten, dass ihre elektromotorische Kraft bedeutend (etwa  $\frac{1}{1000}$  Volt) grösser ist, als diejenige der anderen Elemente. Den Grund für diese auffällige Erscheinung zu finden, muss einer späteren

1) H. T. Barnes, Journ. of phys. Chem. 4. p. 339. 1900.

2) E. Cohen, Zeitschr. f. phys. Chem. 34. p. 621. 1900. Vgl. auch die vorläufige Erwiderung darauf: W. Jaeger u. St. Lindeck, l. c. 35. p. 98. 1900 und Ann. d. Phys. 3. p. 366. 1900.

3) Vgl. Thätigkeitsbericht der Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. 17. p. 143. 1897.

4) W. Jaeger u. R. Wachsmuth, Wied. Ann. 59. p. 575. 1896.







Für die beiden Zustände konnten Temperaturformeln aufgestellt werden; unterhalb  $39^{\circ}$  ist Zustand I der stabile, Zustand II der metastabile.

Die Erwartungen, beim Cadmiumelement analoge Erscheinungen zu finden, haben sich nicht erfüllt; auch die Zahlen und Curven von Hrn. Barnes entsprechen dieser Erwartung nicht, obwohl er in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Kohnstamm und Cohen an Cadmiumsulfat bei  $15^{\circ}$  einen Umwandlungspunkt gefunden zu haben glaubt.

Es steht indessen jetzt auch nach Versuchen in der Reichsanstalt fest, dass die hier betrachteten Erscheinungen beim Cadmiumelement nichts mit der Umwandlung des Cadmiumsulfates zu thun haben; auch müsste man sonst wie beim Clark-element zwei scharf ausgeprägte Curven der elektromotorischen Kraft unterhalb  $15^{\circ}$  finden.

Ich gehe nun zunächst auf meine Versuche ein. Einige Elemente habe ich in dem Intervall vom Gefrierpunkt der gesättigten Lösung des Cadmiumsulfates (ca.  $-16^{\circ}$ ) bis über  $+40^{\circ}$  eingehend bei auf- und absteigender Temperatur untersucht, um einerseits die früher aufgestellte Temperaturformel zu prüfen, andererseits die Unregelmässigkeiten näher zu studiren. Ausserdem habe ich alle mir damals zur Verfügung stehenden Cadmiumelemente (34 an der Zahl) bei  $0^{\circ}$  durchgemessen, um zu sehen, in welchen Grenzen sich die Abweichungen bei dieser Temperatur bewegen. Von diesen Elementen waren vierzehn (Nr. 311, 312, 313, 314, 317, 323, 330, 352, 359, 373, 376, 377, 378, 381) normal, das heisst ihre elektromotorische Kraft bei  $0^{\circ}$  unterschied sich nicht mehr als zwei Zehntausendstel von dem durch die Formel angegebenen Wert. Die übrigen zwanzig Elemente zeigten Abweichungen, ansteigend bis über 2 Millivolt und zwar in dem Sinne, dass ihre elektromotorische Kraft grösser war, als der Formel entspricht. Die folgende Zusammenstellung (Tab. 1) enthält die Abweichungen vom Formelwert in Millivolt. Bei der Messung standen die Elemente in Petroleum, welches durch Eis auf  $0^{\circ}$  abgekühlt wurde. Die angegebenen Zahlen sind erhalten beim Aufenthalt der Elemente bei  $0^{\circ}$  nach einigen Stunden.



Tabelle 2.

| Lfde.<br>Nr.            | Datum     | Zeit                            | Temp.  | Differenz<br>gegen 20° (MV.) |        | Ab-<br>weichung<br>(MV.) |
|-------------------------|-----------|---------------------------------|--------|------------------------------|--------|--------------------------|
|                         |           |                                 |        | beob.                        | ber.   |                          |
| Cadmiumelement Nr. 319. |           |                                 |        |                              |        |                          |
| 1                       | 23. X. 96 | 12 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> | + 8,0° | + 0,43                       | + 0,36 | + 0,07                   |
| 2                       | "         | 2 45                            | + 5,8  | + 0,43                       | + 0,41 | + 0,02                   |
| 3                       | 24. X. 96 | 11 30                           | + 4,0  | + 0,52                       | + 0,44 | + 0,08                   |
| 4                       | "         | 1 13                            | + 2,0  | + 0,45                       | + 0,47 | − 0,02                   |
| 5                       | "         | 2 13                            | + 0,5  | + 0,49                       | + 0,49 | 0                        |
| 6                       | 26. X. 96 | —                               | + 16,2 | + 0,16                       | + 0,13 | + 0,03                   |
| 7                       | "         | 12 47                           | 0      | + 0,52                       | + 0,50 | + 0,02                   |
| 8                       | "         | 2 0                             | − 16,0 | + 0,76                       | + 0,54 | + 0,22                   |
| 9                       | "         | 8 0                             | − 15,5 | + 0,50                       | + 0,54 | − 0,04                   |
| 10                      | "         | 5 43                            | − 13,7 | + 0,33                       | + 0,54 | − 0,21                   |
| 11                      | "         | 9 15                            | − 11,5 | − 0,02                       | + 0,55 | − 0,57                   |
| 12                      | 27. X. 96 | —                               | + 20,0 | 0                            | 0      | 0                        |
| 13                      | 28. X. 96 | —                               | + 18,0 | + 0,08                       | + 0,07 | + 0,01                   |
| 14                      | "         | 2 45                            | − 7,8  | + 0,69                       | + 0,55 | + 0,14                   |
| 15                      | "         | 6 30                            | − 7,0  | + 0,44                       | + 0,55 | − 0,11                   |
| 16                      | 29. X. 96 | 10 0                            | − 3,9  | + 0,41                       | + 0,53 | − 0,12                   |
| 17                      | "         | 12 50                           | 0      | + 0,38                       | + 0,50 | − 0,17                   |
| 18                      | "         | 1 35                            | + 17,2 | + 0,10                       | + 0,10 | 0                        |
| 19                      | "         | 2 04                            | − 18,5 | + 0,71                       | + 0,54 | + 0,17                   |
| 20                      | "         | 8 45                            | + 17,0 | + 0,08                       | + 0,10 | − 0,02                   |
| 21                      | 30. X. 96 | —                               | − 7,8  | + 0,42                       | + 0,55 | − 0,13                   |
| 22                      | "         | 12 15                           | + 16,0 | + 0,14                       | + 0,14 | 0                        |
| 23                      | "         | 1 25                            | − 12,0 | + 0,59                       | + 0,55 | + 0,04                   |
| 24                      | "         | 2 10                            | − 11,0 | + 0,59                       | + 0,55 | + 0,04                   |
| 25                      | 31. X. 96 | —                               | − 1,2  | + 0,43                       | + 0,52 | − 0,09                   |
| 26                      | "         | 12 0                            | + 10,5 | + 0,30                       | + 0,30 | 0                        |
| 27                      | "         | 1 12                            | + 28,0 | − 0,39                       | − 0,34 | − 0,05                   |
| 28                      | "         | 2 25                            | + 34,0 | − 0,68                       | − 0,66 | − 0,02                   |
| 29                      | "         | 2 40                            | + 42,0 | − 1,15                       | − 1,15 | 0                        |
| 30                      | "         | 2 55                            | + 41,7 | − 1,25                       | − 1,10 | − 0,15                   |
| 31                      | 2. XI. 96 | —                               | + 17,5 | + 0,10                       | + 0,09 | + 0,01                   |
| 32                      | "         | 11 45                           | 0      | + 0,54                       | + 0,50 | + 0,04                   |

Tabelle 3.

| Lfde.<br>Nr.            | Datum     | Zeit                           | Temp.   | Differenz<br>gegen 20° (MV.) |        | Ab-<br>weichung<br>(MV.) |
|-------------------------|-----------|--------------------------------|---------|------------------------------|--------|--------------------------|
|                         |           |                                |         | beob.                        | ber.   |                          |
| Cadmiumelement Nr. 316. |           |                                |         |                              |        |                          |
| 1                       | 21. X. 96 | —                              | + 14,0° | + 0,22                       | + 0,20 | + 0,02                   |
| 2                       | „         | —                              | + 10,8  | + 0,30                       | + 0,30 | 0                        |
| 3                       | 22. X. 96 | —                              | + 10,4  | + 0,55                       | + 0,31 | + 0,24                   |
| 4                       | „         | —                              | + 20,0  | + 0,06                       | 0      | + 0,06                   |
| 5                       | „         | —                              | + 12,0  | + 0,43                       | + 0,26 | + 0,17                   |
| 6                       | „         | —                              | + 8,0   | + 0,81                       | + 0,36 | + 0,45                   |
| 7                       | 23. X. 96 | 9 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> | + 17,5  | + 0,13                       | + 0,09 | + 0,04                   |
| 8                       | „         | 12 20                          | + 8,0   | + 0,70                       | + 0,36 | + 0,34                   |
| 9                       | „         | 2 50                           | + 5,8   | + 0,92                       | + 0,41 | + 0,51                   |
| 10                      | 24. X. 96 | —                              | + 15,2  | + 0,21                       | + 0,16 | + 0,05                   |
| 11                      | „         | 11 30                          | + 4,4   | + 1,20                       | + 0,43 | + 0,77                   |
| 12                      | „         | 12 41                          | + 2,0   | + 1,61                       | + 0,47 | + 1,14                   |
| 13                      | „         | 1 20                           | + 2,2   | + 1,45                       | + 0,47 | + 0,98                   |
| 14                      | „         | 1 55                           | + 0,6   | + 1,60                       | + 0,49 | + 1,11                   |
| 15                      | „         | 2 12                           | + 0,6   | + 1,51                       | + 0,49 | + 1,02                   |
| 16                      | 26. X. 96 | —                              | + 16,2  | + 0,17                       | + 0,14 | + 0,03                   |
| 17                      | „         | 12 47                          | 0       | + 1,60                       | + 0,50 | + 1,10                   |
| 18                      | „         | 2 0                            | — 16,0  | + 5,03                       | + 0,54 | + 4,49                   |
| 19                      | „         | 3 0                            | — 15,5  | + 4,24                       | + 0,54 | + 3,70                   |
| 20                      | „         | 5 30                           | — 13,7  | + 3,21                       | + 0,54 | + 2,67                   |
| 21                      | „         | 9 15                           | — 11,5  | + 2,21                       | + 0,55 | + 1,66                   |
| 22                      | 27. X. 96 | —                              | + 20,0  | 0                            | 0      | 0                        |
| 23                      | 28. X. 96 | 1 30                           | + 18,0  | + 0,13                       | + 0,07 | + 0,06                   |
| 24                      | „         | 2 45                           | — 7,8   | + 0,53                       | + 0,55 | — 0,02                   |
| 25                      | „         | 6 30                           | — 7,0   | + 0,63                       | + 0,55 | + 0,08                   |
| 26                      | 29. X. 96 | 10 0                           | — 3,8   | + 0,75                       | + 0,53 | + 0,22                   |
| 27                      | „         | 1 35                           | + 17,2  | + 0,05                       | + 0,10 | — 0,05                   |
| 28                      | 30. X. 96 | 12 15                          | + 16,0  | + 0,19                       | + 0,14 | + 0,05                   |
| 29                      | 31. X. 96 | 11 0                           | — 1,7   | + 0,81                       | + 0,52 | + 0,29                   |
| 30                      | 3. XI. 96 | 11 0                           | 0       | + 0,44                       | + 0,50 | — 0,06                   |
| 31                      | 4. XI. 96 | 11 0                           | + 17,2  | + 0,12                       | + 0,10 | + 0,02                   |



Tabelle 4.

| Lfde.<br>Nr.            | Datum     | Zeit                            | Temp.  | Differenz<br>gegen 20° (MV.) |        | Ab-<br>weichung<br>(MV.) |
|-------------------------|-----------|---------------------------------|--------|------------------------------|--------|--------------------------|
|                         |           |                                 |        | beob.                        | ber.   |                          |
| Cadmiumelement Nr. 368. |           |                                 |        |                              |        |                          |
| 1                       | 29. X. 96 | 12 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup> | — 3,5° | + 3,41                       | + 0,53 | + 2,88                   |
| 2                       | „         | 1 50                            | 0      | + 2,71                       | + 0,50 | + 2,21                   |
| 3                       | „         | 1 55                            | — 18,5 | + 3,74                       | + 0,54 | + 3,20                   |
| 4                       | „         | 8 45                            | + 17,0 | + 0,24                       | + 0,10 | + 0,14                   |
| 5                       | 30. X. 96 | 9 55                            | — 7,2  | + 2,74                       | + 0,55 | + 2,19                   |
| 6                       | „         | 12 15                           | + 16,0 | + 0,38                       | + 0,14 | + 0,24                   |
| 7                       | „         | 1 25                            | — 12,0 | + 2,71                       | + 0,54 | + 2,17                   |
| 8                       | „         | 2 10                            | — 11,0 | + 2,82                       | + 0,55 | + 2,27                   |
| 9                       | 31. X. 96 | —                               | — 1,2  | + 2,24                       | + 0,51 | + 1,73                   |
| 10                      | „         | 11 45                           | + 10,5 | + 0,60                       | + 0,30 | + 0,30                   |
| 11                      | „         | 1 12                            | + 28,2 | — 0,27                       | — 0,35 | + 0,08                   |
| 12                      | „         | 2 25                            | + 33,5 | — 0,51                       | — 0,62 | + 0,11                   |
| 13                      | „         | 2 35                            | + 42,0 | — 0,90                       | — 1,15 | + 0,25                   |
| 14                      | „         | 2 55                            | + 41,7 | — 1,24                       | — 1,10 | — 0,14                   |
| 15                      | 2. XI. 96 | —                               | + 17,5 | + 0,10                       | + 0,09 | + 0,01                   |
| 16                      | „         | 11 45                           | 0      | + 0,49                       | + 0,50 | — 0,01                   |

In den folgenden Figg. 2, 3, 4 sind die beobachteten Werte aus den obenstehenden Tabellen mit Angabe der laufenden Nummer des Versuches eingetragen<sup>1)</sup>, gleichzeitig ist die aus der Formel berechnete Curve eingezeichnet.

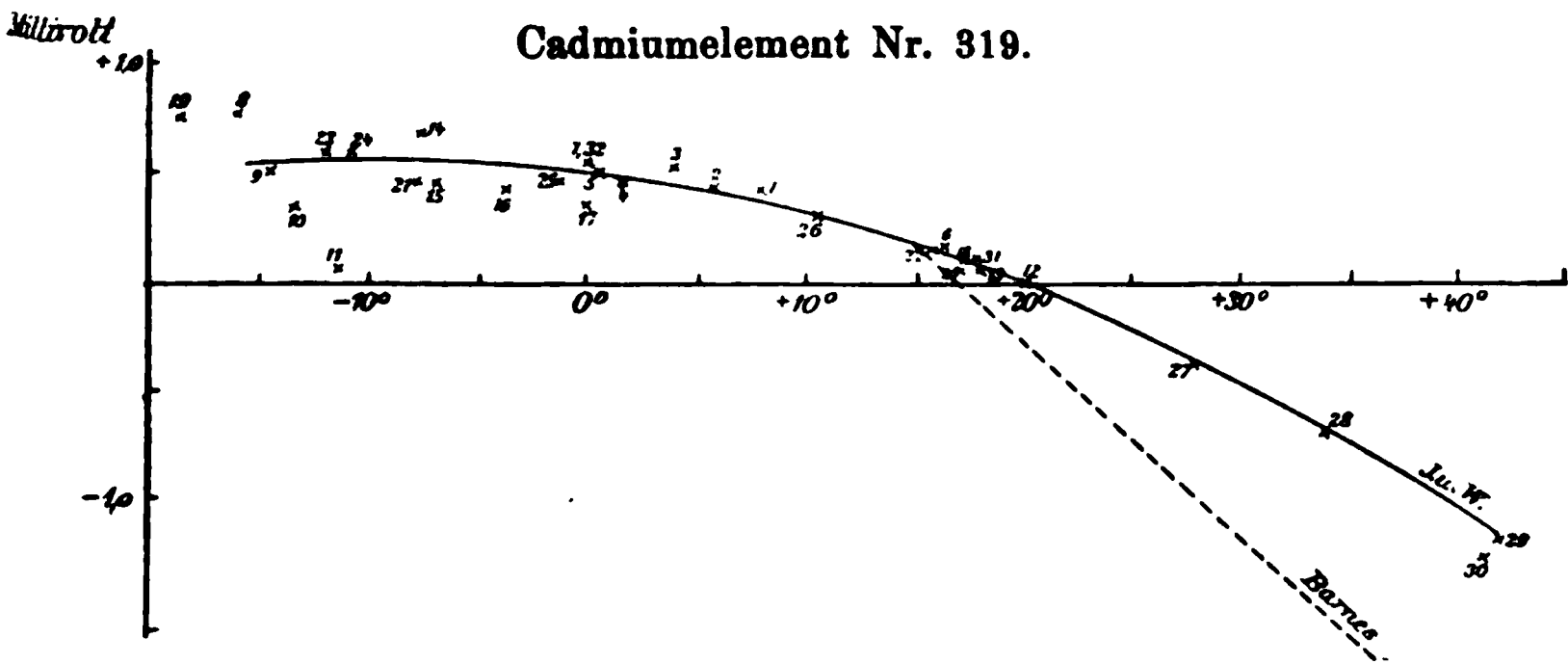
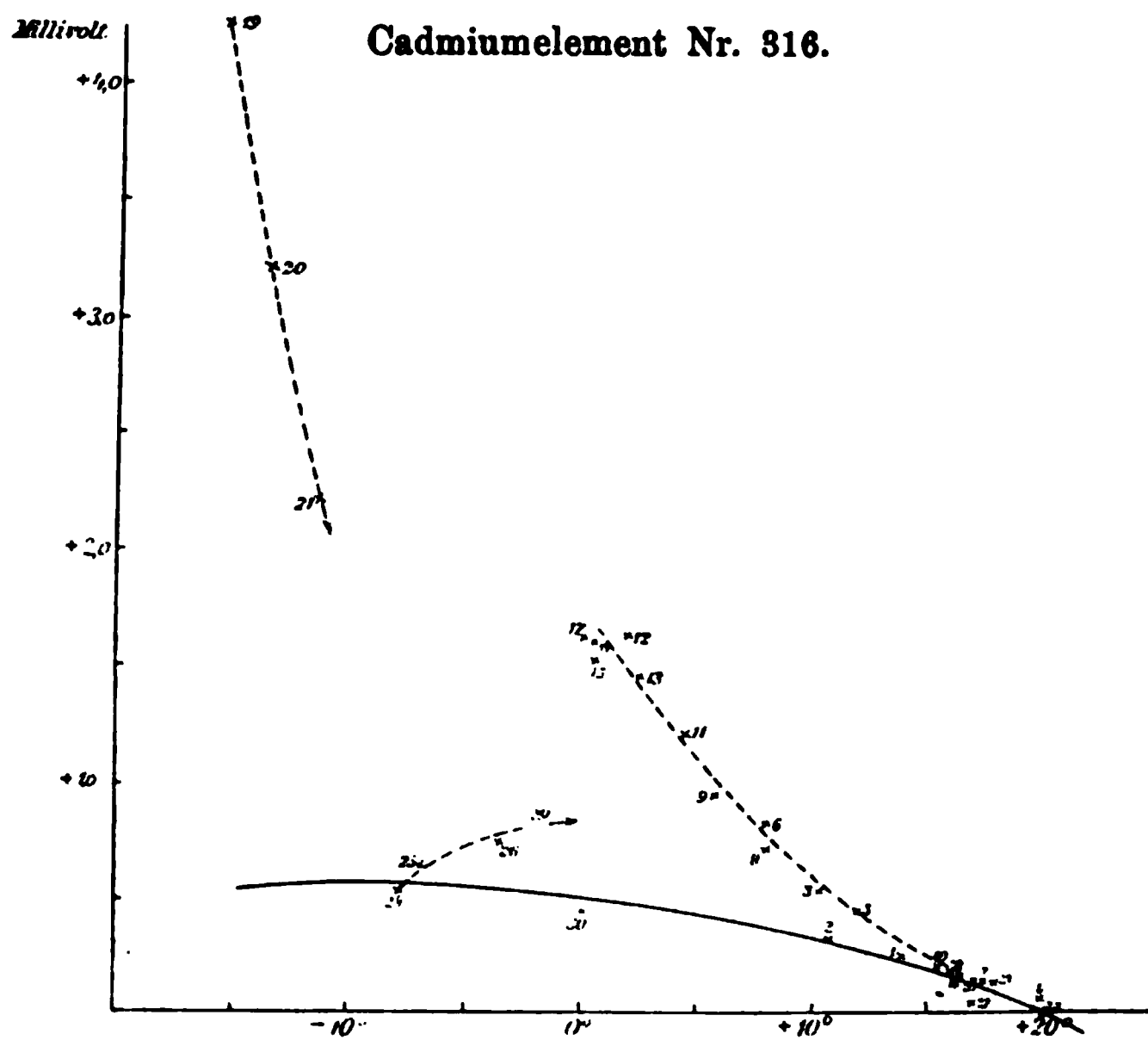
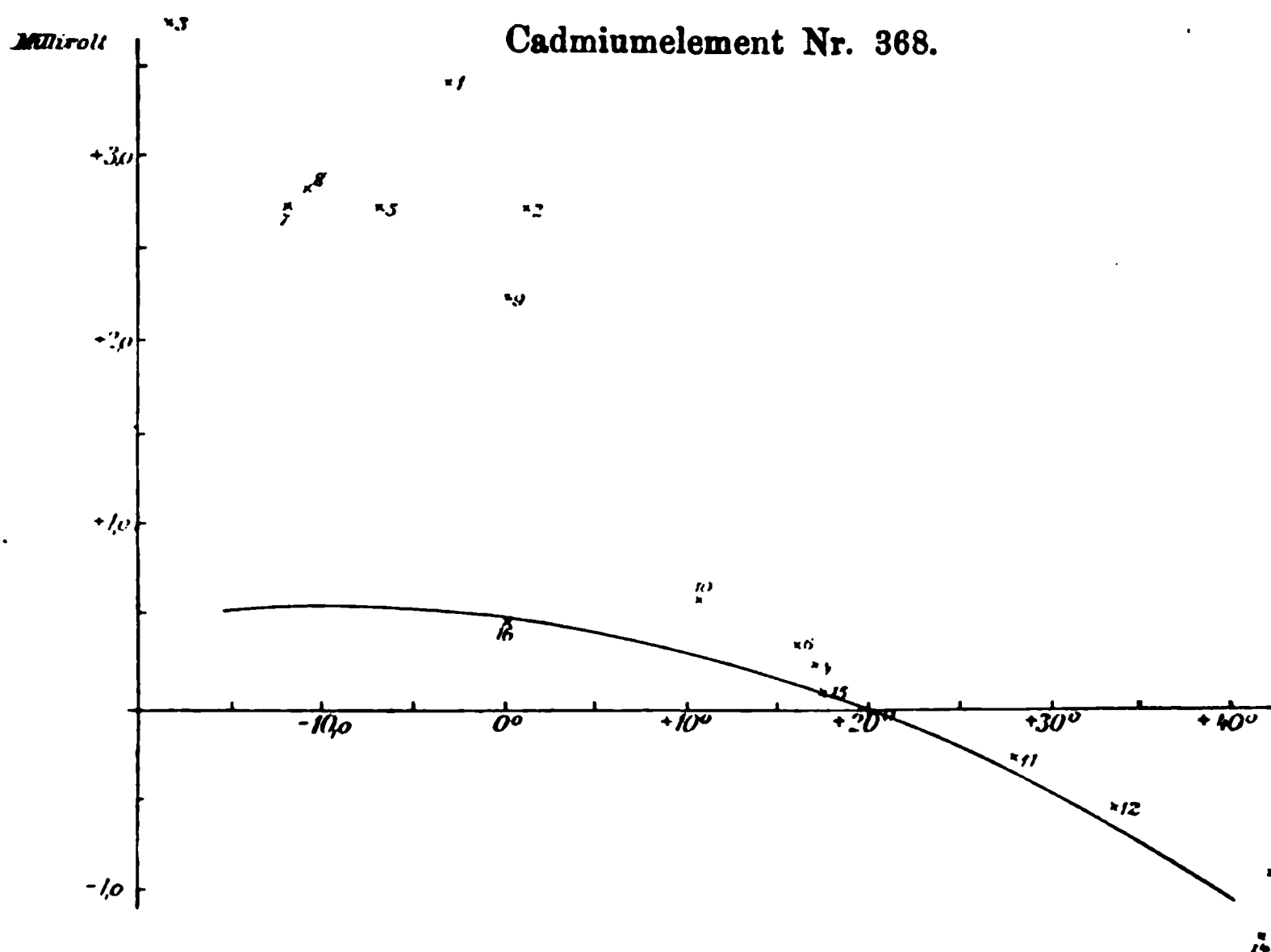


Fig. 2.

1) Mit Ausnahme von Nr. 18 für Element Nr. 316.



**Fig. 3.**



**Fig. 4.**

Man sieht nun zunächst aus Fig. 2, dass Element Nr. 319 die Temperaturcurve, welche nur zwischen 0° und 26° aufgestellt war, sogar von  $-16^{\circ}$  bis  $+40^{\circ}$  bestätigt. Man muss dabei ausschliessen die Versuche bei tiefer Temperatur vom 26. October (8 bis 11), bei welchen durch Abkühlung unter  $-16^{\circ}$  das Kryohydrat des Cadmiumsulfates entstanden war. In solchen Fällen war mehrmals eine starke stetige Abnahme der elektromotorischen Kraft des Elementes beobachtet worden; doch wurde dieses bei Zimmertemperatur stets wieder normal. Die von Hrn. Barnes (l. c.) aufgestellte Temperaturformel für das Cadmiumelement

$$E_t = E_{15} - 0,000\,086 (t - 15^{\circ}),$$

welche oberhalb  $15^{\circ}$  gelten soll und mit unseren Versuchen unvereinbar ist, ist in Fig. 2 ebenfalls eingezeichnet. Hr. Barnes beanstandet (p. 341) an unserem Beobachtungsmaterial, dass nur wenige Versuche bei  $26^{\circ}$  angestellt wurden und hält die Uebereinstimmung zwischen Berechnung unterhalb  $15^{\circ}$  für zufällig. Demgegenüber möchte ich bemerken, dass die betreffenden Untersuchungen von Hrn. Wachsmuth und mir mit der grössten Sorgfalt ausgeführt worden sind. Wie a. a. O. angeführt, sind nicht alle Beobachtungszahlen mitgeteilt worden, da sie stets identisch dasselbe ergab; auch die vorliegenden Messungen zeigen ja wieder die Richtigkeit der damaligen Beobachtungen. Es ist mir daher unerklärlich, wodurch die abweichende Temperaturformel von Hrn. Barnes zu stande gekommen ist. Wenn dieselbe auch mit Angaben von Hrn. Dearlove übereinstimmt, so ist das noch kein Beweis für ihre Richtigkeit. Dass sich die von Hrn. Barnes zusammengesetzten Cadmiumelemente, welche hier in Betracht kommen, nicht wesentlich von unseren unterscheiden, scheint aus ihrem Verhältnis zum Clarkelement hervorzugehen. Denn Hr. Barnes giebt an für

$$\frac{\text{Clark } 15}{\text{Cadm. } 20^{\circ}} = 1,40658,$$

während von uns gefunden war

$$1,40663 \text{ (bez. } 1,40679).^1)$$

1) W. Jaeger u. K. Kahle, Zeitschr. f. Instrumentenk. 18. p. 161. 1898; Wied. Ann. 65. p. 926. 1898 bez. St. Lindeck, Thätigkeitsbericht der Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. 20. p. 176. 1900..







✓

**8. Beiträge zur Kenntnis  
der Vorgänge in Inductionsapparaten;  
von K. R. Johnson.**

(Fortsetzung von p. 744. Bd. 3. 1900.)

**Der beim Schliessen inducirte secundäre Strom.**

Wie oben gesagt, rühren die wichtigsten Wirkungen des Inductoriums fast ausschliesslich von dem zweiten (d. h. dem vom Oeffnungsstrome inducirten) secundären Strome her, und den ersten Inductionsstrom haben wir deshalb bisher vernachlässigt. Jedoch erhält man auch vom ersten Inductionsstrome Funkenentladungen, wenn nur die Funkenstrecke kurz genug genommen wird. Diese Entladungen, obwohl sie unbedeutend gegenüber denjenigen des zweiten Stromes sind, haben jedoch ein besonderes theoretisches Interesse, und der erste Strom soll daher etwas näher besprochen werden.

Vor dem Schliessen des primären Stromkreises ist der Condensator zu einer Potentialdifferenz, die der elektromotorischen Kraft der Batterie genau gleich ist, geladen. Beim Schliessen wird der Condensator durch die Oeffnungsstelle entladet, und die Entladung findet deswegen grösstenteils in einer Strombahn, die fast ausschliesslich von den Zuleitungsdrähten des Condensators entsteht, statt. Diese Strombahn besitzt somit nur einen sehr kleinen Widerstand  $w$  und eine sehr kleine Selbstinduction  $\lambda$ . Für diese Entladung erhält man somit die Gleichungen:

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda \frac{di}{dt} + wi = e, \\ j_1 - i = C_1 \frac{de}{dt}, \end{cases}$$

wo  $i$  die Stromstärke in der kurzen Strombahn der Oeffnungsstelle,  $j_1$  diejenige in der primären Spule, und  $e$  die Potentialdifferenz des Condensators zur Zeit  $t$  bedeuten.  $C_1$  bezeichnet wie oben die Capacität des primären Condensators. Zu den





Wenn man diese Gleichungen nach vorherigem Multipliciren der letzteren mit  $x$  summirt, so ergibt sich

$$(L_1 + Mx) \frac{dj_1}{dt} + (M + L_2 x) \frac{dj_2}{dt} + W_1 j_1 + x W_2 j_2 = E_0 - E_0 f(t),$$

und wenn  $x$  die Bedingungen

$$\frac{W_1}{L_1 + Mx} = \frac{x W_2}{L_2 x + M} = k$$

erfüllt, so kann man die obige Differentialgleichung durch

$$(27) \quad \frac{dU}{dt} + kU = kE_0 - kE_0 f(t)$$

ersetzen, wo  $U = W_1 j_1 + x W_2 j_2$ .

Die Bedingungsgleichungen genügen den Wurzeln

$$(28) \quad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \frac{W_1 L_2 - W_2 L_1 \pm \sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}}{2 M W_2},$$

$$\begin{cases} k_1 \\ k_2 \end{cases} = \frac{W_1 L_2 + W_2 L_1 \mp \sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}}{2 L_1 L_2 \Delta},$$

wo  $\Delta$  die Differenz  $1 - M^2/L_1 L_2$  bezeichnet.

Demgemäss erhält man aus der Gleichung (27) zwei Lösungen, je nachdem man die Wurzeln  $(x_1, k_1)$  oder  $(x_2, k_2)$  benutzt. Die Lösungen sind wie folgt:

$$(29) \quad \begin{cases} U_1 = W_1 j_1 + x_1 W_2 j_2 = E_0 + A_1 e^{-k_1 t} \\ \quad - k_1 E_0 e^{-k_1 t} \int e^{k_1 t} f(t) dt, \\ U_2 = W_1 j_1 + x_2 W_2 j_2 = E_0 + A_2 e^{-k_2 t} \\ \quad - k_2 E_0 e^{-k_2 t} \int e^{k_2 t} f(t) dt. \end{cases}$$

Wenn man dabei berücksichtigt, dass das Integral

$$e^{-kt} \int e^{kt} f(t) dt = \frac{e^{-qt}}{p^2 + (k-q)^2} \cdot \left[ (k-2q) \cos pt + \frac{p^2 + q(k-q)}{p} \sin pt \right],$$

oder annäherungsweise

$$= \frac{e^{-qt} \sin pt}{p}$$

geschrieben werden kann, so ergibt sich aus der Differenz der Gleichungen (29):

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} (x_1 - x_2) W_2 j_2 &= A_1 \varepsilon^{-k_1 t} - A_2 \varepsilon^{-k_2 t} - k_1 E_0 \cdot \varepsilon^{-q t} \frac{\sin p t}{p} \\ &\quad + k_2 E_0 \cdot \varepsilon^{-q t} \frac{\sin p t}{p}. \end{aligned} \right.$$

Die Anfangsbedingungen sind  $j_1 = 0$  und  $j_2 = 0$  zur Zeit  $t = 0$  und aus den Gleichungen (29) erhält man somit

$$A_1 = A_2 = -E_0;$$

die Gleichung (30) kann somit

$$j_2 = - \frac{E_0 \cdot (\varepsilon^{-k_1 t} - \varepsilon^{-k_2 t})}{(x_1 - x_2) W_2} - \frac{(k_1 - k_2) E_0}{(x_1 - x_2) W_2 p} \cdot \varepsilon^{-q t} \sin p t$$

geschrieben werden, oder mit Berücksichtigung der in der Gleichung (28) gegebenen Werte der Constanten  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $k_1$  und  $k_2$

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} j_2 &= - \frac{M W_1 i_0 (\varepsilon^{-k_1 t} - \varepsilon^{-k_2 t})}{\sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}} \\ &\quad + \frac{M E_0}{L_1 L_2 p \Delta} \cdot \varepsilon^{-q t} \sin p t, \end{aligned} \right.$$

wo  $i_0$  die Stärke des constanten primären Stromes bedeutet.

Aus der Beziehung

$$j_2 = -C_2 \left( \frac{d E_2}{d t} \right)$$

zwischen der Potentialdifferenz  $E_2$  und der Stromstärke  $j_2$  im secundären Kreise erhält man die Spannung des ersten inducirten Stromes zur Zeit  $t$  durch Integriren. Es ergibt sich dabei

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} E_2 &= - \frac{M i_0}{C_2 W_2} \cdot \left\{ 1 - \frac{L_1 L_2 \Delta [k_2 \varepsilon^{-k_1 t} - k_1 \varepsilon^{-k_2 t}]}{\sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}} \right\} \\ &\quad + \frac{M E_0}{C_2 p^2 L_1 L_2 \Delta} \{ 1 - \varepsilon^{-q t} \cos p t \}. \end{aligned} \right.$$

#### Messungen mit dem Galvanometer und Dynamometer im secundären Stromkreise.

Den Verlauf der beiden inducirten Ströme hat man nach den von ihnen bei diesen Messapparaten bewirkten gleichen oder verschiedenen Ausschlägen beurteilt. Aus den gleichen Galvanometerausschlägen schloss man somit, dass die bewegten

Elektritätsmengen in beiden Fällen einander gleich sind. Aus den von dem zweiten Strome bewirkten grösseren Dynamometerausschläge wurde die Schlussfolgerung gezogen, dass der zweite Strom einen rascheren zeitlichen Verlauf hat, und dass die Stromintensität somit schneller steigt und dann wieder schneller herabfällt als bei dem ersten Strome. Die obige Theorie stimmt mit diesen Messresultaten und mit den daraus gezogenen Schlussfolgerungen völlig überein. Die Quantität oder das Zeitintegral des ersten Stromes erhält man aus der Beziehung

$$\int_0^{\infty} j_2 dt = -C_2 \cdot \int_0^{\infty} dE_2 = -C_2 [E_2]_0^{\infty}$$

und aus der Gleichung (32) ergibt sich somit

$$(33) \quad \int_0^{\infty} j_2 dt = -\frac{M i_0}{W_2},$$

wenn die Werte von  $k_1$  und  $k_2$  in (28) berücksichtigt werden.

Mittels des Dynamometers wird bekanntlich das Integral

$$\int_0^{\infty} j_2^2 dt$$

gemessen. Wird dasselbe Integral für den ersten inducirten Strom [mit Vernachlässigung des periodischen Gliedes aus der Gleichung (31)] berechnet, so ergibt sich

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} j_2^2 dt &= \frac{M^2 W_1^2 i_0^2}{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 \Delta L_1 L_2 W_1 W_2} \left[ \frac{1}{2 k_1} + \frac{1}{2 k_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{k_1 + k_2} \right] = \left( \frac{M i_0}{L_2} \right)^2 \cdot \frac{\frac{W_1}{L_1}}{2 \frac{W_2}{L_2} \left( \frac{W_1}{L_1} + \frac{W_1}{L_2} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen die Integrale (33) und (34) mit den entsprechenden Integralen des zweiten Stromes vergleichen; da jedoch die früher gegebenen Formeln des zweiten Stromes sehr unbequem zu handhaben sind, so wird, um die Rechnung zu vereinfachen, angenommen, dass  $\beta$  sehr gross gegenüber  $\alpha$  und  $\gamma$  sei — was z. B. bei einem Inductorium, das sich mit













Stromes darstellt, giebt eine Frequenz der schwingenden Bewegung von  $p/2\pi$ , welche aus der primären Capacität  $C_1$  in ebenderselben Weise wie  $\beta/2\pi$  abhängt; die Amplitude ist dagegen  $p$  umgekehrt proportional. Weil die Funkenlänge von  $p$  unabhängig ist, so muss sie somit von dem Producte aus der Frequenz und der Amplitude abhängen; denn dieses Product ist von  $p$  unabhängig und der elektromotorischen Kraft  $E_0$  proportional. Eine genaue Proportionalität zwischen der Funkenlänge und der elektromotorischen Kraft kann dagegen nicht experimentell gefunden werden, denn dafür ist dieselbe maximale Secundärspannung nötig. Wie aus der Gleichung (31) hervorgeht, ist jedoch das erste Glied des Stromes  $j_2$  von der Aenderung des primären Widerstandes nicht ganz unabhängig, und die unperiodische Stromcomponente, die zur Ladung des secundären Poles dient, muss somit demselben eine je nach dem Widerstande abgeänderte Maximalspannung erteilen.

Aus dem oben erwähnten Ergebnisse kann man somit schliessen, dass *die maximale Funkenlänge der Amplitude der Schwingungen proportional ist.*

Wird den obigen Entladungsbedingungen die dritte, dass *die Funkenlänge mit dem Entladungspotentiale proportional wächst*, zugefügt, so ergibt sich

$$(I) \quad l_{\max} = K \cdot A_i \cdot \frac{\beta}{2\pi} \cdot (V - V_0),$$

wo  $l_{\max}$  die maximale Funkenlänge,  $A_i$  die Amplitude und  $\beta/2\pi$  die Frequenz des Stromes bedeuten, und  $V$  die vom Strome erzeugte Potentialdifferenz bezeichnet.

Wir haben die Entladungsbedingungen bis jetzt in der secundären Stromstärke gesucht; dies ist jedoch eine Willkürlichkeit; es zeigt sich nämlich, dass dieselben gleich gut von den Potentialschwankungen abgeleitet werden können. Wenn eine der obigen Ableitung ähnliche bezüglich der Aenderung der Secundärspannung ausgeführt wird, so erhält man die Beziehung:

$$(II) \quad l_{\max} = K_1 \cdot A_e \cdot \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2 \cdot (V - V_0),$$

und es ist gegenwärtig nicht möglich zu entscheiden, ob (I) oder (II) die wahre Beziehung zwischen Funkenlänge und Potentialdifferenz liefert. Bei Benutzung der Gleichung (I) erhält man für den zweiten Strom



einzelnen elementaren Funken sind zwar nicht angegeben worden, sondern statt derselben ihr Mittelwert  $\mu$ . Wenn die einzelnen Zeitabstände  $\tau_n$  mit  $C_1$  oder  $C_2^2$  proportional sind, so muss dasselbe auch vom Mittelwerte  $\mu$  gelten. Einer Constanz des Quotienten  $\mu/C_2^2$  wird in den Tabellen entschieden widersprochen; dagegen sind die Abweichungen von einer Constanz  $\mu/C_2$  nicht grösser, als dass sie mit der Gleichung (39 I) vereinbar sind. Ich schloss demzufolge, dass die zweite Gleichung (II und 39 II) verworfen werden musste; es zeigte sich indessen, dass dies ein Trugschluss war, wie im Folgenden erwiesen wird.

Tabelle 7.

Stromstärke 3,98 Amp.; Funkenlänge 2 mm.



1) Der Buchstabe  $\alpha$  bedeutet stille Entladung; 1,  $\alpha$ , 1,  $\alpha$ , 5 bedeutet somit ein Funke, stille Entladung, ein Funke, stille Entladung, fünf Funken.

2) Mit  $x$  wird eine Capacität  $< 23$  bezeichnet, die jedoch nicht bestimmt wurde.

Tabelle 8.

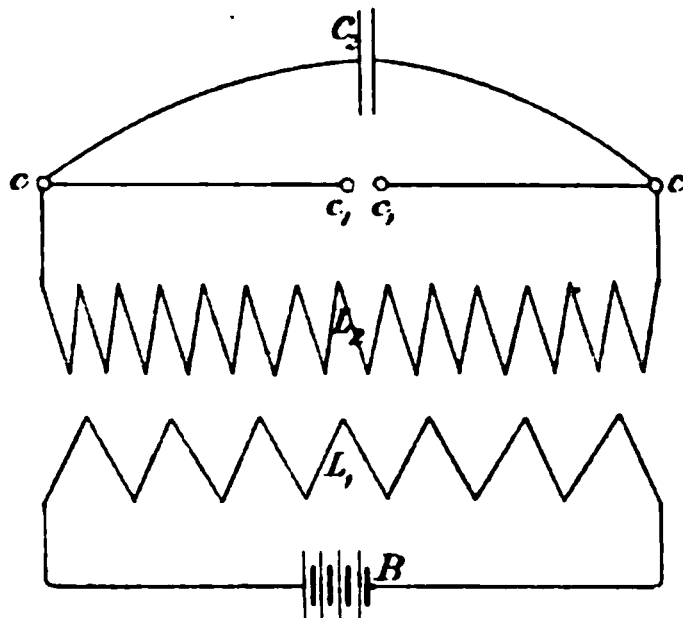
Stromstärke 3,98 Amp.; Funkenlänge 1 mm.

| Capacit | der<br>Entladung | Vor der still | N   | Die ganze Er<br>daue | abnehmende der |          |      |   |    | Beobacht |
|---------|------------------|---------------|-----|----------------------|----------------|----------|------|---|----|----------|
| 847     | 4, 4, 5          | 4,8           | —   | —                    | 0,00512        | 0,00     |      |   |    | 8        |
| 285     | 6, 5             | 5,5           | —   | —                    | 0,00681        | —        |      |   |    | 8        |
| 143     | 12, 18, 18       | 12,7          | —   | —                    | —              | —        |      |   |    | 8        |
| 78,5    | einige, a, 16    | —             | —   | 15                   | 0,01024        | —        |      |   |    | 8        |
| 78,5    | einige, a, 16    | —             | —   |                      |                |          |      |   |    |          |
| 78,5    | einige, a, 18    | —             | —   |                      |                |          |      |   |    |          |
| 67      | 34               | 34            | —   | —                    | 0,01027        | 0,000311 | —    | — | 47 | 2        |
| 67      | 34               |               |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| 67      | 5, a, 21         | —             | 21  | 0,01528              | —              | 44,5     | —    | — | —  | 1        |
| 81      | 2, a, 27         | —             | 1,3 | 29,7                 | 0,01909        | —        | 67,5 | — | —  | 3        |
| 81      | 1, a, 27         | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| 81      | 1, a, 35         | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| 23      | 1, a, 18         | —             | 1,0 | 15,7                 | 0,02171        | —        | 76,7 | — | —  | 3        |
| 23      | 1, a, 15         | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| 23      | 1, a, 14         | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| x       | 1, a, 20         | —             | 1,0 | 20,0                 | 0,02298        | —        | 77,7 | — | —  | 2        |
|         | 1, a, 20         | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| 81      | 1, a, 1, a, 18   | —             | 1,3 | 19,7                 | 0,02128        | 75,7     | 2,7  | — | —  | 3        |
| 81      | 1, a, 1, a, 22   | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| 81      | 2, a, 1, a, 19   | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| 23      | 1, a, 1, a, 12   | —             | 1,0 | 17,3                 | 0,02224        | 81,9     | 3,6  | — | —  | 3        |
| 23      | 1, a, 1, a, 18   | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| 23      | 1, a, 1, a, 22   | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |
| x       | 1, a, 1, a, 11   | —             | 1,0 | 11,0                 | 0,02264        | 81,4     | 4,2  | — | —  | 2        |
|         | 1, a, 1, a, 11   | —             |     |                      |                |          |      |   |    |          |

Die Abzweigung des secundären Stromkreises mittels eines  
Condensators.

Bei Parallelschaltung eines Condensators mit der Funken-  
strecke wird der secundäre Strom verteilt, und zwar so, dass  
der grösste Teil des Stromes zum Condensator geht, während

nur ein kleiner Teil zum Funkenmikrometer erlangt. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Anordnung eine ganz symmetrische ist (vgl. beistehende Figur); von dem secundären Pole  $c$  führt ein Kupferdraht zum Funkenmikrometer  $c_1$  und ein anderer Draht zum Condensator  $C_2$ .  $L_1$  ist die primäre und  $L_2$  die secundäre Rolle des Inductors, der mit der Batterie  $B$  gespeist wird. Der Verzweigungspunkt  $c$  besitzt eine Capacität  $c$  (z. B. diejenige einer Klemmschraube) und dem Funkenmikrometer wird die Capacität  $c_1$  erteilt.  $C_2$  ist die Capacität des Condensators  $C_2$ . Es sei ferner  $w_1$  der Widerstand und  $\lambda_1$  die Selbstinduction des Drahtes  $c c_1$ ;  $w_2$  und  $\lambda_2$  die entsprechenden Grössen des Drahtes  $c C_2$ . Wie oben wird vorausgesetzt, dass die Rückwirkung des Condensators und der ganzen Verzweigungsvorrichtung den secundären Strom des Inductors nicht beeinflusst. Die Stärke dieses Stromes ist demzufolge



$$(40) \quad i = \frac{M i_0}{L_2} (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t),$$

wie sie in der Gleichung (35) dargestellt worden ist.

Wird die Stromstärke im Zweige  $c c_1$  mit  $i_1$ , und diejenige in  $c C_2$  mit  $i_2$  bezeichnet, und nennt man ferner  $V$ ,  $V_1$  und  $V_2$  die Potentiale in  $c$ ,  $c_1$  und  $C_2$  zur Zeit  $t$ , so erhält man folgende Gleichungen:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{d i_1}{d t} + w_1 i_1 = V - V_1, \\ \lambda_2 \frac{d i_2}{d t} + w_2 i_2 = V - V_2, \\ i_1 = c_1 \frac{d V_1}{d t}, \\ i_2 = C_2 \frac{d V_2}{d t}, \\ i = i_1 + i_2 + c \frac{d V}{d t}. \end{array} \right.$$



Dieses Verhalten wird von Hrn. Hemsalech bestätigt; statt einer Funkenstrecke benutzte er eine Geissler'sche Röhre (oder eine Funkenstrecke und die Röhre wurden nacheinander eingeschaltet). Der Zweig  $cc_1$  bestand aus einer Inductionsspule. Ohne Eisenkern in die Spule leuchtete noch die Röhre. Wurde der Eisenkern in die Inductionsspule gebracht, so nahmen die Oscillationen allmählich ab und hörten zuletzt ganz auf.<sup>1)</sup> Die Übereinstimmung der dabei benutzten Anordnung mit unseren Annahmen ist ja unmittelbar ersichtlich.

Dieselbe Erscheinung wurde auch beobachtet, wenn statt des Inductoriums eine Wimshurstmaschine als Stromquelle verwendet wurde. Wie aus den Rechnungen hervorgeht ist ja die Erscheinung mit den elektrostatischen Funkenentladungen ganz ähnlich.<sup>2)</sup> In der That ist ja die Verzweigung ganz dieselbe wie bei den elektrostatischen Entladungen; der Saugkamm des Conductors der Holtz'schen Maschine wird hier von der Klemmschraube im Verzweigungspunkte vertreten und statt des intermittirenden Zuflusses der Elektrizität von den Spitzen des Saugkamms wird die Ladung hier von dem Strom des Inductors bewirkt.

*Zweiter Fall.* Es wird  $q_1 = q_2$  vorausgesetzt, was z. B. eintritt, wenn die Drähte  $cc_1$  und  $cC_2$  einander gleich sind. Die Gleichungen (42) werden nach vorherigem Multipliciren der ersteren mit  $x$  summirt, und man erhält dabei

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2q \frac{dU}{dt} + i_1 \left( \frac{x}{\lambda_1 c_1} + \frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c} \right) + i_2 \left( \frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 C_2} \right) = i \left( \frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c} \right),$$

wo  $xi_1 + i_2$  mit  $U$  bezeichnet wird.

Wenn  $x$  den Bedingungen

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{x}{\lambda_1 c_1} + \frac{1}{\lambda_2 c} = kx \\ \frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 C_2} = k \end{cases}$$

1) G. A. Hemsalech, Compt. rend. 130. p. 898. 1900; Beibl. 24. p. 827. 1900.

2) Vgl. K. R. Johnson, Ann. d. Phys. 3. p. 461. 1900.

genügt, so nimmt die obige Differentialgleichung die Form

$$(44) \quad \frac{d^2 U}{dt^2} + 2q \frac{dU}{dt} + kU = \frac{i}{c} \left( \frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

an. Aus den Bedingungsgleichungen (43) erhält man folgende Werte von  $x$  und  $k$ :

$$(45) \quad \begin{cases} \begin{aligned} \left. \begin{aligned} x_1 \\ x_2 \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{c}{c_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 C_2} \right] \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ 1 + \frac{c}{c_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 C_2} \right]^2 + \frac{4\lambda_1}{\lambda_2}}, \\ \left. \begin{aligned} k_1 \\ k_2 \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_1 c_1} + \frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 C_2} \right] \\ &\quad \pm \frac{1}{2\lambda_1 c} \sqrt{\left[ 1 + \frac{c}{c_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 C_2} \right]^2 + \frac{4\lambda_1}{\lambda_2}}. \end{aligned} \end{cases}$$

Je nachdem man die Werte  $k_1$  und  $x_1$  oder  $k_2$  und  $x_2$  wählt, erhält man zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung (44), und diese Lösungen hängen von den Wurzeln der Gleichungen

$$z^2 + 2qz + k_1 = 0 \quad \text{und} \quad z^2 + 2qz + k_2 = 0$$

ab.

$k_1$  und  $k_2$  sind positive Grössen, deren Product

$$(45a) \quad k_1 k_2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \left( \frac{1}{c c_1} + \frac{1}{c C_2} + \frac{1}{c_1 C_2} \right)$$

ist. Die Wurzeln der ersten Hülfsleichung sind immer complexe Zahlen  $-q \pm p_1 i$ ; die der zweiten Hülfsleichung  $z^2 + 2qz + k_2 = 0$  können sowohl complexe als reelle Zahlen sein, je nach dem Betrage der Grösse  $k_2$ . Bei der Behandlung der entsprechenden Gleichungen für die elektrostatischen Entladungen<sup>1)</sup> nahmen wir den Fall an, dass diese Wurzeln reell waren. Wegen der Leichtigkeit der Rechnung wollen wir dieselben hier als complexe Zahlen  $-q \pm p_2 i$  behandeln. Aus der Gleichung (44) erhält man somit die Integrale:

$$(46) \quad \begin{cases} U_1 = x_1 i_1 + i_2 = \varepsilon^{-qt} (A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t) \\ \quad \quad \quad + X_1 \varepsilon^{-\gamma t} + \varepsilon^{-\alpha t} (Y_1 \cos \beta t + Z_1 \sin \beta t), \\ U_2 = x_1 i_1 + i_2 = \varepsilon^{-qt} (A_2 \cos p_2 t + B_2 \sin p_2 t) \\ \quad \quad \quad + X_2 \varepsilon^{-\gamma t} + \varepsilon^{-\alpha t} (Y_2 \cos \beta t + Z_2 \sin \beta t), \end{cases}$$

1) l. c.



wo  $A_1, B_1, A_2$  und  $B_2$  Integrationsconstanten sind. Das Glied, welches die Constanten  $X_1, Y_1$  und  $Z_1$  (bez.  $X_2, Y_2$  und  $Z_2$ ) enthält, rührt vom rechten Gliede der Differentialgleichung her und diese Coefficienten sind daher von dieser Gleichung bestimmt. Ihre Werte sind wie folgt:

$$(46) \quad \begin{aligned} X &= \frac{M i_0}{L_2 c} \left( \frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \cdot \frac{1}{\gamma^2 - 2 q \gamma + k}, \\ Y &= - \frac{M i_0}{L_2 c} \left( \frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2 \alpha q + k}{(\alpha^2 - \beta^2 - 2 \alpha q + k)^2 + 4 \beta^2 (\alpha - q)^2}, \\ Z &= \frac{M i_0}{L_2 c} \left( \frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{2 \beta (\alpha - q)}{(\alpha^2 - \beta^2 - 2 \alpha q + k)^2 + 4 \beta^2 (\alpha - q)^2}, \end{aligned}$$

wo die Indices 1 oder 2 den Grössen  $x$  und  $k$  beizulegen sind, je nachdem  $X_1, Y_1, Z_1$  oder  $X_2, Y_2, Z_2$  evaluirt werden sollen. Zur Zeit  $t = 0$  sind sowohl  $i_1$  als  $i_2$  gleich Null und ebenso  $di_1/dt$  und  $di_2/dt$ . Aus diesen Anfangsbedingungen ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} A_1 &= -(X_1 + Y_1), & A_2 &= -(X_2 + Y_2); \\ B_1 &= \frac{1}{p_1} \left[ (\gamma - q) X_1 + (\alpha - q) Y_1 - \beta Z_1 \right], \\ B_2 &= \frac{1}{p_2} \left[ (\gamma - q) X_2 + (\alpha - q) Y_2 - \beta Z_2 \right]. \end{aligned}$$

Es wurde oben angenommen, dass  $\beta$  sehr gross gegenüber  $\alpha$  und  $\beta$  ist; ferner geht aus den Gleichungen (45) hervor, dass  $k_1$  sehr gross gegenüber  $\beta^2$  ist, und dass unter Umständen dasselbe auch von  $k_2$  gilt. Dementsprechend können wir den Constanten folgende Annäherungswerte beilegen:

$$\begin{aligned} X_1 &= -Y_1 = \frac{M i_0}{L_2 c k_1} \left( \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right), & Z_1 &= 0, \\ X_2 &= -Y_2 = \frac{M i_0}{L_2 c k_2} \left( \frac{x_2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right), & Z_2 &= 0, \\ A_1 &= 0, & B_1 &= \frac{\gamma - \alpha}{p_1} \cdot \frac{M i_0}{L_2 c k_1} \left( \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right), \\ A_2 &= 0, & B_2 &= \frac{\gamma - \alpha}{p_2} \cdot \frac{M i_0}{L_2 c k_2} \left( \frac{x_2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right). \end{aligned}$$

Werden  $i_1$  und  $i_2$  in den Gleichungen (46) getrennt, so erhält man

$$(47) \quad \begin{cases} (x_1 - x_2) i_1 = \varepsilon^{-q t} (B_1 \sin p_1 t - B_2 \sin p_2 t) \\ \quad + (X_1 - X_2) (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t), \\ (x_1 - x_2) i_2 = \varepsilon^{-q t} (-x_2 B_1 \sin p_1 t + x_1 B_2 \sin p_2 t) \\ \quad + (-x_2 X_1 + x_1 X_2) (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t). \end{cases}$$



und wenn die Entladung von der Componente, deren Frequenz  $\beta/2\pi$  ist, über die Componente  $p_1$  walten soll, so ist die notwendige Bedingung dafür, dass das erste Product viel grösser als das zweite ist, oder

$$\frac{c_1}{c + c_1 + C_2} \cdot \beta > \frac{\alpha - \gamma}{x_1 - x_2}.$$

Zwar ist  $\beta$  gross gegenüber  $\alpha$  und  $\gamma$ , aber dasselbe gilt auch von  $C_2$  gegenüber  $c_2$ , und es lässt sich ohne Zahlenangaben nicht entscheiden, wann die obige Bedingung erfüllt ist. Bei dem von Hrn. Moll benutzten Inductorium waren die Constanten, wie früher angegeben wurde<sup>1)</sup>,

$$\gamma = 52,6, \quad \alpha = 81,8 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2\pi}{0,000898}$$

und als Elektroden in der Funkenstrecke wurden Eisendrähte von 1,94 mm Durchmesser benutzt. Die zu erfüllende Bedingung wird somit zu

$$\frac{c_1}{C_2} (x_1 - x_2) > 0,00417$$

reducirt, und weil  $x_1 - x_2$  annäherungsweise etwa  $\sqrt{4 + (c^2/c_1^2)}$  ist, so ergibt sich

$$\frac{\sqrt{c^2 + 4c_1^2}}{C_2} > 0,00417,$$

eine Bedingung<sup>2)</sup>, der kaum bei dieser Anordnung genügt werden konnte.

Wir gelangen daher zu der Schlussfolgerung, dass die örtlichen Schwingungen, die bei der Verzweigung hervorgebracht werden, neben den Schwingungen des secundären Stromes eine hervorragende Rolle spielen. Wie in (49) dargestellt wurde, ist das Product aus der Amplitude und der Frequenz dieser örtlichen Schwingungen in den Zweigen fast vollständig unabhängig von der Capacität  $C_2$  des primären Condensators, und die Capacität kann somit nur den Zufluss der Elektrizität, welcher hauptsächlich von dem Gliede  $\varepsilon - \gamma'$  bewirkt wird, beeinflussen. Daraus ergibt sich somit, dass die Zeitabstände

1) Vgl. K. R. Johnson, Ann. d. Phys. 3. p. 461—470. 1900.

2) In der That stellt sich die Bedingung noch ungünstiger, weil  $\alpha$  aus dem Ohm'schen Widerstande des primären Kreises berechnet worden ist und demzufolge 81,8 ein allzu niedriger Wert von  $\alpha$  ist.



*Funken zu.* Anfangs sind sie sehr kräftig; werden aber bald abgeschwächt.“

„Wenn die Capacität noch mehr verkleinert wird, so wird die Entladung zum Teil continuirlich. Weil das continuirliche Licht auf dem lichtempfindlichen Papiere nicht zu wirken vermochte, so erschien auf den photographischen Aufnahmen nur ein Abbrechen in der Funkenreihe“.

„Die stille Entladung tritt nach einigen einzelnen Funken ein und eine grössere Anzahl von Funken folgen nach. Die Anfangs- und Endfunken sind oft sehr lichtschwach. Besonders gilt dies von dem letzten Anfangs- und dem ersten Endfunken. Es ist demzufolge manchmal schwierig zu entscheiden, wo die stille Entladung beginnt oder endet, und die Funkenzahlen in den Tab. 7 und 8 sind demzufolge nicht immer ganz sicher. Die Schwierigkeit, die Zahl der Funken zu berechnen, wird überdies von dem Naheliegen derselben vermehrt. Kräftig ist oft der erste Funke.“

„Bei abnehmender Capacität nimmt auch die Zahl der Anfangsfunken ab, und erreicht bald die Grenzzahl 1. Für eine Fernstrecke von 2 mm nimmt dabei die Zahl der Endfunken ebenso ab, was jedoch nicht bei 1 mm Funkenlänge der Fall ist. Um dieses Verhalten zu untersuchen wurden einige Ocularbeobachtungen ausgeführt; und es ergab sich dabei, dass die Funkenzahl im allgemeinen sehr variabel war. Bei bedeutender Funkenlänge (z. B. 4,5 mm) wurde die Zahl offenbar mit der Capacität vermindert, und wenn der Condensator weggenommen wurde, erhielt ich keinen einzigen Endfunken. Bei kleiner Funkenlänge (0,7 mm) wurde die Zahl, obwohl zuerst abnehmend, jedoch zuletzt vergrössert, denn bei der Entfernung des Condensators wurde eine sehr beträchtliche Funkenzahl erhalten“.

Die in Tab. 8 unter der horizontalen Linie angeführten Reihen, die unter dieselben Versuchsbedingungen wie die nächst obenstehenden ausgeführt worden sind, wurden an verschiedenen Tagen erhalten, und waren dabei Temperatur und Druck etwas abgeändert worden.

Wie aus dem Obigen hervorgeht, können die Funken nicht scharf bei der stillen Entladung getrennt werden; es liegt daher die Vermutung nahe, dass die Funken, die während



Es sei  $\theta_0$  die Zeit, zu welcher die stille Entladung beginnt, und  $E'_2$  die dafür nötige Potentialdifferenz, so ergibt sich somit

$$(51) \quad E'_2 = \frac{M i_0}{C_2 W_2} (1 - e^{-\gamma \theta_0}).$$

Zwar braucht, wie aus den elektrostatischen Entladungen bekannt ist, der erste Funke eine etwas grössere Potentialdifferenz als die folgenden, und es scheint ebenso hier zu sein, denn die Entladung wird ja immer von einem schwachen Fünkchen eingeleitet; sieht man indessen davon ab, so gehören  $E'_2$  und  $\theta_0$  zusammen, wie in Gleichung (51) dargestellt wird. Ist ferner  $\theta_0 + \theta$  die Zeit, zu welcher die stille Entladung abbricht, so erhält man aus der Gleichung (50)

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \left( \frac{M i_0}{W_2} \gamma e^{-\gamma t} - \frac{E'_2}{\varrho} \right) dt = \frac{M i_0}{W_2} \left[ \left( \gamma + \frac{1}{C_2 \varrho} \right) \frac{e^{-\gamma \theta_0} - e^{-\gamma(\theta_0 + \theta)}}{\gamma} - \frac{\theta + 0}{C_2 \varrho} \right] = 0,$$

wenn man voraussetzt, dass die stille Entladung sofort aufhört, wenn die Potentialdifferenz unter  $E'_2$  sinkt. Wird der Wert von  $e^{-\gamma \theta_0}$  aus (51) in die obige Gleichung eingesetzt, so ergibt sich

$$\left( \gamma + \frac{1}{C_2 \varrho} \right) \left( 1 - \frac{C_2 W_2 E'_2}{M i_0} \right) \left( \frac{1 - e^{-\gamma \theta}}{\gamma} \right) - \frac{\theta}{C_2 \varrho} = 0$$

oder annäherungsweise

$$\left( \gamma + \frac{1}{C_2 \varrho} \right) \left( 1 - \frac{C_2 W_2 E'_2}{M i_0} \right) \left( \theta - \frac{\gamma \theta^2}{2} \right) - \frac{\theta}{C_2 \varrho} = 0.$$

Die Dauer der stillen Entladung ist somit

$$(52) \quad \theta = \frac{2}{\gamma} \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 + \gamma C_2 \varrho \right) \left( 1 - \frac{C_2 W_2 E'_2}{M i_0} \right)} \right).$$

Um die Bedingung (50) zu erfüllen, muss die Differenz

$$1 - \frac{C_2 W_2 E'_2}{M i_0}$$

stets eine positive Grösse sein, und wenn die Capacität  $C_2$  hinlänglich gross genommen wird, so ist demzufolge eine stille













Berechnung der potentiellen Energie. Wir bestimmen zuerst die Attraction, welche eine flache Schicht mit einer Dicke  $du$  und mit einer constanten Dichte  $\rho$  ausüben wird auf die Masseneinheit, in einer Entfernung  $u$  von dieser Schicht. Wir schneiden zu dem Ende aus der flachen Schicht einen Ring und zwar so, dass der Mittelpunkt dieses Ringes zusammenfällt mit dem Fusspunkt der Senkrechte, aus dem Punkte, wo die Masseneinheit concentrirt ist, auf die flache Schicht niedergelassen. Der Radius dieses Ringes sei  $t$  und der Inhalt  $2\pi t dt du$ , dann wird der Component der Attraction in der Richtung senkrecht auf der flachen Schicht sein

$$\rho 2\pi t dt du \frac{u}{r} \Phi(r).$$

wenn  $\rho$  die constante Dichtigkeit in der Schicht,  $r$  die Entfernung unserer Masseneinheit von den Teilen des Ringes und  $\Phi(r)$  die Kraft ist, mit welcher zwei Masseneinheiten in einer Entfernung  $r$  sich anziehen.

Durch die ganze Schicht wird also eine Attraction ausgeübt:

$$\rho \int_{t=0}^{t=\infty} 2\pi t dt du \frac{u}{r} \Phi(r).$$

Bei Integration nach  $t$ , während  $u$  constant bleibt, gilt, da  $r^2 = u^2 + t^2$ , dass  $2r dr = 2t dt$  und die Attraction kann deshalb auch dargestellt werden durch

$$\rho \int_{r=u}^{r=\infty} 2\pi u du \Phi(r) dr.$$

Wir setzen  $d\zeta(r) = -\Phi(r) dr$ , und nehmen hierbei an, dass  $\zeta(\infty) = 0$ , und also geht unser Ausdruck für die Attraction über in

$$\rho 2\pi u \zeta(u) du.$$

Wir setzen nun  $2\pi u \zeta(u) du = -d\psi(u)$ , sodass

$$\psi(u) = \int_u^\infty 2\pi u \zeta(u) du,$$

worin wieder für Werte von  $u$ , grösser als die Wirkungssphäre  $\psi(u)$  sowohl als  $\zeta(u)$  Null wird.



Wenn wir nun aber die Säule nicht nehmen in der Flüssigkeitsmasse, sondern ruhend senkrecht auf dem Flüssigkeitsspiegel (Fig. 1), dann werden wir für die Attraction, welche die Säule von der Flüssigkeit erleiden würde, einen Wert finden, ebenso gross als wenn die Säule aus der Flüssigkeit herausgeschnitten wäre. Schneiden wir doch in einer Entfernung  $u$ , über dem Flüssigkeitsspiegel, zur Dicke  $du$ , ein Stück aus dieser Säule, mit einer Masse  $\rho d o du$ , dann wird dieser Teil der Säule eine Attraction

$$\rho^2 d o \psi(u) du$$

erleiden und die ganze Säule also eine Attraction

$$\rho^2 d o \int_0^\infty \psi(u) du.$$

*In homogenen Phasen werden die beiden Definitionen des Moleculardrucks also für die Grösse desselben denselben Wert liefern.*

Wir nehmen an, dass der Uebergang des gesättigten Dampfzustandes zum flüssigen Zustande continuirlich sei. Wir nehmen eine flache horizontale Grenzschicht und beabsichtigen, in einem Punkte der capillaren Schicht den Moleculardruck zu bestimmen und zwar in zwei Richtungen:

1. *in der Richtung senkrecht auf der Oberfläche der Flüssigkeit,*
2. *in der Richtung der Flüssigkeitsoberfläche.*

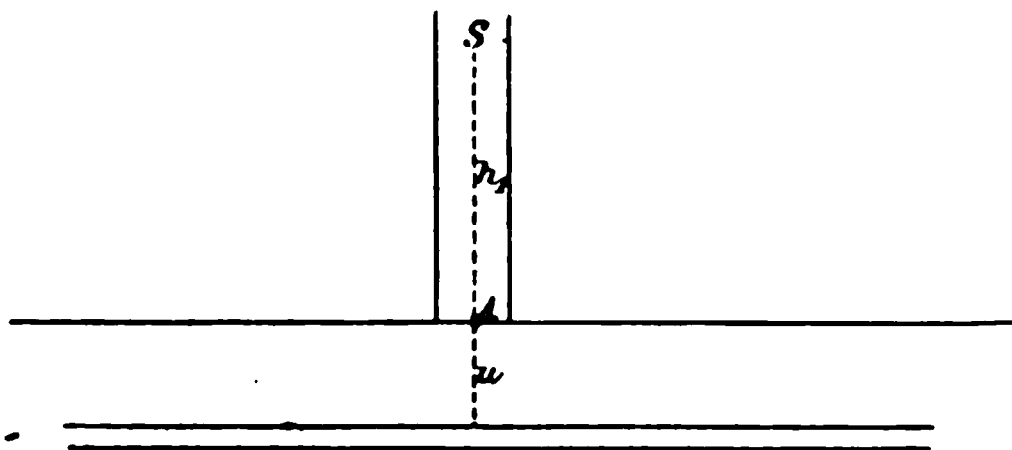


Fig. 3.

a) Bei der Bestimmung des Moleculardruckes in  $A$  in der Richtung senkrecht zur Oberfläche denken wir uns eine Fläche durch  $A$ , parallel mit der Oberfläche; ferner in  $A$  eine Säule, von der Dicke  $d o$ , senkrecht auf der durch  $A$  gehenden Fläche. Der Moleculardruck, den wir suchen, ist also für die Fläche  $d o$





$$\int_0^{\infty} \left( \varrho + h_1 \frac{d\varrho}{dh} + \frac{h_1^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \right) dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} - \left( \varrho - u \frac{d\varrho}{dh} + \frac{u^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \right) d\psi(u + h_1).$$

$$\int_{u=0}^{u=\infty} - \varrho d\psi(u + h_1) = \varrho \psi(h_1).$$

$$\int_{u=0}^{u=\infty} u \frac{d\varrho}{dh} d\psi(u + h_1) = \left[ u \frac{d\varrho}{dh} \psi(u + h_1) \right]_0^{\infty} - \frac{d\varrho}{dh} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) du.$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null; für  $u = 0$ , da der Factor  $u$  alsdann Null ist; für  $u = \infty$  ist  $\psi(u + h_1) = 0$ .

$$\int_{u=0}^{u=\infty} - \frac{u^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} d\psi(u + h_1) = \left[ - \frac{u^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \psi(u + h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty} + \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) u du.$$

Das integrierte Glied ist abermals Null für beide Grenzen. Das Integral wird also

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} & \left( \varrho + h_1 \frac{d\varrho}{dh} + \frac{h_1^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \right) dh_1 \left[ \varrho \psi(h_1) - \frac{d\varrho}{dh} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) du \right. \\ & \left. + \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) u du \right]. \end{aligned}$$

(1)      (2)      (3)      (1')      (2')

(3')

$$(1) (1') \quad \int_0^{\infty} \varrho dh_1 \varrho \psi(h_1) = \varrho^2 \int_0^{\infty} \psi(h_1) dh_1 = a \varrho^2.$$

$$(1) (2) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \int_0^{\infty} \varrho \, d h_1 \frac{d \varrho}{d h} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) \, d u \\ & = - \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} d h_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) \, d u. \end{aligned} \right.$$

Wir nehmen  $\psi(x) \, dx = -d\pi(x)$ , indem wir voraussetzen dürfen, dass  $\pi(\infty)$  gleich Null, ebenso wie  $\psi(\infty) = 0$  ist.

Der letzte Ausdruck wird

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} d h_1 \int_{u=0}^{u=\infty} d \pi(u + h_1) &= \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} d h_1 \left[ \pi(u + h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty} \\ &= - \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} \pi(h_1) \, d h_1 = - \varrho \frac{d \varrho}{d h} \left[ h_1 \pi(h_1) \right]_0^{\infty} \\ &\quad + \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} h_1 \, d \pi(h_1). \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null; für  $h_1 =$  da der Factor  $h_1$  alsdann Null ist; für  $h_1 = \infty$  ist  $\pi(h_1) =$

Der letzte Ausdruck wird also

$$(1) (3') \quad \left\{ \begin{aligned} & - \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} h_1 \psi(h_1) \, d h_1. \\ & \int_0^{\infty} \varrho \, d h_1 \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) u \, d u \\ & = - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} d h_1 \int_{u=0}^{u=\infty} u \, d \pi(u + h_1) \\ & = - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} d h_1 \left[ u \pi(u + h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty} \\ & \quad + \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} d h_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \pi(u + h_1) \, d u. \end{aligned} \right.$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null.

Wir nehmen  $\pi(x) dx = -d\chi(x)$ , indem wir die Annahme machen, dass  $\chi(\infty) = 0$ .

Der letzte Ausdruck wird also

$$\begin{aligned} & - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty d h_1 \int_{u=0}^{u=\infty} d \chi(u + h_1) \\ & = - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty d h_1 \left[ \chi(u + h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty}. \end{aligned}$$

$\chi(u + h_1)$  ist gleich Null für  $u = \infty$  und  $\chi(h_1)$  für  $u = 0$ , also wird der Ausdruck

$$\begin{aligned} & + \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty \chi(h_1) d h_1 = \left[ \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} h_1 \chi(h_1) \right]_0^\infty \\ & + \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty h_1 \pi(h_1) d h_1. \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null, also wird der letzte Ausdruck

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty \pi(h_1) d \frac{h_1^2}{2} & = \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \left[ \pi(h_1) \frac{h_1^2}{2} \right]_0^\infty \\ & + \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) d h_1. \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null und der Ausdruck wird

$$\varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) d h_1.$$

$$(2) \quad (1') \quad \int_0^\infty h_1 \frac{d \varrho}{d h} \varrho \psi(h_1) d h_1 = \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^\infty h_1 \psi(h_1) d h_1.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (2') \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & - \int_0^\infty h_1 \frac{d\varrho}{dh} dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \frac{d\varrho}{dh} \psi(u+h_1) du \\
 & = - \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \int_0^\infty h_1 dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u+h_1) du \\
 & = \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \int_0^\infty h_1 dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} d\pi(u+h_1) \\
 & = \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \int_0^\infty h_1 dh_1 \left[ \pi(u+h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty} \\
 & = - \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \int_0^\infty \pi(h_1) h_1 dh_1 = - \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \int_0^\infty \pi(h_1) d\frac{h_1^2}{2} \\
 & = - \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \left[ \pi(h_1) \frac{h_1^2}{2} \right]_0^\infty - \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null und Ausdruck wird

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1. \\
 (2) \quad (3') \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^\infty h_1 \frac{d\varrho}{dh} dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \psi(u+h_1) u du \\
 & = \frac{d\varrho}{dh} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int_0^\infty h_1 dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u+h_1) u du.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist von der Dimension

$$\int_0^\infty h_1^3 \psi(h_1) dh_1$$

und wird von uns vernachlässigt werden.

$$(3) (1') \quad \int_0^{\infty} \frac{h_1^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 \varrho}{d h^2} d h_1 \varrho \psi(h_1) = \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) d h_1.$$

$$(3) (2') \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\infty} - \frac{h_1^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 \varrho}{d h^2} d h_1 \frac{d \varrho}{d h} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) d u \\ & = \frac{d \varrho}{d h} \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} \frac{h_1^2}{2} d h_1 \int_0^{\infty} \psi(u + h_1) d h_1. \end{aligned} \right.$$

Dieser Ausdruck ist ebenfalls wie (3) (3') von einer solchen Dimension, dass wir ihn vernachlässigen können.

Für den Moleculardruck in der Richtung senkrecht zur Oberfläche finden wir also

$$\begin{aligned} a \varrho^2 - \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} h_1 \psi(h_1) d h_1 + \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) d h_1 \\ + \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} h_1 \psi(h_1) d h_1 - \left( \frac{d \varrho}{d h} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) d h_1 \\ + \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) d h_1, \end{aligned}$$

oder

$$a \varrho^2 + \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} h_1^2 \psi(h_1) d h_1 - \left( \frac{d \varrho}{d h} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) d h_1.$$

Die Glieder, die sich gegenseitig aufheben, sind die, welche das Zeichen ändern, wenn wir die Richtung, in welcher wir  $h$  rechnen, umkehren.

Wir setzen

$$\int_0^{\infty} h_1 \psi(h_1) d h_1 = c_1 \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} h_1^2 \psi(h_1) d h_1 = c_2.$$

Für den Wert des Moleculardruckes in der Richtung senkrecht zur Oberfläche finden wir also

$$a \varrho^2 + c_2 \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} - \frac{c_2}{2} \left( \frac{d \varrho}{d h} \right)^2.$$



Dichtigkeitseinheit ist, wirkt also mit einer Kraft, von der die Componente in der Richtung senkrecht auf  $PQ$  ist

$$d o \int_{r=r_1}^{r=\infty} \Psi(r) \frac{dr}{dz} dz = d o \int_{r_1}^{\infty} \Psi(r) dr = d o \zeta(r_1),$$

wobei wir wieder annehmen, dass  $d\zeta(r) = -\Psi(r) dr$ .

Denken wir uns jetzt in der Fläche  $PQ$  ein Polarcoordinatensystem mit  $A$  als Ursprung und einer Linie senkrecht auf der Zeichnungsfläche als feste Axe. Ein Flächenelement stellen wir vor durch  $y dy d\varphi$ . Die Dichte in  $A$  sei  $\rho$ , dann ist in einem willkürlichen Punkte dieser Fläche die Dichte

$$\rho + \frac{d\rho}{dh} y \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{d^2\rho}{dh^2} y^2 \sin^2 \varphi \text{ etc.}$$

Das Glied  $(d\rho/dh)y \sin \varphi$  macht, dass in einem Punkte in der Fläche  $PQ$  über  $A$  ebensoviel Stoff weniger anwesend ist als in  $A$ , als in einem anderen Punkte in der Fläche  $PQ$  ebenso tief unter  $A$  mehr ist als in  $A$ .

Wären also die Glieder

$$\rho - \frac{d\rho}{dh} y \sin \varphi$$

allein da, so würde die Attraction, welche der Stoff rechts von  $PQ$  ausübte auf die Masseneinheit in  $S$ , in der Richtung senkrecht auf  $PQ$  dieselbe sein, als bei gleichmässiger Dichte und also sein

$$\rho \psi(u).$$

Dazu kommt jetzt

$$\int_{y=0}^{y=\infty} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{1}{2} \zeta(r) \frac{d^2\rho}{dh^2} y^2 \sin^2 \varphi y dy d\varphi,$$

$$\int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

also wird der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\rho}{dh^2} \int_{y=0}^{y=\infty} \zeta(r) \pi y^3 dy.$$

Wir wissen, dass  $r^2 = y^2 + u^2$  und also  $r dr = y dy$ , sodass das Integral übergeht in

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_{r=u}^{r=\infty} 2 \pi \zeta(r) (r^2 - u^2) r dr &= - \frac{1}{4} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_{r=u}^{r=\infty} (r^2 - u^2) d\psi(r) \\ &= - \left[ \frac{1}{4} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} (r^2 - u^2) \psi(r) \right]_u^\infty + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_u^\infty \psi(r) r dr. \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null.

Wir finden also als Componente der Attraction in der Richtung senkrecht auf  $PQ$

$$\varrho \psi(u) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_u^\infty \psi(r) r dr$$

und für die Attraction der ganzen Säule

$$\begin{aligned} d\sigma' \int_0^\infty \varrho du \left[ \varrho \psi(u) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_u^\infty \psi(r) r dr \right] &= d\sigma' \varrho^2 \int_0^\infty \psi(u) du \\ &\quad - d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \int_u^\infty r d\pi(r). \end{aligned}$$

Dieses letzte Glied wird

$$\begin{aligned} &- d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \left[ r \pi(r) \right]_u^\infty + d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \int_u^\infty \pi(r) dr \\ &= d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du - d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \int_u^\infty d\chi(r) \\ &= d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du - d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \left[ \chi(u) \right]_u^\infty \\ &= d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du + d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \chi(u) du \\ &= d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du + d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \left[ u \chi(u) \right]_0^\infty \\ &\quad + d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du. \end{aligned}$$



Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null, also geht unser Ausdruck über in

$$\begin{aligned} d o' \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty u \pi(u) d u &= d o' \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty \frac{1}{2} \pi(u) d u^2 \\ &= d o' \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \left[ \frac{1}{2} \pi(u) u^2 \right]_0^\infty + \frac{1}{2} d o' \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty u^2 \psi(u) d u. \end{aligned}$$

Das erste Glied ist für beide Grenzen Null und demnach wird die Attraction, ausgeübt auf die ganze Säule,

$$d o' \left\{ \varrho^2 \int_0^\infty \psi(u) d u + \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^\infty u^2 \psi(u) d u \right\},$$

wofür wir also setzen dürfen

$$d o' \left\{ a \varrho^2 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \right\}.$$

Der Moleculardruck im Punkte  $A$  in der Richtung senkrecht auf der capillaren Schicht ist also

$$a \varrho^2 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2}.$$

Wir finden folglich für die Grösse des Moleculardruckes in einem Punkte der Uebergangsschicht, wo die Dichte  $\varrho$  ist:

a) In der Richtung senkrecht auf der capillaren Schicht

$$a \varrho^2 + c_2 \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} - \frac{c_2}{2} \left( \frac{d \varrho}{d h} \right)^2.$$

b) In der Richtung der capillaren Schicht

$$a \varrho^2 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2}.$$

Wir kommen also zum Schlusse, dass in der capillaren Schicht der Moleculardruck infolge der Attraction, welche die Teilchen aufeinander ausüben, in verschiedener Richtung einen verschiedenen Wert hat. In dieser Thatsache muss die Erklärung



in der Richtung senkrecht auf dem Flüssigkeitsspiegel  $p_1$ , den in der Richtung parallel mit dem Flüssigkeitsspiegel  $p_2$ , dann wird gelten müssen

$$p_1 + a \varrho^2 + c_2 \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} - \frac{c_2}{2} \varrho \left( \frac{d \varrho}{d h} \right)^2 = p_2 + a \varrho^2 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2},$$

oder

$$p_1 - p_2 = - \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} + \frac{c_2}{2} \left( \frac{d \varrho}{d h} \right)^2.$$

Zur Berechnung der Oberflächenspannung denke man sich senkrecht auf der capillaren Schicht eine platte Fläche, mit einer Dimension von 1 cm in der Richtung des Flüssigkeitsspiegels, mit einer Höhe, der Dicke der capillaren Schicht entsprechend. Die Druckdifferenz  $p_1 - p_2$ , integriert über diese Fläche, wird den Wert der Oberflächenspannung geben. Die Arbeit, welche dazu nötig ist, die Oberfläche um 1 cm<sup>2</sup> zu vergrößern, kann durch den nämlichen Ausdruck dargestellt werden:

$$\sigma = \int \left\{ - \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} + \frac{c_2}{2} \left( \frac{d \varrho}{d h} \right)^2 \right\} d h.$$

Die beiden Glieder dieses Integrales haben denselben Wert:<sup>1)</sup>

$$\frac{c_2}{2} \int \left( \frac{d \varrho}{d h} \right)^2 d h = \frac{c_2}{2} \int \frac{d \varrho}{d h} d \varrho = \frac{c_2}{2} \left[ \varrho \frac{d \varrho}{d h} \right]_{v1}^d - \frac{c_2}{2} \int \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} d h.$$

Das integrierte Glied ist Null, da das Integral über die ganze Dicke der capillaren Schicht ausgedehnt werden muss, und  $d \varrho / d h$  ebensowohl in der Flüssigkeits- als in der Dampfphase Null ist.

Deshalb

$$\sigma = - c_2 \int \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} d h$$

oder

$$\sigma = c_2 \int \left( \frac{d \varrho}{d h} \right)^2 d h.$$

Wir kommen also zur Folgerung, dass wirklich in der capillaren Schicht eine Spannung existiert, welche die Oberfläche zu verkleinern suchen wird, da die zweite Form, unter welcher wir den Ausdruck für  $\sigma$  gebracht haben, positiv ist.

---

1) van der Waals, Zeitschr. f. Phys. Chem. 13. 1894.

*Diese Spannung herrscht ausschliesslich in der Uebergangsschicht und wird bei unveränderter Temperatur einen constanten Wert haben. Zu der Grösse dieser Spannung liefern die verschiedenen Schichten ganz verschiedene Beiträge. Wir können den Wert desjenigen, was wir als Druck in der Richtung senkrecht auf der Oberfläche und in der Richtung der capillaren Schicht zu betrachten haben, als Functionen von  $1/\rho$ , hinsichtlich der theoretischen und empirischen Isothermen, durch eine graphische Darstellung leicht annähernd darstellen.*

$p_1$  bedeutet den Druck in der Richtung senkrecht auf der capillaren Schicht, den Druck des gesättigten Dampfes;  $p_2$  den Druck in der Richtung der capillaren Schicht;  $p$  den Druck, welcher zu einer homogenen Phase der Dichte  $\rho$  gehört.

$$p_1 = \text{const.},$$

$$p = \frac{R T}{\frac{1}{\rho} - b} - a \rho^2.$$

Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} p_1 + a \rho^2 + c_2 \rho \frac{d^2 \rho}{d h^2} - \frac{c_2}{2} \left( \frac{d \rho}{d h} \right)^2 &= p_2 + a \rho^2 \\ + \frac{c_2}{2} \rho \frac{d^2 \rho}{d h^2} &= p + a \rho^2. \end{aligned}$$

Die Supposition eines continuirlichen Ueberganges des Dampfes zur Flüssigkeit schliesst in sich, dass  $d^2 \rho / d h^2$  an der Flüssigkeitsphase einen negativen, an der Dampfphase einen positiven Wert hat. Da, wo  $d^2 \rho / d h^2$  einen Wert gleich Null hat, ist  $d \rho / d h$  maximal. Wo

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

die theoretische Isotherme schneidet, ist

$$\frac{d^2 \rho}{d h^2} = 0.$$

Für das, zu diesem Schnittpunkt gehörende  $\rho$ , wird also gelten

$$p_1 - p_2 = \frac{c_2}{2} \left( \frac{d \rho}{d h} \right)^2,$$





zu betrachten haben, wird zur Ausreckung mitwirken (dieser Druck kann natürlich auch negative Werte haben) gleichfalls auf Kosten der Wärme der Umgebung. *Wir haben in beiden Fällen eine bestimmte Quantität mechanischer Arbeit zu verrichten, welche für das Zustandekommen der Zustandsveränderungen unerlässlich ist. Durch Wärmezufuhr allein können wir diese Zustandsänderungen nicht zustande bringen.*

Die besondere Energie, welche wir durch Wärmezufuhr in diesem Falle nicht haben geben können, ist die Arbeit, welche wir beim Ausrecken des Häutchens verrichtet haben. *Diese Arbeit hat einen Wert, welcher vom Verlauf der Zustandsänderungen in der capillaren Schicht nicht abhängt. Es ist nun leicht ersichtlich, weshalb wir diese Energie durch Wärmezufuhr allein nicht geben können und dass diese Energie dem Betrag entsprechen muss, womit das thermodynamische Potential in der Uebergangsschicht*

$$\varepsilon - \tau_1 \eta + p_1 v,$$

*berechnet über eine Säule, mit einem Durchschnitt von  $1 \text{ cm}^2$  und mit einer Höhe von der Dicke der capillaren Schicht, das thermodynamische Potential der gleich grossen homogenen Massen der Flüssigkeits- oder Dampfphase übertrifft.<sup>1)</sup>*

So hat also die Weise, in welcher wir den Moleculardruck definirt haben, uns in den Stand gesetzt, mit Hülfe der Zustandsgleichung von van der Waals zu zeigen:

a) dass wirklich eine Oberflächenspannung besteht,

b) dass die Grösse der Oberflächenspannung zu einem Wert für die capillare Energie führt, welcher vollkommen derselbe ist als der, welchen die thermodynamische Theorie dafür angiebt. Dieses gilt auch ausserhalb der Grenzen, welche wir uns gesetzt haben, wenn wir also die Ausdrücke

$$\int_0^\infty \psi(u) u^3 du, \quad \int_0^\infty \psi(u) u^4 du \text{ etc.}$$

nicht vernachlässigt hätten,

c) dass die Grösse der Oberflächenspannung nicht abhängt von den Zustandsänderungen, welche in der capillaren Schicht eintreten können, sodass bei isothermischen Verän-

1) H. Hulshof. Inaugural-Dissertation.

derungen der Oberfläche also die Beschwerden, welche von der Thermodynamik gegen die Oberflächenspannungstheorie gewöhnlich angeführt werden, verschwinden können.

Der Hauptinhalt des hier Mitgeteilten wurde schon namens des Verfassers von Prof. van der Waals für den Bericht der gewöhnlichen Versammlung der naturphilosophischen Abteilung der Koninkl. Akad. van Wetensch. zu Amsterdam am 29. Jan. 1900 angeboten und darin aufgenommen. Diese Erwähnung erachte ich hier für erwünscht, da eine geraume Zeit nachher Mitteilungen über diesen Gegenstand gemacht worden sind von einem Autor, der meine Mitteilung an die Koninkl. Akad. van Wetensch. nicht erwähnt hat.

Delft, October 1900.

(Eingegangen 30. October 1900.)



✓

**10. Ueber das numerische Verhältniss  
der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien  
nach der molecularen Theorie;  
von W. Voigt.**

---

1. Es ist bekannt, dass in Bezug auf das numerische Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien die ältere Moleculartheorie der Elasticität in einen anscheinend unlösbaren Widerspruch mit der Erfahrung geriet, der ihre zeitweilige Verdrängung durch eine Theorie der „Nahewirkungen“ zur Folge hatte. Wenn nun auch diese letztere Theorie zu Formeln geführt hat, die sich nach jeder Richtung bewährt haben, so war es doch im Interesse der Ausarbeitung unserer molecularen Vorstellungen nötig, den Grund aufzusuchen, aus dem die ältere Theorie zu falschen Resultaten geführt hat.

Diese Untersuchung<sup>1)</sup> ergab in Bezug auf *krystallinische* Körper das durchaus plausible Resultat, dass es eine ungerechtfertigte Specialisirung der Moleculartheorie involvire, die Molecularkräfte als nur von der Entfernung abhängig anzunehmen, und dass jeder Widerspruch mit der Erfahrung verschwindet, wenn man die Wechselwirkungen zwischen zwei Molecülen in einer den Symmetrieverhältnissen des Krystalles entsprechenden Weise mit der Richtung variiren lässt.

Die Anwendung dieser erweiterten Vorstellung auf *isotrope* Medien ergibt dagegen kein anderes Resultat als die ältere Theorie, *solange man diese Körper wirklich molecular-isotrop*, d. h. ihre letzten Elementarteilchen in allen möglichen Orientirungen einander angelagert denkt.<sup>2)</sup> Bei dieser Constitution berechnen sich nämlich die elastischen Druckkräfte ebenso, als wenn die Molecularkräfte nur Functionen der Entfernungen wären, und es resultirt jenes bekannte Formelsystem

$$(1) \quad \begin{cases} -X_x = c x_x + c_1 y_y + c_1 z_z, \dots \\ -Y_z = \frac{1}{2}(c - c_1) y_z, \dots \end{cases}$$

---

1) W. Voigt, Gött. Abhandl. 34. p. 1. 1887.

2) W. Voigt, l. c. p. 47; Wied. Ann 38. p. 573. 1881.



Molecularkräfte geben zu diesen Summen nur die  $\omega$  unmittelbar anliegenden Molecüle merkliche Beiträge.

Bei Krystallen formt man diese Summen weiter um unter Benutzung der Annahme, dass ein jedes Molecül in *gleicher* Weise von anderen umgeben wäre. Eine solche Annahme ist bei isotropen Medien nicht zulässig; um die für die Isotropie charakteristische *mittlere* Gleichwertigkeit aller von einem Molecül ausgehenden Richtungen zu erhalten, müssen vielmehr die *einzelnen* Molecüle in *verschiedener* Weise umgeben sein; eine Anordnung, welche für jedes einzelne Molecül der Anforderung der Isotropie entspräche, existirt nicht.

Wenn nun aber auch im allgemeinen jedes Molecül dem anderen ungleichwertig ist, so fordert die Voraussetzung der Homogenität doch, dass in Bereichen, die erheblich kleiner sind, als die Sphäre merklicher molecularer Wirkung, die mittlere Verteilung der Molecüle die *gleiche* ist. So wollen wir annehmen, dass, wenn man den Raum zu beiden Seiten der Fläche  $\omega$  in Schichten von einer sehr kleinen Dicke  $\delta$  zerlegt, jede dieser Schichten über einer Grundfläche  $\omega$  die gleiche Anzahl von Molecülen enthält.

Auf Grund dieser Festsetzung können wir dann folgendermaassen weitergehen. Die Doppelsummen in (2) lassen sich zusammenfassen zu einfachen Summen aller der Componenten, welche die Schichten innerhalb des Cylinders von den Schichten jenseits  $\omega$  erfahren; da aber gleichwertige Schichtenpaare mit dem normalen Abstand  $n$  in der Zahl  $n/\delta$  vorhanden sind, so lässt sich auch schreiben:

$$(3) \quad X_n = -\frac{1}{\omega \delta} \sum n \Xi, \quad Y_n = -\frac{1}{\omega \delta} \sum n H, \quad Z_n = -\frac{1}{\omega \delta} \sum n Z,$$

wobei  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  als die Gesamtcomponenten aufgefasst werden können, die eine der Fläche  $\omega$  unmittelbar anliegende Schicht ( $\mathcal{J}$ ) von der einer negativen Coordinate  $n$  entsprechenden Schicht ( $\mathcal{A}$ ) erfährt.

Enthält die Volumeneinheit im Mittel  $\nu$  Molecüle, so befinden sich deren  $\nu' = \nu \omega \delta$  in der betrachteten Schicht ( $\mathcal{J}$ ). Setzen wir also  $\Xi = \nu \omega \delta \cdot X$ ,  $H = \nu \omega \delta \cdot Y$ ,  $Z = \nu \omega \delta \cdot Z$ , so sind  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Anteile, die von der Wirkung der Schicht



wo sich nun die Summen auf die Wirkung der mittleren Verteilung in der *gesamten* Umgebung des betrachteten Molecüles ( $o$ ) beziehen.

Da die mittlere Verteilung der Gleichwertigkeit aller Richtungen entsprechen soll, so werden bei ihr die Molecüle voraussichtlich Kugelflächen um das Molecül ( $o$ ) als Centrum nahezu gleichförmig erfüllen. Dass hierbei eine etwaige Abhängigkeit der Elementarwirkung von der gegenseitigen Orientierung der Molecüle nicht zur Geltung kommen kann, ist schon oben gesagt; wir wollen von dergleichen hier überhaupt absehen.

3. Für das Weitere wollen wir die relativen Coordinaten der (mittleren) Molecüle ( $\alpha'$ ), über welche die Summe  $\Sigma$  erstreckt ist, gegen das betrachtete Molecül ( $o$ ) durch  $x', y', z'$ , ihre relativen Verschiebungen mit  $u', v', w'$  bezeichnen, während  $x, y, z$  und  $u, v, w$  Coordinaten und Verschiebungen von ( $o$ ) selbst bezeichnen. Man erhält dann die Druckcomponenten  $X_x, \dots Z_z$  gegen die Coordinatenebenen, indem man  $n$  successive mit  $x', y', z'$  vertauscht.

Die Berechnung dieser Grössen geschieht nun bei der älteren, wie bei der neueren molecularen Theorie auf Grund der Beziehungen für die relativen Verschiebungen

$$(6) \quad \begin{cases} u' = \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z', \\ v' = \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial z} z', \\ w' = \frac{\partial w}{\partial x} x' + \frac{\partial w}{\partial y} y' + \frac{\partial w}{\partial z} z', \end{cases}$$

oder wegen der Wirkungslosigkeit einer reinen Drehung elastisch auch der damit äquivalenten

$$(7) \quad \begin{cases} u' = x_x x' + \frac{1}{2} x_y y' + \frac{1}{2} x_z z', \\ v' = \frac{1}{2} y_x x' + y_y y' + \frac{1}{2} y_z z', \\ w' = \frac{1}{2} z_x x' + \frac{1}{2} z_y y' + z_z z', \end{cases}$$

wobei  $x_x, \dots x_y$  die Deformationsgrössen bezeichnen.

Diese Formeln bilden auch die Grundlage der Nahewirkungstheorie der Elasticität. Aber während sie bei dieser



Anordnung, auf die sich die Summen  $\Sigma$  in (5) beziehen, in der Richtung des Radiusvectors  $r$  von  $(o)$  aus und zwar um mit  $r$  proportionale Strecken bewegen; auf diese Bewegungen haben die Winkeländerungen  $y_z, z_x, x_y$ , welche die Dichte ungeändert lassen, *keinen*, die Axendilatationen  $x_x, y_y, z_z$  aber *gleichen* Einfluss. Diese Verhältnisse drücken sich aus in dem Ansatz

$$(9) \quad u' = \frac{1}{3} x' \vartheta, \quad v' = \frac{1}{3} y' \vartheta, \quad w' = \frac{1}{3} z' \vartheta,$$

wobei

$$x_x + y_y + z_z = \vartheta$$

die räumliche Dilatation bezeichnet.

Entwickelt man mit diesen Werten die Ausdrücke für  $X_x, Y_x, Z_x$  weiter, so gelangt man successive zu folgenden Formeln. Es folgt zunächst unmittelbar aus (5):

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2} \nu_0 \Sigma (x_0' + u') \left( X_0 + \left( \frac{\partial X}{\partial x'} \right)_0 u' + \left( \frac{\partial X}{\partial y'} \right)_0 v' \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial X}{\partial z'} \right)_0 w' \right) (1 - \vartheta), \\ Y_x &= -\frac{1}{2} \nu_0 \Sigma (x_0' + u') \left( Y_0 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x'} \right)_0 u' + \left( \frac{\partial Y}{\partial y'} \right)_0 v' \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial Y}{\partial z'} \right)_0 w' \right) (1 - \vartheta), \\ Z_x &= -\frac{1}{2} \nu_0 \Sigma (x_0' + u') \left( Z_0 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x'} \right)_0 u' + \left( \frac{\partial Z}{\partial y'} \right)_0 v' \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial Z}{\partial z'} \right)_0 w' \right) (1 - \vartheta); \end{aligned} \right.$$

hierin beziehen sich alle mit dem Index 0 versehenen Grössen auf den Zustand *vor* der Deformation;  $\nu$  ist dabei gleich  $\nu_0(1 - \vartheta)$  gesetzt. Soll der ursprüngliche Zustand, wie man das gewöhnlich annimmt, verschwindenden Drucken entsprechen, so sind alle Summen von der Form

$$\Sigma x_0' X_0, \quad \Sigma y_0' X_0, \dots$$

gleich Null und wir haben einfacher, wenn wir uns auf Glieder erster Ordnung bezüglich der Deformationen beschränken und der Bequemlichkeit halber die oberen Indices' an  $x, y, z$  fortlassen:





nicht von einem Anfangszustand mit verschwindenden inneren Drucken ausgehen kann, also insbesondere auf Gase. Das Eingehen auf sie mag aber unterbleiben.

4. Körper, welche den Formeln (9) entsprechen, wird man als *vollkommen elastisch-flüssig* den durch (7) charakterisirten *vollkommen elastisch-festen* gegenüberstellen. Zwischenstufen zwischen diesen beiden Extremen, also *Körper von unvollkommener Festheit* (welcher Name nicht den Doppelsinn von „Festigkeit“ besitzt), die den wirklichen Körpern wenigstens elastisch äquivalent sind, lassen sich dann jederzeit durch eine Combination der beiden charakteristischen Eigenschaften construiren. So wird man einen Körper, der den Beziehungen

$$(15) \quad \begin{cases} u' = \beta (x_x x' + \frac{1}{2} x_y y' + \frac{1}{2} x_z z') + \frac{1}{3} (1 - \beta) \vartheta x', \\ v' = \beta (\frac{1}{2} y_x x' + y_y y' + \frac{1}{2} y_z z') + \frac{1}{3} (1 - \beta) \vartheta y', \\ w' = \beta (\frac{1}{2} z_x x' + \frac{1}{2} z_y y' + z_z z') + \frac{1}{3} (1 - \beta) \vartheta z', \\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

entspricht, als im Verhältniß  $\beta$  fest-, im Verhältniß  $(1 - \beta)$  flüssig-elastisch auffassen können. Der Ansatz entspricht der Bedingung

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = \vartheta,$$

die offenbar auch bei Annahme der molecularen Constitution erfüllt sein muss.

Für einen solchen Körper folgt aus (11):

$$(16) \quad \begin{cases} -X_x = \gamma_1 ((3x_x + y_y + z_z)\beta + \frac{5}{3}\vartheta(1 - \beta)), \dots \\ -Y_x = \gamma_1 \beta y_x, \dots \end{cases}$$

d. h., es ergibt sich das allgemeine Schema (1), in dem speciell

$$(17) \quad \begin{cases} c = \gamma_1 (3\beta + \frac{5}{3}(1 - \beta)) = \frac{1}{3}\gamma_1 (5 + 4\beta), \\ c_1 = \gamma_1 (\beta + \frac{5}{3}(1 - \beta)) = \frac{1}{3}\gamma_1 (5 - 2\beta) \end{cases}$$

ist. Zwischen den Constanten  $c$  und  $c_1$  besteht jetzt kein constantes Zahlenverhältniß, sondern je nach dem Grad der Festheit kann  $c/c_1$  alle Werte zwischen 1 und 3 erhalten. Die für die Festheit charakteristische Zahl  $\beta$  findet sich dabei zu

$$\beta = \frac{5(c - c_1)}{2(c + 2c_1)},$$

nahe parallel gehend dem Sir W. Thomson'schen modulus of rigidity

$$\frac{1}{2}(c - c_1) = \gamma_1 \beta.$$

Werte *ausserhalb* des Bereiches  $1 < c/c_1 < 3$  sind durch teilweise Flüssigkeit der Substanz nicht erhältlich, was vollkommen einleuchtet. Die durch Wasser aufgeweichten Gelatinen und Leime geben sehr nahezu  $c = c_1$ , also den Grad der Festheit nahe gleich Null, was gleichfalls durchaus begreiflich ist.

Göttingen, October 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)

## 11. *Ueber das elektrische Analogon des Zeeman-effectes; von W. Voigt.*

Die überraschende und schöne Erklärung, welche Hr. Lorentz<sup>1)</sup> mit Hülfe seiner allgemeinen Theorie der Elektrodynamik von dem *directen* Zeeman'schen Phänomen gegeben hat, findet in meinen Untersuchungen<sup>2)</sup> über den *inversen* Zeeman-effect eine Art von formaler und inhaltlicher Ergänzung. Während Hr. Lorentz, von einer ganz bestimmten Vorstellung über den Mechanismus des Vorganges ausgehend, fast ausschliesslich die Veränderung der *Emission* einer Lichtquelle durch die Einwirkung eines Magnetfeldes behandelt, beschäftigen sich meine Arbeiten unter alleiniger Heranziehung allgemeiner Ueberlegungen mit der *Absorption* und der *Doppelbrechung* in magnetisch beeinflussten Körpern. Durch den Kirchhoff'schen Satz steht ein Teil der auf dem einen und der auf dem anderen Wege erhaltenen Resultate in directer Beziehung, und die hierbei hervorgetretene Uebereinstimmung der beiderseitigen Ergebnisse miteinander, wie andererseits aller mit der Erfahrung, erweckt das Vertrauen, dass in jenen Ueberlegungen das Wesentliche des so merkwürdigen Vorganges richtig aufgefasst ist.

Bei dem nächst verwandten Problem der *elektrischen* Einwirkung auf Emission und Absorption fehlte bisher eine solche Zusammenwirkung der beiden Methoden. Es liegen hier nur erst die Formeln vor, welche von mir in erneuter Anwendung der in der Magnetoptik benutzten allgemeinen Principien ge-

---

1) P. Zeeman, Comm. from the Phys. Lab. Leiden, Nr. 33. p. 12. 1896.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 345. 1899; 68. p. 352. 1899; 69. p. 290. 1899; Ann. d. Phys. 1. p. 376 und p. 389. 1900.







werde, welcher gross ist gegen die Schwingungsamplituden und somit gegen die ausserhalb des elektrischen Feldes erreichten Werte  $x, y, z$ . Setzen wir dann

$$(6) \quad x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta_0 + \zeta$$

und beschränken uns in Bezug auf  $\xi, \eta, \zeta$  auf die niedrigsten Glieder, so erhalten wir

$$(7) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - (k + k' \zeta_0^2) \xi, & m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - (k + k' \zeta_0^2) \eta, \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = - e R - (k + k' \zeta_0^2) \zeta_0 - (k + 3 k' \zeta_0^2) \zeta. \end{cases}$$

Da  $\zeta_0$  die neue Gleichgewichtslage des Ionen bestimmen soll, so ergibt sich dafür

$$(8) \quad \zeta_0 (k + k' \zeta_0^2) = - e R,$$

oder in erster Annäherung

$$(9) \quad \zeta_0 = - e R / k.$$

Diese Annäherung darf in die kleinen in  $k'$  multiplicirten Glieder der Gleichungen (7) eingeführt werden, wodurch letztere die Gestalt erhalten:

$$(10) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \left( k + \frac{k' e^2 R^2}{k^2} \right) \xi, & m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - \left( k + \frac{k' e^2 R^2}{k^2} \right) \eta, \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = - \left( k + \frac{3 k' e^2 R^2}{k^2} \right) \zeta. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass die drei Verrückungscomponenten nach den Coordinatenaxen, welche nach (1) ursprünglich *dieselbe* Periode  $\tau$  besassen, gegeben durch

$$(11) \quad \left( \frac{2 \pi}{\tau} \right)^2 = \frac{k}{m},$$

im elektrischen Feld die Perioden  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  annehmen, gegeben durch

$$(12) \quad \left( \frac{2 \pi}{\tau_1} \right)^2 = \left( \frac{2 \pi}{\tau_2} \right)^2 = \frac{1}{m} \left( k + \frac{k' e^2 R^2}{k^2} \right), \quad \left( \frac{2 \pi}{\tau_3} \right)^2 = \frac{1}{m} \left( k + \frac{3 k' e^2 R^2}{k^2} \right).$$





durch Hinzunahme von Gliedern mit höheren Potenzen der elektrischen Vectorcomponenten gewonnen.<sup>1)</sup> Dies hat die Folge, dass bei elektrostatischen Vorgängen an Stelle der Dielektricitätsconstanten  $D$  eine Function der Feldstärke  $R$  von der Gestalt  $D_0 + D_1 R^2$  tritt, in der  $D_0$  und  $D_1$  Constanten bezeichnen. Die oben entwickelte Vorstellung führt aber, wie leicht erkennbar, zu dem analogen Resultate.

Denn bei, wie angenommen, sehr kleinem  $k'$  ergibt die Formel (8) für die Verschiebung  $\zeta_0$  der Gleichgewichtslage eines Elektron infolge des Feldes  $R$ , bei näherungsweise Auflösung,

$$(16) \quad \zeta_0 = - \frac{e R}{k} \left( 1 - \frac{k' e^2 R^2}{k^3} \right).$$

Hieraus folgt für ein Medium mit nur einer Gattung von Elektronen bei Einführung von deren Anzahl  $\alpha$  pro Volumeneinheit das specifische elektrische Moment  $\mu$  nach der Formel

$$(17) \quad \mu = - \alpha \zeta_0 e = + \frac{\alpha e^2 R}{k} \left( 1 - \frac{k' e^2 R^2}{k^3} \right).$$

Die Elektrisirungszahl oder elektrische Susceptibilität  $\eta$  ergibt sich hiernach zu

$$(18) \quad \eta = \frac{e^2 \alpha}{k} \left( 1 - \frac{k' e^2 R^2}{k^3} \right);$$

die Dielektricitätsconstante  $D$  ist

$$(19) \quad D = 1 + 4 \pi \eta = D_0 + D_1 R^2,$$

also in der That von der oben erwähnten Form, wobei gilt:

$$(20) \quad D_0 = 1 + \frac{4 \pi e^2 \alpha}{k}, \quad D_1 = - (D_0 - 1) \frac{k' e^2}{k^3}.$$

Bei Einführung des Ausdruckes (11) für  $k$  hat man auch:

$$(21) \quad D_1 = \frac{d D}{d R^2} = - (D_0 - 1) \frac{k' e^2 r^2}{4 \pi^2 m k^2}.$$

Bezeichnet man nun als relative Zerlegung  $\rho$  der für das Medium charakteristischen Spectrallinie den Ausdruck  $(\lambda_1 - \lambda_3)/\lambda$ ,

---

1) W. Voigt, l. c. p. 134.



$D_1 = dD/dR^2$  überhaupt und speciell für die hier in Frage kommenden Körper so gut wie unbekannt ist.

Wir müssen demgemäss zur Beantwortung der gestellten Frage auf das einzige gut beobachtete elektrooptische Phänomen, nämlich auf die *elektrische Doppelbrechung* zurückgreifen.

Aus den gelegentlich der Entwicklung der allgemeinen Theorie von mir mitgeteilten Formeln folgen für die complexen Brechungsindices  $\nu_h$  der beiden Wellen, die sich in dem elektrisirten Medium *normal* zu den Kraftlinien des Feldes fortpflanzen, die Ausdrücke

$$(27) \quad \begin{cases} \nu_1^2 = 1 + \sum \frac{\epsilon_h \vartheta^2}{\Theta_h + R^2 \vartheta^2 e_h} \\ \nu_2^2 = 1 + \sum \frac{\epsilon_h \vartheta^2}{\Theta_h + R^2 \vartheta^2 e_h'} \end{cases}$$

Hierin ist  $\vartheta$  für  $\tau / 2\pi$  gesetzt,  $\Theta_h$  bedeutet  $\vartheta^2 + i a_h \vartheta - o_h$ , und  $\epsilon_h$ ,  $a_h$ ,  $b_h$  sind Constanten des Körpers, die eine bestimmte Absorptionslinie ( $h$ ) charakterisiren,  $e_h$ ,  $e_h'$  messen speciell den ihr zukommenden elektrooptischen Effect.  $\nu_1$  bezieht sich auf die nach den Kraftlinien,  $\nu_2$  auf die normal dazu polarisirten Schwingungen.  $e_h$  liefert die erwähnte specielle Theorie gleich  $3 e_h'$ .

*Ausserhalb* des elektrischen Feldes liegt (kleines  $a_h$  vorausgesetzt) die Absorptionslinie ( $h$ ) sehr nahe an der durch  $\vartheta^2 = b_h$  gegebenen Stelle des Spectrums; *innerhalb* des Feldes dagegen für die beiden Wellen in den Stellen  $\vartheta^2(1 + R^2 e_h') = b_h$  und  $\vartheta^2(1 + R^2 e_h) = b_h$ , d. h. an den Stellen für welche gilt:

$$(28) \quad \frac{2\pi}{\tau_1^2} = \frac{1}{b_h} (1 + R^2 e_h'), \quad \frac{2\pi}{\tau_2^2} = \frac{1}{b_h} (1 + R^2 e_h).$$

Vergleicht man diese Formeln mit (12) und zieht die Relation  $e_h = 3 e_h'$  heran, so erkennt man, dass  $e_h'$  in der *früheren* Theorie dem Ausdruck  $k' e^2 / k^3$  in der *neuen, molecularen* Theorie entspricht.

Die Beobachtungen über elektrische Doppelbrechung sind an merklich *durchsichtigen* Körpern, d. h. für Farben, weitab von Absorptionsstreifen vorgenommen, was sich dadurch ausdrückt, dass das in  $a_h$  multiplicirte Glied in dem Ausdruck für  $\Theta_h$  vernachlässigt werden kann. Hierdurch werden  $\nu_1$  und  $\nu_2$



und man dürfte schreiben, indem man  $n_0^2 - 1$  und  $D - 1$  als von gleicher Grössenordnung betrachtet,

$$(35) \quad B(=) 100 e_h' (n_0^2 - 1),$$

wobei  $(=)$  wieder die Gleichheit der Grössenordnung andeutet. Bei Rücksicht auf die Bedeutung von  $e_h'$  folgt dann auch

$$(36) \quad B(=) 100 k' e^2 (n_0^2 - 1) / k^3.$$

Erweitert man den rechts stehenden Ausdruck mit  $m$  und benutzt die Beziehung (11), welche  $m/k = (\tau/2\pi)^2$  ergibt, so erhält man

$$(37) \quad \frac{B}{100 (n_0^2 - 1)} (=) \frac{k' e^2 \tau^2}{4 \pi^2 m k^2}.$$

Die Combination dieses Resultates mit (22) giebt schliesslich sehr einfach

$$(38) \quad \varrho = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} (=) \frac{B R^2}{100 (n_0^2 - 1)}.$$

Hr. Quincke findet bei Voraussetzung absoluter elektrostatischer Einheiten für Schwefelkohlenstoff  $B$  rund gleich  $4 \lambda \cdot 10^{-5}$ ; bei Benutzung dieser Zahl würde somit

$$(39) \quad \varrho (=) \frac{4 \lambda R^2}{n_0^2 - 1} \cdot 10^{-7}$$

oder bei Einführung von Volt als Einheit, was durch die Vertauschung von  $R$  mit  $P$  ausgedrückt sein mag, auch

$$(40) \quad \varrho (=) \frac{4 \lambda P^2}{9 (n_0^2 - 1)} \cdot 10^{-11}.$$

Unter Voraussetzung einer Feldstärke von 300 Volt pro Centimeter und eines bei Gasen angenähert vorhandenen Wertes von  $\lambda/(n_0^2 - 1) = 10^{-1}$  würde hiernach

$$(41) \quad \varrho (=) 4 \cdot 10^{-8}$$

werden. Um die Grösse dieses Wertes besser zu übersehen, führen wir noch den Abstand  $\Delta$  der Na-Linien  $D_1$  und  $D_2$  als von der Grössenordnung  $\lambda \cdot 10^{-3}$  ein und erhalten dann

$$(42) \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Delta} (=) 4 \cdot 10^{-5}.$$

Das Resultat der vorstehenden Ueberlegungen geht also dahin, dass selbst unter der Annahme der grössten bekannten elektrischen Doppelbrechung neben sehr kleinem  $(n_0^2 - 1)$  und

des in einem Dampf keineswegs leicht herstellbaren Potentialgefälles von 300 Volt pro Centimeter die in der Richtung normal zu den Kraftlinien des Feldes beobachteten Spectral- oder Absorptionslinien eines leuchtenden Dampfes nur etwa um den 20000<sup>sten</sup> Teil des Abstandes der beiden *D*-Linien verbreitert werden würden. Hierdurch ist die Ergebnislosigkeit der bisherigen Versuche zur Auffindung eines elektrischen Analogons zum Zeemaneffect vollständig erklärt.

Göttingen, August 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)

---

**12. Weiteres zur Aenderung der Schwingungsform  
des Lichtes beim Fortschreiten in einem dis-  
pergirenden und absorbirenden Mittel;  
von W. Voigt.**

---

In einer früheren Notiz<sup>1)</sup> über den in der Ueberschrift genannten Gegenstand habe ich mich mit der Untersuchung der Fortpflanzung ebener Wellen nicht rein periodischer Schwingungen in einem unendlichen absorbirenden und dispergirenden Medium einfachster Art beschäftigt und derselben die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2b \frac{\partial u}{\partial t}$$

zu Grunde gelegt, welche die elektromagnetische Lichttheorie für Körper ohne moleculare Eigenschwingungen liefert. Auf diese Gleichung habe ich ein von Riemann herrührendes Integrationsverfahren angewendet, das zwar auf den vorliegenden Fall der Erregung der Wellen durch die in vorgeschriebene Bewegung gesetzte Ebene ( $z = 0$ ) unmittelbar nicht passt, aber ihm durch einen von mir früher angegebenen Kunstgriff adaptirt werden kann.

Gerade bei der Anwendung dieses Verfahrens ist ein Fehler untergelaufen, der zwar die Sätze, um deren Nachweis es sich handelt, nicht berührt, aber doch Berichtigung verlangt.

Die Gleichung (1) ist durch die Substitutionen

$$(2) \quad u = U e^{-bt} \quad \text{und} \quad bt = \tau \sqrt{2}, \quad bz = \zeta a \sqrt{2}$$

auf die Form gebracht

$$(3) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2U,$$

und durch die weitere

$$(4) \quad \xi = \frac{\zeta - \tau}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\zeta + \tau}{\sqrt{2}}$$

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. 68. p. 598. 1899.

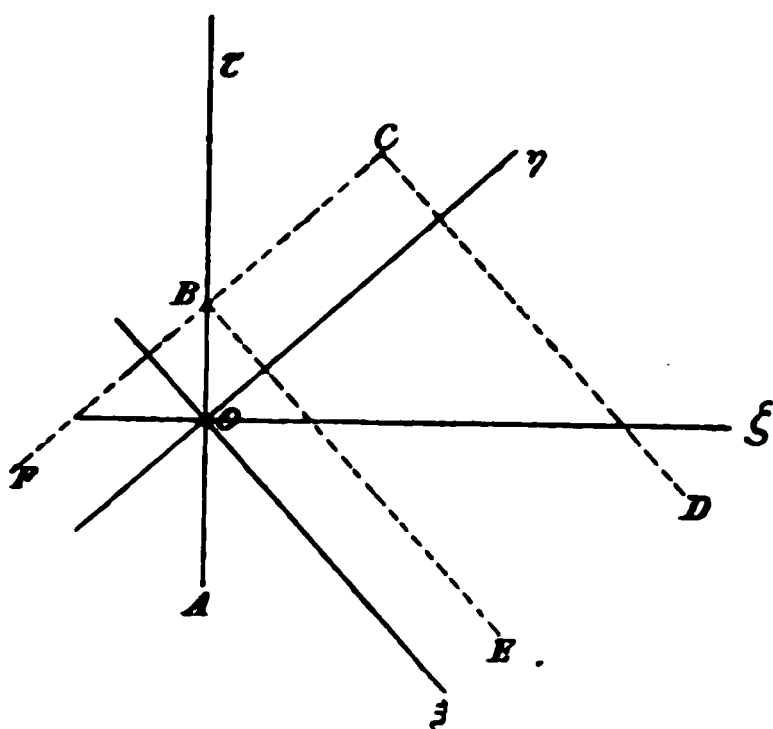
auf die Form

$$(5) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + U = 0.$$

Der Vorgang der Fortpflanzung einer in der Ebene  $z = 0$  erregten Bewegung spielt sich bei Einführung einer  $\zeta\tau$ -Koordinatenebene auf der Halbebene  $\zeta > 0$  ab; die letzte Substitution bezieht ihn auf ein  $\xi\eta$ -Koordinatensystem, dessen  $\xi$ -Axe im vierten, dessen  $\eta$ -Axe im ersten Quadranten liegt. (Vgl. die Figur.)

Die Aufgabe, den Zustand in einer beliebigen Ebene  $z$ , infolge einer Bewegung der Ebene  $z = 0$ , zu einer beliebigen

Zeit zu bestimmen, kommt darauf hinaus,  $U$  für eine beliebige Stelle  $C$  der  $\zeta\tau$ -Ebene durch die längs der  $\tau$ -Axe vorgeschriebenen Werte von  $U$  auszudrücken.



Die Anwendung des Ricmann'schen Verfahrens liefert unmittelbar, falls  $A, B, C, D$  die in der Figur mit diesen Buchstaben versehenen Punkte bezeichnen ( $A$  und  $D$ , wie auch  $E$  und  $F$  in un-

endlicher Ferne gedacht), das früher in der Formel (10) enthaltene Resultat

$$(6) \quad U_C = U_B - \int_A^B \left( q \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial q}{\partial \xi} \right) \frac{d\tau}{2},$$

wobei  $q$  eine Hilfsfunction ist, die folgenden Bedingungen zu genügen hat:

überall auf dem Gebiete  $FB C D F$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial \xi \partial \eta} + q = 0,$$

überall längs  $FC D$

$$(8) \quad q = 1.$$



Zugleich ist nach (4)

$$(9) \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da längs  $AB$  mit  $U$  auch  $\partial U/\partial \tau$ , nicht aber  $\partial U/\partial \zeta$  gegeben ist, so bestimmt die Formel (6), auch wenn  $\varphi$  den Bedingungen gemäss bestimmt gedacht ist,  $U_C$  noch nicht durch lauter bekannte Grössen; es handelt sich daher um die Ableitung des Wertes von  $\partial U/\partial \zeta$  für  $\zeta = 0$ .

Hierzu gewinnt man die nötige Bedingung, indem man die Stelle  $C$  nach  $B$  gerückt denkt; bezeichnet man die dieser speciellen Lage von  $C$  entsprechende Function  $\varphi$  mit  $\varphi_0$ , so erhält man aus (6) die Beziehung:

$$(10) \quad 0 = \int_A^B \left( \varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{2}}.$$

Diese Formel ist von mir zur Gewinnung des gesuchten  $\partial U/\partial \zeta$  nach dem der Stelle  $B$  entsprechenden  $\tau (= \tau_0)$  differentiirt worden; es ist aber dabei nicht beachtet, dass die Formel  $\tau_0$  ausser in der oberen Grenze auch in  $\varphi_0$  enthält. Hr. H. Weber in Strassburg hat mich hierauf aufmerksam gemacht. Der Fehler ist dadurch entstanden, dass die Bedingungen für  $\varphi$  unabhängig von der Lage des Punktes  $C$  sind,  $\varphi$  selbst also auf *Coordinaten relativ zu  $C$  bezogen* immer das gleiche Gesetz befolgt; dies letztere ist mit einer Unabhängigkeit von der Lage von  $C$  verwechselt worden.

Bei Berücksichtigung dieser Abhängigkeit kann man nun in folgender Weise vorgehen. Setzt man für  $\partial U/\partial \eta$  und  $\partial \varphi_0/\partial \xi$  ihre Werte gemäss (9) ein, so erhält man aus (10)

$$0 = \int_A^B \left( \varphi_0 \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) - U \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \right) \right) d\tau,$$

d. h.

$$(11) \quad 0 = \varphi_0 U \Big|_A^B + \int_A^B \left( \varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \zeta} - U \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} \right) d\tau.$$



$$(13) \left\{ \begin{array}{l} 0 = U_1 + \varphi_1 \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_1 \delta \tau, \\ 0 = U_2 + \varphi_2 \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_1 \delta \tau + \varphi_1 \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_2 \delta \tau, \\ 0 = U_3 + \varphi_3 \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_1 \delta \tau + \varphi_2 \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_2 \delta \tau + \varphi_1 \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_3 \delta \tau, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Hierin bezeichnen  $U_1, U_2, \dots$  und  $(\partial U / \partial \zeta)_1, (\partial U / \partial \zeta)_2, \partial U / \partial \zeta_3 \dots$  die gegebenen Werte von  $U_0$  und die gesuchten von  $\partial U / \partial \zeta$  für  $\tau$  gleich  $1. \delta \tau, 2. \delta \tau, 3. \delta \tau, \dots$ ;  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$  sind die Werte von  $\varphi_0$  auf dem 1., 2., 3. Element  $\delta \tau$  von  $B$  ab, welche nach den Bedingungen (7) und (8) für  $\varphi$  von der Lage von  $B$  auf der  $\tau$ -Axe unabhängig sind. Diese linearen Gleichungen bestimmen die  $(\partial U / \partial \zeta)_h$  eindeutig.

Der andere Weg setzt voraus, dass sich die auf der  $\tau$ -Axe liegenden Werte von  $U, \partial U / \partial \zeta$  und  $\varphi_0$  nach Potenzen von  $\tau$  entwickeln lassen. Man kann dann setzen, indem man dem Punkte  $B$  den Wert  $\tau = \tau_0$  zuordnet,

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} U_B = a_0 + a_1 \tau_0 + a_2 \tau_0^2 + a_3 \tau_0^3 + \dots \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta} = b_0 + b_1 \tau + b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + \dots \\ \varphi_0 = c_0 + c_1 (\tau_0 - \tau) + c_2 (\tau_0 - \tau)^2 + c_3 (\tau_0 - \tau)^3 + \dots \end{array} \right.$$

worin die  $a_h$  und die  $c_h$  als gegeben anzusehen sind ( $a_0$  ist nach Annahme speciell gleich Null). Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (12) ein und führt die Integration von 0 bis  $\tau_0$  aus, so erhält man eine nach Potenzen von  $\tau_0$  fortschreitende Reihe, die für jedes  $\tau_0$  verschwinden soll; durch Nullsetzen der Factoren der verschiedenen Potenzen von  $\tau_0$  erhält man die Bestimmung der gesuchten  $b_h$  und somit die von  $\partial U / \partial \zeta$ .

Für die Ableitung der Sätze, auf die es bei meiner Untersuchung wegen der davon gemachten Anwendung besonders ankam, ist die Kenntnis der Werte von  $\partial U / \partial \zeta$  für  $\zeta = 0$  nicht erforderlich; es genügt, dass dieselben durch das für  $\zeta = 0$  gegebene  $U$  bestimmt sind. Die Gleichung (6) lässt sich bei ähnlicher Umformung, wie sie mit (10) vorgenommen ist, schreiben

$$(15) \quad U_C = \frac{1}{2} U_B - \frac{1}{2} \int_A^B \left( \varphi \frac{\partial U}{\partial \zeta} - U \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) d\tau$$

und man erkennt leicht, dass aus ihr wirklich die früher behaupteten Thatsachen folgen: der *Beginn* einer Bewegung der Ebene  $z=0$  pflanzt sich mit derselben Geschwindigkeit  $a$  fort, als wenn das Medium nicht absorbierte,  $b$  also gleich Null wäre; das *Ende* der Bewegung pflanzt sich gar nicht fort, insofern von der vorübergegangenen Erregung eine Nachwirkung bleibt, die erst nach unendlich langer Zeit verschwindet; die Schwingungsform ändert sich bei der Fortpflanzung.

Göttingen, October 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)

### 13. *Berechnung der Leitfähigkeit durchströmter Gase in der positiven Lichtsäule; von J. Stark.*

---

1. *Einleitung.* — Eine kürzlich erschienene Abhandlung<sup>1)</sup> hat die Leitfähigkeit durchströmter Gase zum Gegenstand; sie soll ergänzt werden durch die vorliegende Mitteilung.

Das Auftreten innerer elektromotorischer Kräfte in einem durchströmten Gase gestattet im allgemeinen nicht, dessen Leitfähigkeit nach den üblichen Methoden zu ermitteln. Eine Ausnahme hiervon macht jedoch die ungeschichtete positive Lichtsäule von grösserer Länge. In ihr ist nämlich auf relativ grosse Strecken die transversale Leitfähigkeit und das Gefälle constant; hieraus ist zu schliessen, dass in ihr das durchströmte Gas in einem gleichmässigen Zustand sich befindet und keine inneren elektromotorischen Kräfte besitzt. Für eine längere ungeschichtete positive Säule lässt sich darum die spezifische Leitfähigkeit  $\lambda$  aus der Spannungsdifferenz  $e$  zweier Querschnitte, deren Abstand  $l$  und Querschnitt  $q$  und der Stromstärke  $i$  berechnen. Es ist  $\lambda = i \cdot l / q \cdot e$ .

In dem vorstehenden Sinne ist die Leitfähigkeit durchströmter Gase im Folgenden berechnet worden. Als experimentelles Material sind dieser Berechnung zu Grunde gelegt die Messungen von A. Herz<sup>2)</sup> über den Potentialgradienten im positiven Teil der Glimmentladung. Unter Leitfähigkeit ist im Nachstehenden immer Leitfähigkeit in der ungeschichteten positiven Lichtsäule verstanden und zwar nur innerhalb des Druckgebietes von 1—7 mm.

Für den Leitungsstrom in Elektrolyten wird gesetzt  $\lambda = Ne(u + v)$ ;  $N$  bedeutet die Anzahl der freien positiven oder negativen Ionen,  $u$  bez.  $v$  die Geschwindigkeit des positiven bez. negativen Ions unter der Kraft Eins,  $e$  die Ladung.  $u$  und  $v$  sind dabei als gleichförmige Geschwindigkeiten ge-

---

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 3. p. 492. 1900.

2) A. Herz, Wied. Ann. 54. p. 254. 1895.



Zum Belege des Vorstehenden möge die folgende Tab. I nach Tab. III und IX von Herz) und die Fig. 1 dienen.

Tabelle I.

| Stickstoff.<br>Druck 6,8 mm,<br>Querschnitt 1,766 cm <sup>2</sup> . |                                       | Wasserstoff.<br>Druck 6,84 mm,<br>Querschnitt 1,766 cm <sup>2</sup> . |                                       |
|---|---------------------------------------|---|---------------------------------------|
| Stromdichte<br>Milliamp.  | Leitfähigkeit<br>$\lambda \cdot 10^6$ | Stromdichte<br>Milliamp.  | Leitfähigkeit<br>$\lambda \cdot 10^6$ |
| 0,458   | 3,29                                  | 0,364   | 3,47                                  |
| 0,566   | 4,17                                  | 0,459   | 4,42                                  |
| 0,676   | 5,08                                  | 0,665   | 6,52                                  |
| 0,798   | 6,08                                  | 0,813   | 8,06                                  |
| 0,906   | 6,99                                  | 0,890   | 8,86                                  |
| 1,019   | 7,98                                  | 1,055   | 10,60                                 |
| 1,132   | 9,02                                  | 1,165   | 11,80                                 |
| 1,359   | 11,00                                 | 1,320   | 13,80                                 |
| $\lambda \cdot 10^6 = \frac{j}{145,5 - 17,66 \cdot j}$              |                                       | $\lambda \cdot 10^6 = \frac{j}{106,1 - 8,83 \cdot j}$                 |                                       |

19  
12  
10  
2  
 $\lambda \cdot 10^6$

Fig. 1.





Stromes derjenige der Entladeröhre gesetzt. Dies ist wohl nur angenähert richtig. Aber davon abgesehen, müssen wir die schwach convexe Form der Curven in Fig. 2 aus zwei Gründen erwarten.

Einmal ist möglich, dass von einem Stromfaden eine Wirkung ausgeht, welche die Leitfähigkeit in benachbarten

*Stromdichte  $j = 10^{-1}$  Milliamp.*

Fig. 2.

Fäden erhöht. Dies müsste zur Folge haben, dass die Leitfähigkeit nicht bloss von der Stromdichte, sondern auch von dem Querschnitt des Stromes abhängt, nämlich bei gleicher Stromdichte in weiteren Querschnitten grösser ist als in engeren. Dieser Grund ist möglich, wahrscheinlich ist folgender. Ein durchströmtes Gas giebt an die Gefässwand Wärme oder kinetische Energie ab; insofern die kinetische Energie seiner



der Leitfähigkeit von der Stromdichte nicht abgeleitet werden durch Variation des Querschnittes, sondern muss ermittelt werden durch Variation der Stromstärke bei constantem Querschnitt; es hat demgemäss die Form

$$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a - bj}.$$

Die Constanten  $a$  und  $b$  ändern sich etwas mit dem Querschnitt; für verschieden weite Röhren erhält man also verschiedene Curven  $(\lambda, j)_i$  (vgl. Fig. 1); diese müssen geschnitten werden von den Curven  $(\lambda, j)_e$  (vgl. Fig. 2), da diese Punkte verbinden, die auf jenen liegen.<sup>1)</sup>

Im Anschluss an das Vorhergehende sei noch das Verhalten des Gefälles in verschieden grossen Querschnitten besprochen. Zwei cylindrische Röhren sollen verschiedenen Querschnitt haben, sie seien mit Gas von gleichem Druck gefüllt und hintereinander von dem gleichen Strom durchflossen. Würde auch für verschiedene Querschnitte wie für verschiedene Stromstärken die Leitfähigkeit durch

$$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a - bj}$$

als Function der Stromdichte dargestellt, so wäre das Gefälle in der weiten Röhre  $e_1 = a - bj_1$ , in der engen  $e_2 = a - bj_2$ . Da  $j_2 > j_1$  ist, so wäre das Gefälle in der engen Röhre kleiner als in der weiten. In Wirklichkeit ist nach der Formel

$$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a' + b'j}$$

für Variation des Querschnittes in dem angenommenen Fall  $e_1 = a' + b'j_1$ ;  $e_2 = a' + b'j_2$ . Und da  $j_2 > j_1$  ist, so ist in der engeren Röhre das Gefälle grösser als in der weiten.

Zu diesem Resultat sind bereits E. Wiedemann und G. C. Schmidt<sup>2)</sup> durch Messungen gekommen. Wegen der Kleinheit von  $b'j$  kann der Unterschied der Werte des Gefälles in zwei verschieden weiten Röhren nicht gross sein. Nach E. Wiedemann und G. C. Schmidt ist das Gefälle in einem Capillarrohr von 1 mm<sup>2</sup> Querschnitt nur 2—3 mal grösser als in einem Rohre von 1800 grösserem Querschnitt.

1) Diese Ueberlegung verdanke ich Hrn. Geheimrat E. Riecke.

2) E. Wiedemann und G. C. Schmidt, Wied. Ann. 66. p. 323 bis 324. 1898.





**mm Druck**

**Fig. 4.**

In der Formel

$$\lambda = \frac{j}{a - bj},$$

welche die Leitfähigkeit als Function der Stromstärke darstellt, sind die Grössen  $a$  und  $b$  als Functionen des Druckes  $p$  zu betrachten. Nach den von Herz gegebenen Zahlen kann mit grosser Annäherung

$$a = \alpha p, \quad b = \beta - \frac{\gamma}{p}$$

gesetzt werden. Wie man sieht, nimmt die Curve  $(p, \lambda)$  mit abnehmender Stromdichte mehr und mehr die Form einer gleichseitigen Hyperbel an.



14. *Kritisches zur Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung;*  
*von E. Jahnke, O. Lummer und E. Pringsheim.*

Durch die spectrobolometrischen Untersuchungen von O. Lummer und E. Pringsheim<sup>1)</sup> ist mit Sicherheit nachgewiesen worden, dass die Wien'sche Spectralgleichung die Energieverteilung im Spectrum des schwarzen Körpers nicht allgemein darstellt. In voller Uebereinstimmung hiermit stehen die Versuche von Beckmann<sup>2)</sup> und von Rubens und Kurlbaum.<sup>3)</sup> Infolge dieser experimentellen Resultate sieht M. Planck<sup>4)</sup> seine theoretische Ableitung der Wien'schen Spectralgleichung nicht mehr als zwingend an, Wien selbst anerkennt, dass für lange Wellen Abweichungen von seinem Gesetze beobachtet worden sind, und auch Paschen<sup>5)</sup> scheint jetzt das Vorhandensein solcher Abweichungen zuzugeben, obgleich seine bisher publicirten Versuche<sup>6)</sup> das Wien'sche Strahlungsgesetz mit überraschender Genauigkeit selbst bei hohen Temperaturen und bis zu Wellenlängen von  $9\ \mu$  bestätigt haben.

1. Trotzdem macht Wien den Versuch<sup>7)</sup>, die von ihm gegebene Herleitung seiner Spectralgleichung wenigstens teilweise aufrecht zu erhalten, da sie die schwarze Strahlung für kurze Wellen innerhalb der Beobachtungsfehler darstelle. Daher hält er es für wahrscheinlich, dass die von ihm gemachten

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 23—41 und p. 215—235. 1899; ferner 2. p. 163—180. 1900.

2) H. Beckmann, Inaugural-Dissertation, Tübingen 1898; vgl. auch H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 576—588. 1899.

3) H. Rubens u. F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1900. p. 929—941.

4) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 2. p. 202—204. 1900.

5) Vgl. Anm. 1 auf p. 202 der citirten Planck'schen Arbeit.

6) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1899. p. 405—420 und p. 959—976. Vgl. auch F. Paschen und H. Wanner, l. c. p. 5—11. 1899.

7) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 530—539. 1900.





werden, welche die Strahlung dadurch erleidet, dass sie im Hohlraume eingeschlossen ist. Nur durch diese von dem Einflusse der Absorption und Reflexion herrührenden Veränderungen verwandelt sich jede *beliebige* Strahlung — hier die des Gases — in diejenige des *schwarzen* Körpers. Wenn man statt des strahlenden Gases irgend einen anderen Körper, z. B. ein glühendes Platinblech, in den spiegelnden Hohlraum einführen würde, so würde man durch die Wien'sche Schlussfolgerung dazu gelangen, die Strahlung des schwarzen Körpers auch mit der des freistrahenden Platins zu identificiren.

Bei der früheren Kritik<sup>1)</sup> dieses Verfahrens haben wir darauf hingewiesen, dass es bei der Gasstrahlung im spiegelnden Hohlraum unzulässig ist, die Strahlungsenergie  $E_\lambda$  der *Anzahl* der Molecüle proportional zu setzen, welche Strahlen der Wellenlänge  $\lambda$  aussenden. Auf diesen Einwurf antwortet Wien<sup>2)</sup>: „dass die Anzahl der Molecüle durch den zweiten Hauptsatz notwendig wird, weil die Irreversibilität und damit die Herstellung des Wärmegleichgewichtes nur erst durch das Zusammenwirken einer grossen Anzahl von Molecülen hervorgerufen wird. Bei einer geringen Anzahl würde sich überhaupt kein Gleichgewichtszustand der Strahlung herstellen.“

Diese Motivirung trifft jedoch nicht den erhobenen Einwand. Denn selbst wenn man zugiebt, dass die Anwendung des zweiten Hauptsatzes eine grosse Anzahl von Molecülen verlangt, so lässt sich damit doch unmöglich die der Kirchhoff'schen Hohlraumtheorie widersprechende Wien'sche Hypothese rechtfertigen, dass die Strahlungsenergie des Gases im spiegelnden Hohlraum *proportional der Anzahl* der Molecüle ist. Diese Annahme hat höchstens für ein *freistrahendes* Gas einen Sinn.

Die Uebertragung der Michelson'schen Hypothesen von einem festen Körper auf ein Gas muss daher als missglückt angesehen werden. Die weitere Wien'sche Herleitung kann somit höchstens unter der auch von Michelson gemachten Annahme aufrecht erhalten werden, dass das Maxwell'sche

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 31. 1899.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 536. 1900.



einfach. Aber diese Annahme genügt keineswegs, um das Fortlassen von  $T^{-5}$  als „wohlbegründet“ erscheinen zu lassen.

Eine solche Begründung ist vielmehr unmöglich, da dieses Fortlassen nicht nur willkürlich ist, sondern mit der Einführung einer *weiteren, durch die Erfahrung widerlegten, Hypothese* gleichbedeutend ist. Der Bedingung, dass  $E$  mit wachsendem  $T$  nicht abnehme, wird schon genügt durch Einführung der *unbestimmten* Function  $f(T)$ . Diese führt aber zu folgendem Specialfall der Lummer-Jahnke'schen Gleichung

$$E = C T^{5-\mu} \lambda^{-\mu} e^{-\frac{c}{\lambda T}},$$

wo der unbestimmte Exponent  $\mu$  jede positive Zahl gleich oder kleiner als 5 bedeutet. Will man zu einer *bestimmten* Spectralgleichung gelangen, so muss man mit Hülfe einer *neuen* Hypothese den Wert von  $\mu$  specialisiren. So geht die allgemeine Formel für  $\mu = 5$  in die Wien'sche über. Diese Specialisirung von  $\mu$  ist identisch mit der Hypothese

$$\lim_{T=\infty} E = \text{endlich.}$$

Gegen diese Hypothese aber spricht die Erfahrung, denn die Versuche von Rubens und Kurlbaum für lange Wellen zeigen, dass die von der Wien'schen Gleichung für jede Wellenlänge geforderte *endliche* Grenze der Strahlungsenergie:

$$\text{const.}/\lambda^5$$

schon bei mässigen Temperaturen überschritten wird.

Benutzt man statt dieser Hypothese die von der Erfahrung besser gestützte Beziehung

$$[\lim E = \text{const. } T]_{T=\infty},$$

so wird in der obigen Lummer-Jahnke'schen Gleichung  $\mu = 4$ , und man erhält aus ihr die Rayleigh'sche Formel<sup>1)</sup>

$$E = C T \lambda^{-4} e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Da auch diese keine allgemeine Gültigkeit hat, so sieht man, dass der von Michelson eingeschlagene Weg überhaupt zu keiner allgemein gültigen Spectralgleichung führt.

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 49. p. 539. 1900.

4. Gegenüber den Worten Wien's<sup>1)</sup>: „Weshalb dadurch (es ist das Fortlassen von  $T^{-3/2}$  gemeint) der physikalische Sinn des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes verloren gehen soll, habe ich nicht verstehen können“, werde ausserdem darauf hingewiesen<sup>2)</sup>, eine wie untergeordnete Rolle bei der Wien'schen Herleitung die von ihm als erforderlich genannten Hypothesen spielen. Wien wäre zu seiner Spectralgleichung auch gelangt, wenn er einfach die Strahlungsenergie proportional dem Factor

$$e^{-\frac{\varphi(\lambda)}{T}}$$

gesetzt und zur Bestimmung der unbekannten Functionen das Stefan'sche Gesetz, das Wien'sche Verschiebungsgesetz und die Hypothese

$$\lim_{T=\infty} E = \text{endlich}$$

hinzugenommen hätte. Dieser Factor hat aber offenbar nur noch eine weitläufige Verwandtschaft mit dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz. Die Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung entbehrt somit des theoretischen Charakters.

Wir fassen zum Schluss unsere Bemerkungen dahin zusammen, dass Wien's Erwiderung nicht geeignet ist, unsere Einwände zu entkräften, und dass die Wien'sche Herleitung auch nicht für das Gebiet der kurzen Wellen aufrecht erhalten werden kann. Aber auch wenn Wien's Spectralgleichung das wahre Gesetz der schwarzen Strahlung für alle Werte von  $\lambda$  und  $T$  darstellen würde, hätte man kein Recht, auf die Gültigkeit der zu Grunde gelegten Hypothesen zu schliessen, da diese nur eine untergeordnete Rolle bei der Herleitung spielen.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 537. 1900.

2) Vgl. O. Lummer u. E. Jahnke, l. c. p. 290 u. 296.

(Eingegangen 12. December 1900.)

## 15. *Zur Geschichte der Telegraphie;* *von L. Lewin.*

Vor einiger Zeit fiel mir, bei toxicologischen Studien, in einem nicht häufig vorkommenden Werke: „De L’Ancre, L’incrédulité et mescreance du sortilege plainement convaincue, Paris 1622“ eine Notiz auf, die vielleicht verdient, weiteren Kreisen bekannt gemacht zu werden.

Unter den verschiedenen Arten der Weissagekunst, Zauberei und anderem abergläubischen Spuk führt der Verfasser auch die *Arithmantie* an, und, um zu erläutern was sie sei, erzählt er die folgende Begebenheit, die ich wörtlich anführen will:

„A l’Arithmantie se peut aussi rapporter, ce grand et beau secret qu’un Allemand fit voir au roy Henry le Grand, qui est l’industrie et dexterité de faire parler et entendre les hommes absens pour esloignez qu’ils soient, et ce par le moyen de l’Aimant. Il frota premierement deux aiguilles d’Aimant, et puis les attacha separément en deux diuers horloges, autour desquels estoient escrites et grauées en rond les vingt et quatre lettres de l’Alphabet: Si bien que lors qu’on vouloit dire ou faire entendre ce qu’on desiroit: on remuoit et dressoit la pointe de l’esguille sur les lettres qui estoient necessaires pour composer et signifier tous les mots et parolles qu’il falloit: et à mesure qu’on tournoit et dressoit une esguille, celle de l’autre horloge pour si distant et separé qu’il fust, suiuito entierement ce mesme mouuement. Le Roy voyant un si beau secret luy deffendit de le diuulguer, comme *pouvant porter des tres-dangereux aduertissemens és armées et villes assiegées*. Outre que Mardobée qui traicte de la nature de l’Aimant en reprouue et prohibe la communication.“

Es ist von dem in Mystik, Aberglauben und in Hass gegen die Vernunft befangenen Verfasser des Buches nicht zu verlangen, dass er jene Einrichtung eines Zeigertelegraphen genauer kannte. So viel scheint immerhin aus dieser Mitteilung

hervorzugehen, dass durch diese deutsche Erfindung schon ca. 300 Jahren eine Verständigung in der Schriftsprache grössere Entfernungen hin mittels magnetischer Kräfte möglich wurde. Besonders interessant ist es, dass gerade praktische Nutzanwendung dieser Erfindung für Kriegszwecke in den Vordergrund gestellt wird, und es wäre wichtig festzustellen, ob der König Heinrich IV. oder andere später dieser Erfindung Gebrauch gemacht haben.

(Eingegangen 30. October 1900.)

— . . . —

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 4.

### 1. *Der elektromagnetische Rotationsversuch und die unipolare Induction*<sup>1)</sup>; von *E. Hagenbach*.

Hr. Lecher<sup>2)</sup> beschreibt einige Versuche, welche ihn veranlassen, die in den Lehrbüchern gewöhnlich gegebene Erklärung mancher Rotationsversuche für einen „theoretischen und experimentellen Trugschluss“ zu erklären. Da ich mit den Behauptungen des Hrn. Lecher nicht einverstanden bin, so habe ich in Verbindung mit Hrn. H. Veillon eine Anzahl Versuche angestellt, um Aufschluss zu erhalten über die so verschieden aufgefassten Vorgänge, die sich einerseits beziehen auf die elektromagnetischen Rotationsversuche, wie sie bald nach der Oersted'schen Entdeckung von Faraday<sup>3)</sup> und Ampère<sup>4)</sup> zuerst angestellt und untersucht und dann durch viele Forscher in mannigfacher Weise wiederholt und modificirt worden sind, und andererseits auf die damit zusammenhängenden Inductionerscheinungen, die von Wilh. Weber<sup>5)</sup> mit dem vielleicht nicht ganz passenden Namen der unipolaren Induction bezeichnet worden sind. Die Beziehungen zwischen Strom und Magnetismus finden einen klaren, bestimmten Ausdruck im Biot-Savart'schen Gesetze; es entsteht somit in erster Linie die Frage, ob die beobachteten Erscheinungen aus diesem Gesetze erklärt werden können;

1) Programm der Rectoratsfeier der Universität Basel. 1900.

2) E. Lecher, Wied. Ann. 69. p. 781. 1899.

3) M. Faraday, Exp. Research. 2. p. 127. 1821.

4) A. M. Ampère, Ann. de chim. et de phys. 20. p. 60. 1822; 37. p. 113. 1828; Collection de mémoires relatifs à la physique, publiés par la société française de physique 2. p. 192. 1885; 3. p. 246 u. 275. 1887.

5) W. Weber, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, herausgegeben von Gauss u. Weber p. 63. 1839; Pogg. Ann. 52. p. 853. 1841.









nimmt, dass die Energie zur Leistung der mechanischen Arbeit vom Strome geliefert werden muss. Es kann somit ohne Widerspruch auch für den Fall, dass Magnetpol und Stromelement dem gleichen starren Körper angehören, das Biot-Savart'sche Gesetz Verwendung finden; und wir wollen nun sehen, was aus dieser Auffassung für die Bewegung unseres Magnets durch den Strom und für die durch Drehung des Magnets inducirte elektromotorische Kraft folgt.

Um die Rechnung zu vereinfachen, ersetzen wir den wirklichen Magnet durch einen ideellen Magnet, der in der Distanz  $2l$  zwei gleich starke Pole hat, den Nordpol von der Stärke  $+\mu$  unten, und den Südpol von der Stärke  $-\mu$  oben. Wir denken uns also den ganzen freien Nordmagnetismus concentrirt in einem horizontalen Querschnitt beim Nordpol und den ganzen freien Südmagnetismus in einem horizontalen Querschnitt beim Südpol. Wenn schon diese Annahme den wirklichen Verhältnissen nicht entspricht, so können dennoch die daraus abgeleiteten Folgerungen in Bezug auf die Grösse als eine erste Annäherung betrachtet werden. Für die Entscheidung der Hauptfrage, ob und wie durch innere Kräfte eine Drehung unseres Apparates zu stande kommt, ist es ganz gerechtfertigt, die für den ideellen Magnet berechneten Wirkungen auch für den wirklichen Magnet anzunehmen, da wir ja den wirklichen Magnet auffassen können als eine Uebereinanderlagerung von unendlich vielen gleichgerichteten ideellen Magneten, die mit den Indifferenzpunkten aufeinander liegen, deren Längen von Null bis zur Länge des wirklichen Magnets variiren und deren Polstärken der Intensität des freien Magnetismus an den entsprechenden Punkten proportional sind.

Wir nehmen nun an, dass ein Strom von der Intensität  $i$  in der Mitte des Magnetstabes durch einen horizontalen Draht zugeleitet und am oberen Ende des Magnets jenseits des Südpoles durch einen verticalen Draht abgeleitet wird, wie

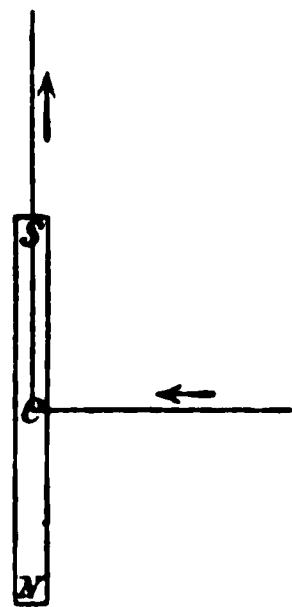


Fig. 2.

dies in Fig. 2 angedeutet ist; nur muss man sich denken, dass der elektrische Strom im Magnet nicht in einer Linie, sondern in der ganzen Breite des Magnets fliesst. Die Wirkung der äusseren horizontalen Zuleitung auf den Nordpol und den Süd-



Wenn der Strom  $i$  das Drehungsmoment  $D$  giebt, so muss, wie wir oben schon gezeigt haben, infolge des Satzes der Erhaltung der Energie durch Induction eine dem Strom  $i$  entgegenwirkende elektromotorische Kraft  $e$  erzeugt werden, deren elektrische Arbeit für jede Zeit und somit auch für die Zeiteinheit gleich und entgegengesetzt ist der mechanischen Arbeit des Drehungsmomentes; wenn wir also die Winkelgeschwindigkeit mit  $\omega$  bezeichnen, so haben wir:

$$D \omega = - e i,$$

oder

$$\frac{D}{i} = - \frac{e}{\omega};$$

wir bezeichnen  $D/i$ , das heisst das von dem Strom *eins* erzeugte Drehungsmoment mit  $D_1$  und  $e/\omega$ , das heisst die bei der Winkelgeschwindigkeit *eins* erzeugte elektromotorische Kraft mit  $e_1$  und haben dann ganz allgemein bei jedem drehbaren starren Körper, der freien Magnetismus enthält und von einem Strome durchflossen wird, die einfache Beziehung

$$D_1 = - e_1.$$

Das umgekehrte Zeichen von  $D_1$  und  $e_1$  besagt, dass bei gleichgesinnter Drehung der treibende Strom und die inducirte elektromotorische Kraft in entgegengesetztem Sinne gehen.

Im vorliegenden Fall ist

$$D_1 = - e_1 = - 2 \mu.$$

Um das Ergebnis der Versuche mit dem Resultate der Theorie zu vergleichen, war es vor allem nötig, die Grösse  $\mu$  zu bestimmen. Wir haben dieselbe aus dem magnetischen Momente abgeleitet, indem wir die Poldistanz gleich  $\frac{5}{6}$  der Magnetlänge, also im vorliegenden Fall gleich 12,5 cm annahmen.

Die magnetischen Momente der von uns angewandten Magnete bestimmten wir aus den Ablenkungen in der ersten Hauptlage unter Annahme der von Hrn. H. Veillon für unser Laboratorium bestimmten Horizontalcomponente des Erdmagnetismus. Es ergab sich für den einfachen Magnet von 15 cm

$$\mu = 148 \text{ C}^2 / \text{G}^{1/2} \text{ S}^{-1}.$$









in der Nähe des Poles schnell abnehme, wie die folgenden Zahlen zeigen; es sind dieselben durch graphische Interpolation aus den Ablenkungen erhalten, die beim Anlegen des Drahtes in verschiedenen Abständen von der Mitte des Magnets erhalten worden sind.

|   |     |     |     |     |     |     |     |    |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| Abstand der Ableitungsstelle<br>des Drahtes von der Mitte des<br>Magnets in Centimetern | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7  |
| Beobachtete elektromotorische<br>Kraft für die Winkelgeschwin-<br>digkeit eins          | 322 | 317 | 307 | 284 | 254 | 215 | 163 | 90 |

Solche Beobachtungen sind wohl sehr gut geeignet, die Verteilung des freien Magnetismus in einem Magnetstab zu untersuchen; es hat darauf schon Wilh. Weber<sup>1)</sup> in seiner Abhandlung über die unipolare Induction aufmerksam gemacht.

Man kann auch mit der Vorstellung der Kraftlinien über die Entstehung der elektromotorischen Kraft bei einem ideellen und bei einem wirklichen Magnet in der folgenden Weise sich Rechenschaft geben.

Wenn  $S$  und  $N$  in Fig. 4a die Pole eines linearen ideellen Magnets sind, d. h. eines solchen, bei welchem der ganze Nordmagnetismus  $+\mu$  in einem Punkte  $N$  und der ganze Südmagnetismus  $-\mu$  in einem Punkte  $S$  concentrirt ist, so gehen alle Curven der Kraftlinien von dem einen Pole aus und verlaufen, ohne sich zu schneiden, nach dem anderen Pole, in welchem sie wieder alle zusammentreffen; die Zahl dieser Kraftlinien ist  $4\pi\mu$ . Nun sei  $ABD$  eine beliebige mit dem Magnet fest verbundene Strombahn, die zwei auf der Axe liegende Punkte miteinander verbindet, von welchen  $D$  ausserhalb des Poles  $S$  und  $A$  zwischen den beiden Polen

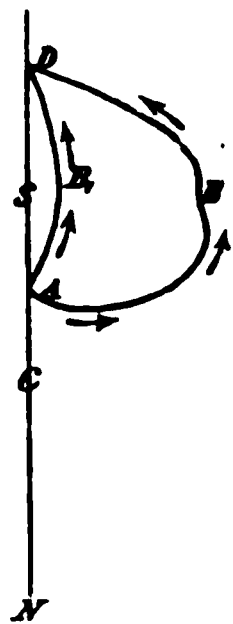


Fig. 4a.

liegt. Magnet und Strombahn werden um die Axe  $SCN$  gleichförmig gedreht. Wenn in der Secunde eine ganze Umdrehung stattfände, so würden alle  $4\pi\mu$  Kraftlinien von der Strombahn  $ABD$  einmal oder eine ungerade Anzahl mal geschnitten, und es wäre die erzeugte elektromotorische Kraft  $4\pi\mu$ ;

1) W. Weber, Pogg. Ann. 52. p. 382. 1841.



kung des Stromes auf den Nordpol  $N$  entsteht; die drehende Wirkung ist also Null und ebenso auch die durch Rotation erzeugte elektromotorische Kraft. Der Versuch hat diese selbstverständlichen Folgerungen bestätigt.

Es wurden nun ganz gleiche Versuche mit einem halb so langen Magnet gemacht, der nach beiden Seiten durch messingene Fortsätze verlängert war und somit in den gleichen Rahmen eingesetzt werden konnte.

Die Magnetismusmenge  $\mu$  wurde zu 91,8 bestimmt zu der Zeit der Versuche über Induction und zu 76,5 zu der Zeit der Versuche über das Drehungsmoment.

Das berechnete Drehungsmoment für den Strom *eins* ist somit 153, der Versuch mit Bifilarsuspension ergab 162.

Die Versuche über Induction ergaben für  $e_1$  die Grösse 180 bei der Magnetismusmenge 91,8, oder 150, wenn wir  $e_1$  auf die Magnetismusmenge 76,5 reduciren.

Wir stellen nochmals die Zahlen der Berechnung und der Versuche für die beiden centrisc eingesetzten Magnete mit directer Zuleitung des Stromes in der Mitte zusammen:

|                   | $\mu$ | $2\mu$ | $D_1$ | $e_1$ |
|-------------------|-------|--------|-------|-------|
| Magnet von 15 cm  | 148   | 296    | 322   | 320   |
| Magnet von 7,5 cm | 76,5  | 153    | 162   | 150   |

Die für  $D_1$  und  $e_1$  gefundenen Zahlen sollten, ganz abgesehen von der Auffassung, die wir über die Wirkungsweise haben, genau miteinander übereinstimmen, sobald das Lenz'sche Reciprocitätsgesetz zwischen ponderomotorischer und elektromotorischer Wirkung seine Geltung hat; die Unterschiede rühren offenbar daher, dass die vorhandenen Umstände des etwas primitiv ausgeführten Apparates und die verschiedenen störenden Einflüsse nicht eine hinlänglich genaue Bestimmung der zu messenden Grössen zulassen. Aus dem Ergebnis, dass die durch Beobachtung gefundenen Werte von  $D_1$  und  $e_1$  nur um wenig grösser sind als  $2\mu$ , darf auf die Richtigkeit unserer Auffassung geschlossen werden, besonders wenn man auch den schon besprochenen Unterschied des ideellen und wirklichen Magnets in Betracht zieht.

Wir haben nun weitere Versuche angestellt mit dem gleichen centrisc eingesetzten Magnet; nur haben wir den



Es mussten deshalb sowohl bei dem grösseren als bei dem kleineren Magnet die Drehungsmomente, wenn der Strom aus der Rinne zugeleitet wurde, um

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}}$$

kleiner werden; die Versuche haben das vollkommen bestätigt, sowohl in betreff der Drehungsmomente als der inducirten elektromotorischen Kräfte, wie die folgenden Zahlen zeigen:

|                   | $\mu$ | $2\mu \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}}$ | $D_1$ | $e_1$ |
|-------------------|-------|--|-------|-------|
| Magnet von 15 cm  | 148   | 225  | 229   | 240   |
| Magnet von 7,5 cm | 76,5  | 77   | 85    | 76    |

Auch hier weichen  $D_1$  und  $e_1$  von dem durch die Theorie bestimmten Wert nicht mehr ab als unter sich. Wir dürfen also annehmen, dass die nicht sehr bedeutenden Abweichungen aus den mit der Unvollkommenheit des Apparates zusammenhängenden Störungen sich rechtfertigen lassen.

Wenn wir in der obigen Formel  $R$  unendlich werden lassen, so wird das Drehungsmoment  $D_1$  gleich Null. Das muss so sein, da in diesem Fall der Strom im Unendlichen geschlossen ist und nach dem weiter unten bewiesenen Satze die drehende Einwirkung eines geschlossenen mit dem Magnet fest verbundenen Leiters Null ist.

Wir betrachten nun ferner den Fall, dass der in einem mit dem Magnet fest verbundenen Leiter fließende Strom nicht nur aus einer horizontalen Strecke besteht, sondern aus horizontalen und verticalen Strecken zusammengesetzt ist oder auch eine ganz beliebige Gestalt hat.

In Fig. 6 sei  $NS$  ein linearer ideeller Magnet,  $N$  der Nordpol,  $S$  der Südpol und  $C$  die Mitte.  $B$  ist ein Punkt auf der Axe ausserhalb  $S$  im Abstände  $a$ . Der Strom geht in

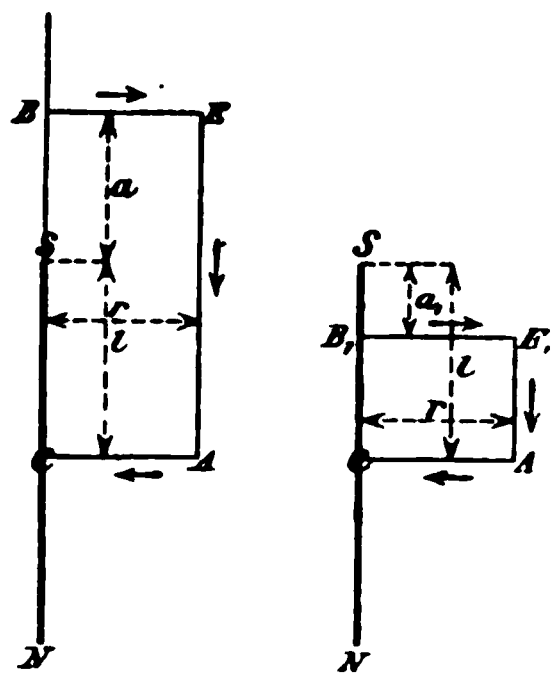


Fig. 6.

einer mit dem Magnet fest verbundenen Leitung horizontal von  $B$  nach dem um  $r$  abstehenden Punkte  $E$  und von  $A$  nach  $C$  und vertical von  $E$  nach  $A$ . Die Rechnung nach dem Biot-Savart'schen Gesetze giebt uns für die Drehungsmomente  $D_1$  folgendes:

Wirkung zwischen Magnet und  $AC$ :

$$2\mu \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} \right),$$

Wirkung zwischen Magnet und  $EA$ :

$$\mu \left( \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l+a}\right)^2}} \right),$$

Wirkung zwischen Magnet und  $BE$ :

$$\mu \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l+a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}} \right),$$

und daraus folgt:

Wirkung zwischen Magnet und  $BEAC$ :  $2\mu$ .

Wir haben früher gesehen, dass wenn der Strom im Magnet von  $C$  nach  $B$  geht,  $D_1$  gleich  $-2\mu$  ist; es folgt also daraus, dass die Wirkung die gleiche ist, wenn der Strom im Magnet von  $B$  nach  $C$  geht, als wenn er in dem mit dem Magnet fest verbundenen Leiter von  $B$  über  $E$  und  $A$  nach  $C$  geht.

Wir nehmen nun einen Punkt auf der Axe innerhalb  $S$  im Abstand  $a_1$  und bezeichnen ihn mit  $B_1$  und nehmen an, der Strom gehe horizontal von  $B_1$  nach  $E_1$  und von  $A$  nach  $C$  und vertical von  $E_1$  nach  $A$ ; dann erhalten wir für die Drehungsmomente  $D_1$  folgendes:

Wirkung zwischen Magnet und  $AC$ :

$$2\mu \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} \right).$$

Wirkung zwischen Magnet und  $E_1A$ :

$$\mu \left( \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a_1}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l-a_1}\right)^2}} \right).$$

Wirkung zwischen Magnet und  $B_1 E_1$ :

$$\mu \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a_1}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2l - a_1}\right)^2}} - 2 \right).$$

und daraus folgt:

Wirkung zwischen Magnet und  $B_1 E_1 AC$ : Null.

Aus diesen Resultaten können wir den folgenden Satz ableiten:

Wenn ein beliebiger auf der Axe zwischen den Polen liegender Punkt  $G$  durch horizontale und verticale vom Einheitsstrom durchflossene Bahnstrecken mit einem zweiten auf der Axe liegenden Punkte  $B$  fest verbunden ist, so ist das Drehungsmoment gleich  $2\mu$ , wenn  $B$  ausserhalb der Pole, und gleich Null, wenn  $B$  innerhalb der Pole liegt. Der Satz gilt auch, wenn wir durch mehrere sich aneinander anschliessende horizontale und verticale Linien von  $G$  nach  $B$  gelangen, und da wir ferner eine beliebige Curve aus unendlich kleinen horizontalen und verticalen Linienelementen uns zusammengesetzt denken können, so kann unser Satz folgende Form annehmen:

Das aus der Wechselwirkung eines Magnets und eines Einheitsstromes, der in einer beliebigen mit dem Magnet fest verbundenen Bahn zwei Punkte der Axe miteinander verbindet, entstehende Drehungsmoment ist gleich  $2\mu$ , wenn der eine Punkt zwischen den beiden Polen und der andere ausserhalb derselben liegt, und gleich Null, wenn die beiden Punkte innerhalb oder ausserhalb der Pole liegen.

Es folgt daraus weiter:

Wenn eine ganz beliebige vom Einheitsstrom durchflossene und fest mit dem um seine Axe drehbaren Magnet verbundene Strombahn zwei willkürlich gewählte Punkte  $H$  und  $K$  miteinander verbindet, so hängt das aus der Wechselwirkung von Magnet und Strom entstehende Drehungsmoment nur ab von der Lage der Punkte  $H$  und  $K$ , keineswegs aber von der Gestalt und Länge der Strombahn.

Es ergibt sich das aus Fig. 6. Wir verbinden  $E_1$  mit  $E$  durch eine ganz beliebige Strombahn. Die Wirkung von  $S$  auf  $B_1 E_1 EB$  ist gleich  $2\mu$  und somit die Wirkung auf die





wird, so sind die *ein* mal oder eine ungerade Anzahl mal durchschnittenen Kraftlinien proportional den Kraftlinien, die in der Ebene zwischen den punktirten Linien liegen. Da diese nur abhängen von der Lage der Punkte  $H$  und  $K$ , so gilt das Gleiche von  $D_1$  und  $e_1$ . Die gleiche Betrachtung kann angestellt werden, wenn  $H$  und  $K$  nicht mit dem Magnet in einer Ebene liegen.

Dieser letzte Satz gilt, wie leicht ersichtlich ist, nicht nur für einen ideellen, sondern auch für einen ganz beliebigen wirklichen Magnet; wir haben denselben durch folgende Versuche bestätigt gefunden.

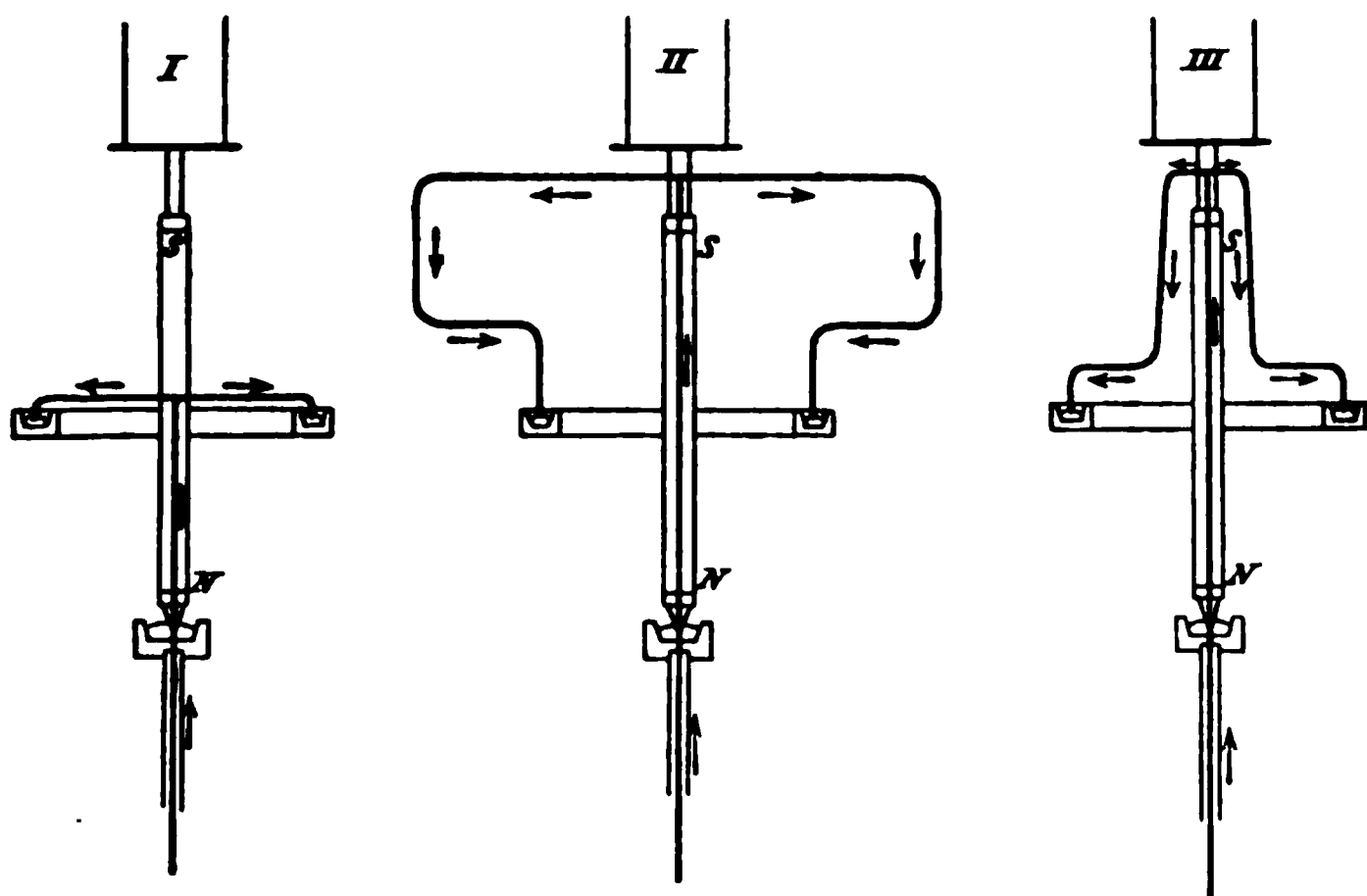


Fig. 9.

In Fig. 9 wird durch die stark ausgezogenen Linien angedeutet, wie bei dem gleichen bifilar aufgehängten Magnet auf den drei sehr verschiedenen Wegen *I*, *II* und *III* der Strom vom Quecksilbernapf unten, in welchen die verlängerte Axe eintauchte, zu den gleichen Stellen der Quecksilberrinne geleitet wurde. In allen drei Fällen zeigte sich eine sehr starke Ablenkung nach der gleichen Seite, und in den drei Fällen verhielten sich die gemessenen Drehungsmomente wie:

$$\begin{array}{ccc} I & II & III \\ 100 & : 99,2 & : 100,3. \end{array}$$

Diese Gleichheit der Wirkung zeigte sich auch bei der Bestimmung der elektromotorischen Kraft durch Induction mit







Die kräftige Drehung des Apparates durch einen Strom von 10—20 Ampère bei den Combinationen *I*, *II* und *III* und das vollkommene Stillstehen bei der Combination *IV* ist leicht zu zeigen. Diese vollständige Wirkungslosigkeit in der Combination *IV* hat sich auch bei den Versuchen des Hrn. Lecher<sup>1)</sup> gezeigt. Nur in der Erklärung der Wirkungslosigkeit gehen Hr. Lecher und ich weit auseinander; nach Hrn. Lecher soll die Wirkungslosigkeit der axialen Zuleitung in der unteren Hälfte dargethan werden, während nach meiner Auffassung die Wirkung des durchgeleiteten Stromes in der unteren Hälfte aufgehoben wird durch die genau gleiche aber entgegengesetzte Wirkung in der oberen Hälfte.

Bei den Versuchen über Inductionswirkung wurden die Combinationen *I* und *II* in der Art miteinander verglichen, dass der eine Draht an die Rinne angeschlossen und der andere abwechselungsweise oben und unten mit Punkten der Axe verbunden wurde. Das Mittel aus drei Ablesungen bei der Verbindung oben verhielt sich zum Mittel aus drei Ablesungen bei der Verbindung unten wie 100 zu 100,7, ein Unterschied, der aus den Beobachtungsfehlern sich vollauf erklärt. Auch wurde der Versuch so angestellt, dass man durch Umschalten einer Wippe, während der Apparat gleichförmig weiter rotirte, den Galvanometerdraht bald oben bald unten anschloss, dabei zeigte sich bei einer Ablenkung von mehr als 400 Teilstrichen eine nur ganz minime Aenderung, die offenbar von dem verschiedenen Widerstand oder störenden Thermoströmen herührte.

Der Vergleich der Induction bei den Combinationen *II* und *III* gab das der Gleichheit sehr nahe Verhältniss 100 : 101,5.

Bei der Combination *IV* erhielt man selbstverständlich keine Inductionswirkung.

Die folgenden Versuche über die Bestimmung des Drehungsmomentes mit Bifilarsuspension gaben ganz entsprechende Resultate.

Das Verhältniss des Mittels aus acht Beobachtungen bei Combination *I* zum Mittel aus vier Beobachtungen bei Combination *II* wurde wie 100 zu 101,6, und bei einer anderen Versuchs-

---

1) E. Lecher, Wied. Ann. 54. p. 283. Fig. 4. 1895; 69. p. 781. Fig. 1. 1899.



leiten, wenn man eine kräftige Drehung haben will. Bei den Combinationen  $E$  und  $F$  tritt absolut keine Wirkung ein.

Die Versuche über Induction ergaben für  $A, B, C, D$  Werte, die sich verhielten wie

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 100 & 99,7 & 101,8 & 102,9, \end{array}$$

und die Versuche über Ablenkungen bei Bifilarsuspension Werte, die sich verhielten wie

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 100 & 102,8 & 102,4 & 96,4. \end{array}$$

Aus diesen Zahlen darf auf Gleichheit der Wirkung geschlossen werden, da die verhältnismässig kleinen Abweichungen den durch die verschiedenen Störungen erzeugten Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden dürfen. Auch machen wir noch darauf aufmerksam, dass die Abweichungen bei den durch Induction und bei den durch Bifilarsuspension gefundenen Zahlen durchaus nicht parallel gehen. Dass in Bezug auf den Sinn der elektromotorischen Kräfte und der Drehungsmomente der Versuch mit der Theorie stimmte, ist selbstverständlich.

Für die Combinationen  $E$  und  $F$  war sowohl die Induction bei der Rotation des Apparates als die Drehung beim Leiten des Stromes durch den bifilar aufgehängten Apparat vollkommen Null.

Wir haben noch für den Apparat mit Doppelmagnet zu zeigen, inwiefern die aus der Theorie berechneten Drehungsmomente mit den durch den Versuch durch Bifilarsuspension ermittelten stimmten. Wir müssen also aus dem Biot-Savart'schen Gesetze ableiten, wie gross in diesem Fall das aus den inneren Kräften entstehende Drehungsmoment  $D_1$  ist, und ferner untersuchen, ob hier der Strom in den äusseren, fest bleibenden Zuleitungsdrähten und in der Rinne einen Einfluss auf die Drehung der Magnete ausübt und wie gross derselbe ist.

Wir bezeichnen mit  $R$  (Fig. 11) den Radius der Rinne oder die Länge des fest mit den Magneten verbundenen Zuleitungsdrahtes, mit  $r$  den halben Abstand der Magnete, mit

$l$  den halben Polabstand, mit  $\mu_\alpha$  und  $\mu_\beta$  die Polstärken der Magnete  $\alpha$  und  $\beta$ .

Der mit den Magneten verbundene verticale Zuleitungsdraht setzt sich fort in einem festen verticalen Zuleitungsdraht, den wir als unendlich betrachten können; das Drehungsmoment, das aus der Wirkung zwischen dem Magnet  $\alpha$  und dem aus dem Unendlichen bis  $m$  gehenden Mitteldraht entsteht, erhalten wir, wenn das  $E$  in Fig. 6 ins Unendliche versetzt und somit  $a$  gleich  $\infty$  gesetzt wird, es giebt das:

$$D_1 = \frac{2 \mu_\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}};$$

für die Wirkung zwischen dem Magnet  $\alpha$  und der horizontalen mit dem Magnet drehbaren Zuleitung  $R$  ergiebt die Rechnung nach dem Biot-Savart'schen Gesetz:

$$D_1 = -2 \mu_\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}} \right),$$

und somit erhalten wir für das Drehungsmoment, das durch die Wirkung entsteht, welche der Magnet und der durch den verticalen und beweglichen horizontalen Draht geleitete Strom aufeinander ausüben, folgenden Wert:

$$D_1 = \frac{2 \mu_\alpha}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}.$$

und, wenn beide Magnete eingesetzt sind:

$$D_1 = \frac{2 (\mu_\alpha + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}.$$

Nun kommt aber noch dazu die Wirkung des fest bleibenden horizontalen Zuleitungsdrahtes und des Stromes in der Rinne, weil diese Wirkung hier, wo die Magnete excentrisch eingesetzt sind, nicht Null ist. Wir bezeichnen das durch die äusseren Kräfte verursachte Drehungsmoment, mit welchem der Einheitsstrom in dem festen horizontalen Zuleitungsdrahte und in der Rinne auf unsere Magnete einwirkt, mit  $\mathfrak{D}_1$ .



Dasselbe hängt von der gegenseitigen Lage der Magnete zu diesen Zuleitungen ab. Für die drei in Fig. 14 skizzierten Stellungen, wo nur ein Magnet eingesetzt ist, der Strom im axialen Mitteldraht von unten zugeleitet und in verschiedener

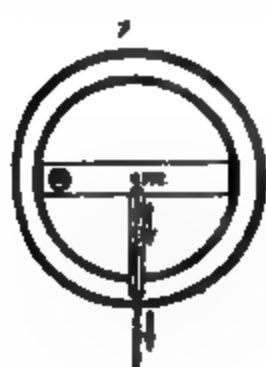


Fig. 14.

Weise aus der Rinne abgeleitet wird, finden wir für die Drehungsmomente durch eine leicht auszuführende Rechnung folgende Werte:

Bei Stellung 1.: herrührend von der horizontalen Zuleitung: Null, und herrührend von der Rinne, da kein Strom darin ist: Null, somit

$$\mathfrak{D}_1 = 0.$$

Bei Stellung 2.: herrührend von der horizontalen Zuleitung:

$$-\frac{2r\mu_a}{l} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-r} \right)^2}} \right),$$

herrührend von der Rinne:

$$2\mu_a \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R-r}{l} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right),$$

somit:

$$\mathfrak{D}_1 = 2\mu_a \left( \frac{r}{l} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-r} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R-r}{l} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right).$$

Bei Stellung 3: herrührend von der horizontalen Zuleitung:

$$-\frac{2r\mu_a}{l} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{l}{R+r} \right)^2}} \right),$$

herrührend von der Rinne:

$$- 2 \mu_a \left( - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R+r}{l} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right),$$

somit:

$$\mathfrak{D}_1 = - 2 \mu_a \left( \frac{r}{l} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R+r} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R+r}{l} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right).$$

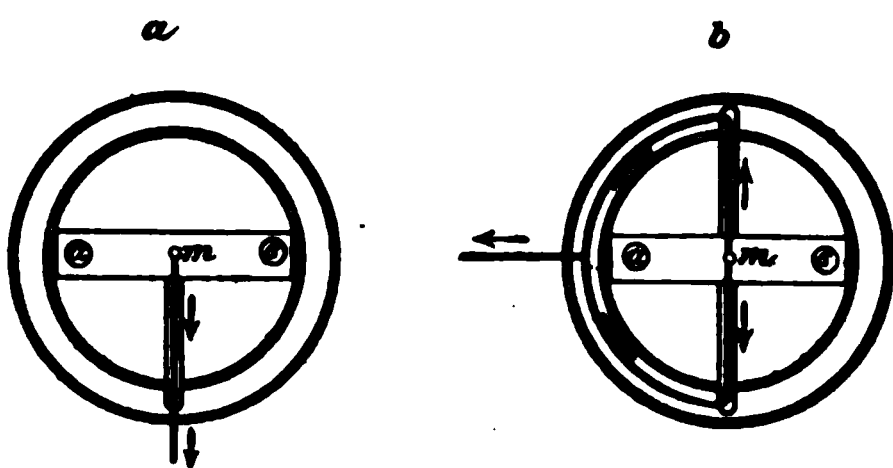


Fig. 15.

Für den Fall, dass die beiden Magnete eingesetzt sind, haben wir die beiden Stellungen *a* und *b* der Fig. 15 und folgende Formeln.

Bei Stellung *a*:

$$\mathfrak{D}_1 = 0.$$

Bei Stellung *b*:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 = & 2(\mu_a - \mu_\beta) \frac{r}{l} + 2\mu_a \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R-r}{l} \right)^2}} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-r} \right)^2}} \right) \\ & + 2\mu_\beta \left( \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R+l} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R+r}{l} \right)^2}} \right) \\ & - \frac{2(\mu'_a + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}}. \end{aligned}$$

Wenn  $\mu_a = \mu_\beta = \mu$ , so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 = & 2\mu \left( \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-l} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R+r}{l} \right)^2}} - \frac{r}{l \sqrt{1 + \left( \frac{l}{R-r} \right)^2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R-r}{l} \right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{R^2 + r^2}{l^2}}} \right). \end{aligned}$$

Wenn  $r = 0$ , so wird

$$\mathfrak{D}_1 = 0,$$

was das direct gefundene Resultat bestätigt, dass bei einem centrisch eingesetzten Magnet die Einwirkung der äusseren Zuleitungen gleich Null ist.

Diese Resultate der Rechnung wurden durch die folgenden Versuche bestätigt:

Bei der Stellung  $\alpha$  ist die Wirkung der äusseren Zuleitung Null. Das Drehungsmoment entspricht in diesem Fall nur der Wirkung der inneren Kräfte; es wurde vermitteltst Bifilaraufhängung bestimmt zu

$$D_1 = 551,$$

während aus der theoretischen Formel

$$D_1 = \frac{2(\mu_\alpha + \mu_\beta)}{\sqrt{1 + \frac{r^2 + R^2}{l^2}}}$$

bei Einsetzung der Werte  $\mu_\alpha = 194$ ,  $\mu_\beta = 179$ ,  $r = 3$ ,  $R = 5,45$  und  $l = 6,25$  sich ergibt:

$$D_1 = 529;$$

auch hier ist, wie das zu erwarten war, das für den ideellen Magnet berechnete Drehungsmoment etwas kleiner als das für den wirklichen Magnet beobachtete.

Es wurde nun die horizontale Zuleitung in der Rinne um  $90^\circ$  verschoben, wodurch das Schema  $b$  entstand; nun kam, wie die Rechnung zeigte, zu dem obigen Drehungsmoment der inneren Kräfte noch die Einwirkung der äusseren Zuleitung und der Rinne. Es zeigte sich das auch deutlich bei der Beobachtung, indem das Drehungsmoment auf 716 stieg. Wir dürfen also annehmen, dass der Unterschied der beiden beobachteten Drehungsmomente, somit die Zahl 165, der von uns berechneten Einwirkung  $\mathfrak{D}_1$  der äusseren Zuleitung und der Rinne entspricht. Wenn wir in unserer Formel die obigen durch Beobachtung gefundenen Werte einführen, so finden wir

$$\mathfrak{D}_1 = 130.$$

Auch hier erklärt sich der Unterschied des beobachteten und des berechneten  $\mathfrak{D}_1$  aus den verschiedenen Bedingungen des wirklichen und des ideellen Magnets.



feld eines wirklichen Magnets und die Verteilung des freien Magnetismus im Magnet zu studiren.

4. Der von Hrn. Lecher erwähnte Fundamentalversuch ist also für uns ein Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Biot-Savart'schen Gesetzes und verdient keineswegs die Bezeichnung eines theoretischen und experimentellen Trugschlusses.

### III. Der König'sche Rotationsapparat.<sup>1)</sup>

Hr. Lecher bespricht auch den Rotationsapparat der Herren Fleischmann und Walter König.<sup>2)</sup> Es besteht derselbe, wie Fig. 16 andeutet, aus einem vom Strom durchflossenen Hohlcylinder vom Radius  $R$  und einer Anzahl Hufeisenmagnete, die so miteinander verbunden sind, dass die Nordpole ausserhalb des Cylinders auf einem Kreise liegen und die Südpole in der Axe des Cylinders vereinigt sind. Der Hohlcylinder und das Magnetbündel sind um die gleiche Axe drehbar. Wenn Hr. Lecher diesen Apparat als eine neue Form des alten Barlow'schen Rädchens bezeichnet, so habe ich insofern nichts dagegen, als bei demselben die Drehung nur durch die von aussen einwirkenden Kräfte zu stande kommt, nicht aber wie bei den von Hrn. Lecher und von mir untersuchten Rotationsapparaten auch durch die inneren Kräfte, die zwischen den fest miteinander verbundenen

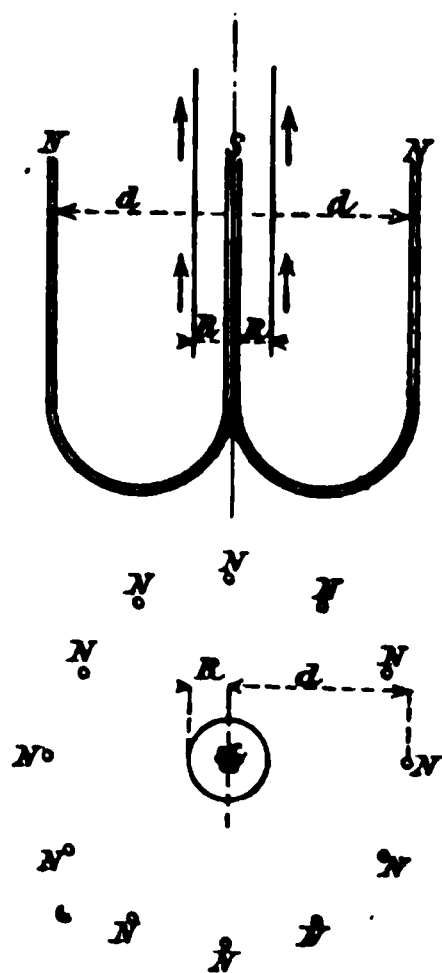


Fig. 16.

Teilen des drehbaren Körpers wirken. Immerhin hat der König'sche Apparat den sehr wichtigen Vorteil, dass man damit die vier Fälle zeigen kann: 1. nur der Magnet ist drehbar; 2. nur der Strom ist drehbar; 3. Magnet und Strom sind jeder für

1) Diese Abhandlung war schon druckfertig, als ich das Heft Nr. 8 der Annalen der Physik, Bd. 2 erhielt, wo Hr. König auf p. 854 die Abhandlung des Hrn. Lecher bespricht; es gereicht mir zur grossen Befriedigung, zu sehen, dass Hr. König und ich in der Auffassung der verschiedenen Rotationsapparate vollkommen einig gehen.

2) L. Fleischmann, Zeitschr. f. physik. und chem. Unterricht 8. p. 361. 1895; W. König, Wied. Ann. 60. p. 519. 1897.



hungsmoment, mit welchem der Strom auf die drehbaren Magnete wirkt:

$$2 i \sum \mu.$$

2. Die Magnete stehen fest und der vom Strom durchflossene Cylinder ist drehbar. Je zwei einander gegenüberstehende Nordpole wirken auf den vom Strom durchflossenen Cylinder mit gleich grossen in entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräften; die Gesamtwirkung aller Nordpole auf den beweglichen Cylinder ist also Null. Die in *C* vereinigten Südpole hingegen wirken auf den Cylinder mit einem Drehungsmoment

$$- 2 i \sum \mu.$$

3. Die Magnete und der Strom sind beide für sich drehbar. Auf die Magnete wirkt ein positives und auf den vom Strom durchflossenen Cylinder ein gleiches negatives Drehungsmoment; es drehen sich also beide in entgegengesetztem Sinne.

4. Die Magnete und der vom Strom durchflossene Cylinder sind fest miteinander verbunden und nur zusammen drehbar. Auf das feste System wirken zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Drehungsmomente; die Gesamtwirkung der inneren Kräfte ist also Null.

Diese aus der Theorie abgeleiteten Resultate stimmen vollkommen mit den Versuchen der Herren Fleischmann und König.

#### IV. Das Biot-Savart'sche Gesetz.

In einer gemeinsam ausgeführten Arbeit haben Biot und Savart durch Versuche festgestellt, dass ein unendlich langer geradliniger Strom auf einen Magnetpol mit einer Kraft wirkt, die der Stromstärke und der Polstärke proportional und der Distanz umgekehrt proportional ist. Für die Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol oder ein magnetisches Element folgerte daraus Laplace, dass die Kraft umgekehrt proportional ist dem Quadrate der Entfernung, und infolge weiterer Versuche zeigte Biot, dass sie proportional ist dem Sinus des Winkels, den die Stromrichtung mit der Verbindungslinie der beiden Elemente macht. Dies führte zu dem Ausdruck  $i \mu \sin \vartheta ds / \rho^2$ , welcher bald mit dem Namen der





einander senkrechte Richtungen bestimmt, nämlich die Verbindungslinie, die Parallele zum Stromelement und die Normale zu der Ebene  $(ds, \mu)$ .

In der Richtung der Verbindungslinie kann aus logischen Gründen keine Kraft wirken, da der Sinn, in welchem die Kraft wirken soll, das heisst der Entscheid, ob  $\mu$  in der Richtung der Verbindungslinie angezogen oder abgestossen wird, nicht aus der gegenseitigen Lage von  $ds \sin \vartheta$  und  $\mu$  bestimmt werden kann.

Eine Kraftwirkung nach der zum Stromelement  $ds \sin \vartheta$  Parallelen wäre zwar logisch denkbar; allein die Versuche haben von einer solchen Kraftwirkung noch nie etwas nachweisen lassen.

Es bleibt somit für die Wirkung zwischen  $ds$  und  $\mu$  nichts möglich, als die durch  $ds \sin \vartheta$  bewirkte Kraftwirkung in der Richtung der Normalen zur Ebene  $(ds, \mu)$ . Diese muss aus logischen Gründen proportional sein der Stromstärke  $i$  und der Magnetismusmenge  $\mu$ , da ja diese Grössen aus der Intensität der Kraftwirkung definirt sind, und ferner proportional der Länge  $ds \sin \vartheta$ , da die Wirkung die Summe ist der Wirkungen der einzelnen Teile, in die wir dieselbe zerlegen können. Da ferner die von Biot und Savart angestellten Versuche und die Rechnung von Laplace ergeben haben, dass die Wirkung dem Quadrate der Entfernung  $\rho$  umgekehrt proportional ist, was auch mit der von Coulomb ermittelten Abnahme der Fernwirkung übereinstimmt, so kann in der Richtung der Normalen nur eine Kraft wirken von der Grösse  $i \mu \sin \vartheta ds / \rho^2$ , die infolge der obigen Betrachtung als die einzig mögliche Kraftwirkung übrig bleibt. Dies ist aber nichts anderes als das Biot-Savart'sche Gesetz.

Der Sinn, in welchem die Kraft wirkt, muss durch die Erfahrung bestimmt werden; er geht nach der Ampère'schen Regel, das heisst so, dass der Nordpol nach links getrieben wird, wenn man mit dem Strome schwimmt und den Pol ansieht.

Es handelt sich nun noch darum, die reciproke Wirkung von  $\mu$  auf  $ds$  zu bestimmen.

Bekanntlich lautet der dritte von Newton in seinen Prinzipien aufgestellte Grundsatz:







werden können. Es existirt also hier ein Widerspruch zwischen dem Biot-Savart'schen Gesetze und der Ampère'schen Formel, der noch aufgeklärt werden muss.

Zu dem Satze, dass zwei Elemente nur in der Richtung der Verbindungslinie aufeinander wirken können, wird man aus logischen Gründen gezwungen, wenn die Elemente Punkte sind, die weder Richtung noch Sinn haben, da in diesem Falle nur die Richtung bestimmt ist, welche durch die beiden Elemente geht. Es gilt dies für Massenpunkte, für magnetische Pole und für in einem Punkte concentrirte elektrische Mengen. Bei Stromelementen, wo beiderseits Richtung und Sinn der Elektricitätsbewegung gegeben sind, liegen die Verhältnisse anders. Ausser der Verbindungslinie sind auch andere Richtungen bestimmt, und die Logik verlangt nur, dass für beide Elemente Richtung und Sinn der Kraftwirkung aus den vorliegenden Grössen sicher und eindeutig bestimmt sind.

Wir verzichten also auf die Bedingung, dass die elektrodynamische Kraft in der Richtung der Verbindungslinie wirken müsse und leiten unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze in der folgenden einfachen Weise die Formel für die elektrodynamische Kraft ab.

Das Element  $ds_1$  bewirkt bei  $ds_2$  ein magnetisches Kraftfeld von der Stärke  $i_1 ds_1 \sin \vartheta_1 / \varrho^2$ , dessen Richtung senkrecht steht zu der Ebene  $(ds_1, \varrho)$ , und dessen Sinn durch die Ampère'sche Regel gegeben ist. Infolge dessen wird das Element  $ds_2$  mit der Kraft

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \sin \vartheta_1 \sin \psi_2}{\varrho^2}$$

in der Richtung getrieben, die normal steht zu der Ebene (Feldrichtung,  $ds_2$ ); der Sinn der Kraft ist durch die Fleming'sche Regel bestimmt.  $\psi_2$  ist der Winkel, den das Element  $ds_2$  mit der Feldrichtung am Orte von  $ds_2$  macht, und ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\sin^2 \psi_2 = 1 - \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \varphi;$$

$ds_2 \sin \psi_2$  ist die Projection von  $ds_2$  auf die Ebene  $(ds_1, \varrho)$ .

In ganz gleicher Weise wird das Element  $ds_1$  mit der Kraft

$$\frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2 \sin \vartheta_2 \sin \psi_1}{\varrho^2}$$









Bei der Erklärung nach Biot-Savart oder Grassmann wird die Wirkung erzeugt durch die *inneren* Kräfte, das heisst durch solche, die zwischen Teilen des drehbaren starren Körpers wirken, während die Einwirkung des äusseren festen zur Rinne führenden horizontalen Drahtes Null ist.

Bei der Erklärung aus der Ampère'schen Formel heben sich die inneren Kräfte in ihrer Wirkung auf, während die Einwirkung des festen *äusseren* Drahtes das Drehungsmoment liefert.

In beiden Fällen wird der Widerspruch mit dem Satze der Erhaltung der Energie nur durch Herbeiziehung der Induction aufgehoben, da ohne dieselbe das Drehungsmoment bei Beseitigung des Reibungswiderstandes eine bis ins Unendliche zunehmende Winkelgeschwindigkeit erzeugen würde.

Bei Annahme der Grassmann'schen Formel gestaltet sich alles bei der Erklärung der Rotation und der Induction viel einfacher und übersichtlicher, weil die *gleiche* Auffassung für die Ableitung der Erscheinung aus der *elektromagnetischen* und aus der *elektrodynamischen* Kraft gilt, und weil auch die Vorstellung der magnetischen Kraftlinien bei der Erklärung verwendbar ist, indem das gleiche magnetische Kraftfeld aus dem Biot-Savart'schen Gesetze und aus der Grassmann'schen Formel sich ableiten lässt.

Bei Anwendung der Ampère'schen Formel gelangt man zwar auch zum richtigen durch die Erfahrung bestätigten Resultat; aber es bleibt der Widerspruch, dass der gleiche Wert des Drehungsmomentes, welcher *elektromagnetisch* aus der Wirkung der *inneren* Kräfte sich ergibt, *elektrodynamisch* der Wirkung der *äusseren* Kräfte zugeschrieben werden muss.

Wir fügen noch die historische Notiz bei, dass Ampère, der zuerst mit einem unten mit Platin beschwerten, in Quecksilber senkrecht schwimmenden Magnet den Versuch nach dem Schema der Fig. 5 angestellt hat, die drehende Wirkung von der festen Zuleitung ausgehen liess und annahm, dass die inneren Kräfte sich aufheben.<sup>1)</sup> Für die Grösse des Drehungsmomentes gab er schon den richtigen Wert.<sup>2)</sup>

---

1) A. M. Ampère, Collection de mémoires 2. p. 387. 1885; 3. p. 258. 1887.

2) l. c. 3. p. 262. 1887.

Als diese Arbeit schon abgeschlossen war, fand ich, dass Hr. E. Wiechert<sup>1)</sup> schon vor mir die Grassmann'sche Formel unmittelbar aus dem Biot-Savart'schen Gesetze abgeleitet hat.

Schliesslich möchte ich noch den Dank aussprechen an meinen Collegen, Hrn. Prof. VonderMühl, der mich auf manche wichtige mathematische Beziehungen und Sätze aufmerksam gemacht, und an Hrn. Dr. H. Veillon, der bei der Ausführung und Berechnung der Versuche mich wesentlich unterstützt hat.

---

1) E. Wiechert, Grundlagen der Elektrodynamik p. 25, in der Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal. Leipzig 1899.

(Eingegangen 5. November 1900.)

## 2. Ueber das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers; von F. Paschen.

(Hierzu Taf. IX.)

Nach dem Ergebnis meiner früheren Versuche über die Spectren fester Körper<sup>1)</sup>, dass das Spectralgesetz des Hrn. W. Wien<sup>2)</sup> wohl gültig sein könnte, verbesserte ich alle meine experimentellen Hilfsmittel und begann neue Versuche zur Prüfung dieses Gesetzes unter möglichster Vermeidung der Unvollkommenheiten, welche meinen in den Jahren 1892 bis 1894 angestellten Versuchen natürlicherweise anhafteten. Die bereits veröffentlichten Versuche über die Strahlung von Hohlräumen und ähnlichen Anordnungen, welche die Strahlung eines schwarzen Körpers aussenden, ergaben folgende Resultate:

Hr. Wanner und ich<sup>3)</sup> untersuchten mit dem Spectralphotometer isochromatische Linien sichtbarer Wellenlängen und fanden hier die völlige Gültigkeit des Wien'schen Gesetzes. Hr. Wanner<sup>4)</sup> hat diese Messungen noch weiter verfolgt und gefunden, dass dies Gesetz im sichtbaren Spectralgebiete bis zur Temperatur des Kraters der Bogenlampe (circa 4000°) nahe gültig sein müsse.

Inzwischen hatte ich Versuche gemacht über die Energiespectren<sup>5)</sup> bei niederen Temperaturen (100° C. bis 450° C.) und fand auch hier Wien's Gesetz innerhalb der möglichen Fehler gültig.

1) F. Paschen, Nachrichten Ges. d. Wissensch. Göttingen 1895. p. 294—305; Astrophysikal. Journ. 2. p. 202. 1895; Wied. Ann. 58. p. 455. 1896; 60. p. 662. 1897.

2) W. Wien, Wied. Ann. 58. p. 662. 1896.

3) F. Paschen u. H. Wanner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5. 1899.

4) H. Wanner, Ann. d. Phys. 2. p. 141. 1900.

5) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 405. 1899.





















Da es auf den Wert der Constanten  $\gamma$  der Formel (4 a) nicht mehr ankommt, kann man auch sagen, dass Wien's Gesetz gültig sein muss, wenn

$$(4b) \quad - \frac{d \log i}{d(1/\lambda T)} = c_2 \log e$$

gültig gefunden wird. Denn aus (4 b) und (1 b) folgt notwendig Formel (4).

Findet man nicht, dass die Logarithmen der Galvanometerausschläge eine geradlinige Function von  $1/\lambda T$  sind, oder dass sie zwar noch genügend geradlinig verlaufen, aber mit einer anderen Neigung als derjenigen  $c_2 \log e$ , so gilt jedenfalls Wien's Formel (4) nicht. Die Herren Lummer und Pringsheim haben durch solchen Schluss Wien's Formel als ungültig erkannt. Aber es müssen die Beobachtungen dann nach (1 b) eine andere Gesetzmässigkeit befolgen, welche ein gutes Kriterium dafür bildet, ob die Beobachtungen in sich übereinstimmen. Formel (1 b) verlangt, dass  $\log i$  eine Function von  $\lambda T$ , also auch von  $1/\lambda T$  sein muss. Hat man also bei Isochromaten verschiedener Wellenlänge  $\lambda$  Abweichungen von Wien's Gesetz Formel (4 a), so müssen die Curven  $\log i$  als Function von  $1/\lambda T$  doch congruent sein und in ihrem ganzen Verlaufe übereinander fallen, wenn sie durch eine verticale Verschiebung (Multiplication von  $i$  mit einem für jede Isochromate constanten Factor) so übereinander gelegt werden, dass sie für einen Wert von  $1/\lambda T$  zusammenfallen. Die Abweichungen der beobachteten Werte  $\log i$  von den nach Formel (4 a) berechneten müssen für gleiche Werte von  $1/\lambda T$ , aber verschiedene Isochromaten (verschiedene  $\lambda$ ) die gleichen Beträge haben. Weicht der beobachtete Differentialquotient (4 b) von Wien's Formel ab, so muss er doch für gleiche Werte von  $1/\lambda T$ , aber verschiedene  $\lambda$ , denselben Wert haben. Hätten die Herren Lummer und Pringsheim von vornherein gezeigt, dass ihre Beobachtungen dieser Forderung genügen, so hätten schon ihre ersten Resultate eine grosse Beweiskraft gehabt. Für Energiecurven muss natürlich eine ganz ähnliche Beziehung gelten. Sobald man Abweichungen von Wien's Formel findet, muss doch (1 a) gelten, sodass gefundene Abweichungen dieselben sein müssen bei gleichen Werten von  $1/\lambda T$ , aber verschiedenen Energiecurven (Werten



Die Constante  $c_1$  der Gesetze wurde für jede Beobachtungsreihe so angenommen, dass die beobachtete Curve möglichst genau mit der berechneten übereinstimmte. Für die isochromatischen Linien grösserer Wellenlängen war dies für die ganze Linie nach Wien's Gesetz nicht mehr möglich. Doch gehörte immer noch ein Stück dieser Curven dem Gültigkeitsbereiche von Wien's Formel an, sodass aus diesem Stücke ein Wert für  $c_1$  berechnet werden konnte.

In den Zahlentabellen bedeutet  $\lambda$  die mittlere Wellenlänge des untersuchten Spectralbezirkes in  $\mu$ ,  $T$  die beobachtete absolute Temperatur,  $i$  den beobachteten und auf die Temperatur Null des Schirmes reducirten Galvanometerausschlag. Der Betrag dieser Correction ist nebst der Schirmtemperatur jedesmal aufgeführt. Schliesslich finden sich die für die Berechnung nach Formel (4a) (Wien) oder (5a) (Planck) benutzten Werte der Constanten  $\gamma$  und ferner der Factor, mit dem die Galvanometerausschläge jeder Curve multiplicirt werden müssen, damit alle Isochromaten möglichst gut übereinanderfallen und eine einzige Curve ergeben (vgl. p. 293). Da jede Isochromate mit denjenigen benachbarter Wellenlängen ein grosses Gebiet der Werte  $1/\lambda T$  gemeinsam hat, so liess sich dieser Factor sicher bestimmen: entweder durch eine graphische Verschiebung der in logarithmischem Maasse ( $\log i = f(1/\lambda T)$ ) dargestellten Curven oder vermittelst der berechneten Werte  $\gamma$  der Formel (5a). Die resultirende mittlere Curve ergibt für ein möglichst grosses Gebiet die der Formel (1b) entsprechende Function  $F(\lambda T)$ .

$$\lambda = 1,0959 \mu.$$

Spaltbreite <sup>1)</sup> 3 Minuten; Hohlraum I; Schirmtemperatur = 9,8° C.;  
Schirmcorrection 0,00.

|                        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|
| $T$                    | 1333,4 | 1553,1 | 1628,3 | 1038,7 |
| $1/\lambda T$          | 0,00   | 0,00   | 0,00   | 0,00   |
| $i$ { beob.            | 60,6   | 252,6  | 59,3   | 3,65   |
| Wien                   | 61,44  | 252,5  | 59,14  | 3,61   |
| Planck                 | 61,27  | 249,4  | 58,97  | 3,68   |
| $\gamma$ { Formel (4a) | 6,1276 |        |        |        |
| Formel (5a)            | 6,0959 |        |        |        |
| Factor 0,000 1142.     |        |        |        |        |

1) Dies ist die genaue Breite des Spaltes und Bolometerstreifens im zweiten Spectralapparat und die ungefähre Spaltbreite des ersten.





$$\lambda = 4,7007 \mu.$$

Spaltbreite 3 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 12,1° C.;  
Schirmcorrection + 0,03.

|   |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|
| <i>T</i>  | 1478,8   | 1084,3   | 833,1  | 628,6  |
| $1/\lambda T$ 0,00  | 01488  | 01962  | 02553  | 03885  |
| $i \left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 228,8 \\ 199,4 \\ 221,7 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 96,34 \\ 92,86 \\ 96,44 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 38,67 \\ 39,15 \\ 39,49 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 11,76 \\ 11,64 \\ 11,64 \end{array} \right.$ |

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4 a)} \\ \text{Formel (5 a)} \end{array} \right. \begin{array}{l} 3,2118 \\ 3,1936 \end{array} \quad \text{Factor } 0,09114.$$

$$\lambda = 4,8855 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum IV; Schirmtemperatur 14,7° C.;  
Schirmcorrection + 0,20.

|   |  |  |  |  |  |   |
|---|--|--|--|--|--|---|
| <i>T</i>  | 1189,1   | 1013,3   | 782,6  | 620,1  | 498,2  | 419,9   |
| $1/\lambda T$ 0,00  | 01739  | 02041  | 02643  | 03835  | 04193  | 04924   |
| $i \left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 583,0 \\ 555,7 \\ 585,3 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 864,8 \\ 857,7 \\ 866,5 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 148,1 \\ 148,6 \\ 148,4 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 54,10 \\ 54,09 \\ 53,65 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 15,97 \\ 15,45 \\ 15,37 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 5,32 \\ 5,31 \\ 5,31 \end{array} \right.$ |

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4 a)} \\ \text{Formel (5 a)} \end{array} \right. \begin{array}{l} 3,8476 \\ 3,8259 \end{array} \quad \text{Factor } 0,02125.$$

$$\lambda = 6,2554 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 14,1° C.;  
Schirmcorrection + 0,37.

|   |  |  |  |  |  |   |
|---|--|--|--|--|--|---|
| <i>T</i>  | 1467,5   | 1081,0   | 841,5  | 631,4  | 528,9  | 441,8   |
| $1/\lambda T$ 0,00  | 01089,5  | 01479  | 01900  | 02532  | 03023  | 03618   |
| $i \left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 305,6 \\ 247,3 \\ 302,1 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 153,0 \\ 140,1 \\ 154,5 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 78,52 \\ 75,75 \\ 79,06 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 29,85 \\ 30,09 \\ 30,38 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 14,76 \\ 14,71 \\ 14,72 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 6,29 \\ 6,16 \\ 6,16 \end{array} \right.$ |

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4 a)} \\ \text{Formel (5 a)} \end{array} \right. \begin{array}{l} 3,0839 \\ 3,0657 \end{array} \quad \text{Factor } 0,1223.$$

$$\lambda = 7,7267 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 15,8° C.;  
Schirmcorrection + 2,13.

|   |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|
| <i>T</i>  | 1567,3   | 1315,6   | 987,6  | 778,2  | 596,2  | 476,3  |
| $1/\lambda T$ 0,00  | 008258   | 009837   | 01341  | 01663  | 02170  | 02717  |
| $i \left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 604,9 \\ 433,7 \\ 601,0 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 438,1 \\ 344,4 \\ 439,2 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 242,0 \\ 213,7 \\ 242,7 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 136,8 \\ 127,7 \\ 136,9 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 63,39 \\ 60,87 \\ 62,39 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 27,11 \\ 27,40 \\ 27,55 \end{array} \right.$ |

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4 a)} \\ \text{Formel (5 a)} \end{array} \right. \begin{array}{l} 3,1608 \\ 3,1426 \end{array} \quad \text{Factor } 0,1025.$$

$$\lambda = 7,7293 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum IV; Schirmtemperatur 14,7° C.;  
Schirmcorrection + 1,99.

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
| $T$  | 1179,1   | 961,0  | 766,3  | 572,3  | 475,6  | 408,4  |
| $1/\lambda T 0,00$   | 01097  | 01346  | 01688  | 02260  | 02720  | 03168  |
| $i \left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$    | $\left\{ \begin{array}{l} 327,8 \\ 279,1 \\ 333,5 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 213,1 \\ 194,0 \\ 215,9 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 123,0 \\ 117,8 \\ 123,3 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 51,09 \\ 51,06 \\ 51,07 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 26,27 \\ 26,11 \\ 25,73 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 13,49 \\ 13,58 \\ 13,32 \end{array} \right.$ |
| $\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4 a)} \\ \text{Formel (5 a)} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 3,1415 \\ 3,1148 \end{array} \right.$        |  | Factor 0,1093.   |  |  |  |

$$\lambda = 8,7973 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum IV; Schirmtemperatur 15,2° C.;  
Schirmcorrection + 0,96.

|  |  |  |  |  |   |   |
|--|--|--|--|--|---|---|
| $T$  | 1184,5   | 988,4  | 767,3  | 578,6  | 481,3   | 410,5   |
| $1/\lambda T 0,00$   | 009596   | 01150  | 01481  | 01965  | 02361   | 02769   |
| $i \left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$    | $\left\{ \begin{array}{l} 92,26 \\ 71,83 \\ 92,54 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 65,86 \\ 54,37 \\ 64,93 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 36,84 \\ 33,54 \\ 36,97 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 17,16 \\ 16,56 \\ 17,18 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 9,00 \\ 9,27 \\ 9,42 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 5,09 \\ 5,12 \\ 5,14 \end{array} \right.$ |
| $\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4 a)} \\ \text{Formel (5 a)} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 2,4647 \\ 2,4465 \end{array} \right.$        |  | Factor 0,5091.   |  |   |   |

$$\lambda = 8,7958 \mu.$$

Spaltbreite 6 Minuten; Hohlraum II; Schirmtemperatur 15,1° C.;  
Schirmcorrection 0,98.

|  |  |  |  |  |   |
|--|--|--|--|--|---|
| $T$  | 1458,6   | 1069,8   | 844,4  | 625,6  | 483,1   |
| $1/\lambda T 0,00$   | 007795   | 01063  | 01347  | 01817  | 02353   |
| $i \left\{ \begin{array}{l} \text{beob.} \\ \text{Wien} \\ \text{Planck} \end{array} \right.$    | $\left\{ \begin{array}{l} 131,7 \\ 90,40 \\ 129,1 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 74,43 \\ 59,79 \\ 73,75 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 44,51 \\ 39,52 \\ 44,83 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 20,46 \\ 19,86 \\ 20,90 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 9,22 \\ 9,08 \\ 9,22 \end{array} \right.$ |
| $\gamma \left\{ \begin{array}{l} \text{Formel (4 a)} \\ \text{Formel (5 a)} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 2,4504 \\ 2,4322 \end{array} \right.$        |  | Factor 0,5261.   |  |   |

Während in diesen Beispielen nur wenige der beobachteten Curven wiedergegeben sind, finden sich auf Taf. IX die Beobachtungspunkte aller Messungsreihen in der Darstellung  $\log i = f(1/\lambda T)$ . Zunächst sind alle beobachteten Isochromaten, welche nahe derselben Wellenlänge entsprechen, übereinander gelegt. Bei diesen einzelnen Beobachtungsreihen war der Hohlraum oder die Spaltbreite verschieden. Die Curven enthalten die Beobachtungspunkte folgender übereinander gezeichneter Isochromaten:

Curve 1:  $\lambda = 1,0616, 1,2875, 1,0959, 1,0504, 1,0279, 1,6933, 1,9363,$   
 $1,9770, 1,9942, 2,0303$ , bezeichnet als  $\odot \odot \odot$  und  
 $\lambda = 2,9085, 3,5327, 3,5389, 3,8572, 3,7610, 3,7650, 3,7202,$   
bezeichnet als  $\times \times \times$ .

Curve 2:  $\lambda = 4,8355, 4,6433, 4,5897, 4,6150, 4,7007, 4,7007, 4,6198,$   
 $4,6138, 4,6509, 4,6511, 4,6868, 4,7007, 4,6008.$

Curve 3:  $\lambda = 6,2622, 6,2622, 6,2622, 6,2724, 6,2651, 6,2554, 6,2647,$   
 $6,2635.$

Curve 4:  $\lambda = 7,6503, 7,7125, 7,6921, 7,7267, 7,6255, 7,7293, 7,6823,$   
 $7,6823$ , bezeichnet als  $\times \times \times$  und  
 $\lambda = 8,7973, 8,7958, 8,7958, 8,7958, 8,7958,$   
bezeichnet als  $\odot \odot \odot$ .

In Curve 5 endlich sind alle diese Curven durch verticale Verschiebung zu einer einzigen vereinigt. In Curve 6 finden sich meine sämtlichen Beobachtungen für Werte  $1/\lambda T > 0,0003$  zusammen mit den photometrischen Beobachtungen von Wanner und mir, und Wanner allein dargestellt, um zu zeigen, dass die Neigung aller dieser Isochromaten die gleiche und zwar die dem Wien'schen oder Planck'schen Gesetze entsprechende ist. In sämtlichen Curven folgt die gerade Linie - - - - - der Formel (4a) (Wien's Gesetz) und die ausgezogene Linie der Formel (5a) (Planck's Gesetz). Die Curven 2, 3, 4 sind doppelt so gross dargestellt, als die Curven 1, 5, 6, um die Abweichungen von Wien's Gesetz deutlich zu machen.

Aus dem wiedergegebenen Beobachtungsmateriale schliesse ich folgendes:

Für grössere Werte von  $1/\lambda T$  als ungefähr 0,0003 ( $\lambda T < 3000$  ungefähr) folgen die Beobachtungen innerhalb der möglichen Fehler dem Wien'schen Gesetze. Für kleinere Werte von  $1/\lambda T$  als ungefähr 0,0003 ( $\lambda T > 3000$  ungefähr) treten in allen Curven Abweichungen vom Wien'schen Gesetze auf, welche für gleiche Werte von  $1/\lambda T$  in verschiedenen Isochromaten denselben Betrag haben, sodass Formel (1b) nicht verletzt ist. Erst diese Thatsache, welche aus der gewählten Darstellung einwandfrei hervorgeht, beraubte mich der Möglichkeit, die Abweichungen als fehlerhaft anzusehen.

Innerhalb des ganzen Beobachtungsgebietes gilt Planck's Gesetz innerhalb der möglichen Fehler.

Mit diesem Resultate sind in guter Uebereinstimmung die photometrischen Beobachtungen von Wanner und mir und



und 0,0003333 mit Sicherheit ergeben zu können, sie sind also mit Planck's Formel in gleicher Weise wie mit Wien's Formel im Einklange.

Auch an den Resultaten meiner Messungen der Energiecurven bei niederen Temperaturen ist nichts Wesentliches zu ändern. Denn unter den dort vorkommenden Werten der Grösse  $1/\lambda T$  liegt keiner in dem Gebiete, wo die Abweichungen von Wien's Gesetz bereits ausserhalb der Beobachtungsfehler jener Arbeit wären. Dagegen müssen die bei langen Wellen liegenden Aeste meiner Energiecurven höherer Temperatur merklich geändert werden, damit sie im Einklang mit den Resultaten der Isochromaten sind. Diese Aeste müssen weniger steil abfallen, als meinen Beobachtungen entspricht. Ich habe mit dem Hohlraume II noch eine Beobachtungsreihe von Energiecurven höherer Temperaturen gemacht, bei welcher mein Apparat mit neuen, optisch sehr genauen Silberspiegeln ausgestattet war, deren Politur vorzüglich war und über deren Reflexionsfähigkeit besondere Versuche mir eine genauere Kenntnis verschafft hatten. Aber ich habe nicht den Verlauf erhalten, welcher den Resultaten dieser Arbeit entspricht. Die langwelligen Aeste dieser Energiecurven fallen zwar nicht so steil ab, wie Wien's Curve, sie liegen aber der Wien'schen Curve näher als der Planck'schen. Sollen diese in logarithmischem Maasse dargestellten Energiecurven congruent sein, wie es Formel (1a) verlangt, so würde der den Curven verschiedener Temperatur entsprechende mittlere Curvenzug der Wien'schen Curve wieder sehr nahe kommen. Dagegen gehen diese Energiecurven in diejenigen des Planck'schen Gesetzes über und erfüllen dabei die Forderung der Congruenz weit besser, wenn ich annehme, dass aus einem mir nicht bekannten Grunde bei längeren Wellenlängen die Energie meines Spectrums geschwächt erscheint, sodass die beobachtete Energie bei folgenden Wellenlängen mit den darunter verzeichneten Factoren multiplicirt werden muss:

|             |       |       |       |       |         |        |        |                 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|---------|--------|--------|-----------------|
| $\lambda =$ | 3,91  | 4,59  | 5,12  | 6,26  | 7,74    | 8,25   | 8,81   | 9,33            |
| Factor:     | 1,020 | 1,038 | 1,050 | 1,068 | 1,165   | 1,195  | 1,31   |                 |
|             |       |       |       |       | (1,035) | (1,06) | (1,07) | (1,075) (1,089) |

Wenn diese Energiecurven durch diese Correctionen die Form des Planck'schen Gesetzes erhalten, so ändern sich die Werte der maximalen Energie und Wellenlänge  $J_m$  und  $\lambda_m$  nur unwesentlich. Ebenso bringt die neue Temperaturcorrection nur geringe Aenderungen. So ergibt die erwähnte neue Beobachtungsreihe an Hohlraum II z. B.

| $T$ abs. | $\lambda_m$ | $\lambda_m \cdot T$ | $J_m$ | $J_m / T^5 \times 10^{13}$ |
|----------|-------------|---------------------|-------|----------------------------|
| 1580,6   | 1,846       | 2918                | 12,26 | 1,242                      |
| 1567,9   | 1,858       | 2913                | 12,28 | 1,296                      |
| 1357,4   | 2,157       | 2929                | 5,797 | 1,258                      |
| 1852,7   | 2,159       | 2920                | 5,665 | 1,251                      |
| 1347,4   | 2,172       | 2927                | 5,499 | 1,238                      |
| 1337,4   | 2,188       | 2926                | 5,454 | 1,275                      |
| 1055,2   | 2,777       | 2929                | 1,643 | 1,255                      |
| 1053,7   | 2,770       | 2919                | 1,660 | 1,277                      |
| 1052,2   | 2,781       | 2926                | 1,667 | 1,293                      |
| 875,0    | 3,328       | 2911                | 0,642 | 1,252                      |
| 876,4    | 3,333       | 2914                | 0,637 | 1,232                      |

Mittel: 2921

Diese Factoren sind je nach der Anordnung des Hohlraumes und der Weite des Spaltes etwas verschieden. Sie sind grösser für kleinere Hohlraumöffnungen und Spaltbreiten. Die oben eingeklammerten Werte von Factoren entsprechen ungefähr Hohlräumen mit grösseren Oeffnungen und Spaltbreiten von 5 Minuten, wie solche auch bei niederen Temperaturen angewandt wurden. Es ist daher möglich, dass diese Messungen mit den eingeklammerten Factoren zu corrigiren sind. Sie würden dadurch zwar unerheblich, aber doch so geändert, dass der Wert von  $\lambda_m \cdot T$  in bessere Uebereinstimmung mit den Resultaten der höheren Temperaturen kommt, wie folgende Tabelle zeigt, welche die Resultate der mit Bolometer V meiner Arbeit über niedere Temperaturen gewonnenen Energiecurven enthält, nachdem die eingeklammerten Correctionen angebracht sind.

| $T$ abs. | $\lambda_m$ | $\lambda_m \cdot T$ | $J_m$  | $J_m / T^5 \times 10^{14}$ |
|----------|-------------|---------------------|--------|----------------------------|
| 723,0    | 4,038       | 2920                | 4,169  | 2,101                      |
| 577,1    | 5,047       | 2913                | 1,352  | 2,105                      |
| 462,4    | 6,310       | 2917                | 0,4365 | 2,065                      |
| 373,0    | 7,798       | 2909                | 0,1513 | 2,097                      |

Mittel: 2915

Ich vermute als Ursache dieser Fehlerquelle bei den längsten Wellen die Beugung an den Rändern der Oeffnungen des Hohlraumes und Spaltes. Sichtbare Strahlen gelangten stets nur von der Hinterwand des Hohlraumes zum Bolometer. Strahlung 10 facher Wellenlänge dagegen müsste durch Beugung auch von den kühleren Blenden in und vor der Oeffnung des Hohlraumes das Bolometer erreicht haben, um so mehr, je kleiner die Oeffnung des Spaltes und des Hohlraumes war. Ich musste aber kleine Oeffnungen anwenden, da ich nicht die Mittel habe, grössere Hohlräume hoch zu erhitzen. Die Anordnung der vorliegenden Untersuchung ist von dieser Fehlerquelle frei.

Als Gesamtergebnis aller meiner Versuche und derjenigen von Wanner und mir und Wanner allein folgt die Gültigkeit von Planck's Gesetz innerhalb des Gebietes

$$1/\lambda T = 0,002 \text{ bis } 0,000078,$$

$$\lambda T = 500 \text{ bis } 13000.$$

Das Ergebnis der Arbeit der Herren Rubens und Kurlbaum ist die Gültigkeit von Planck's Gesetz zwischen den Werten  $\lambda = 28 \mu$  (ungefähr),  $T = 85$ ,  $1/\lambda T = 0,00042$  und  $\lambda = 51,2 \mu$ ,  $T = 1773$ ,  $1/\lambda T = 0,000011$ . Das Gebiet der Werte  $1/\lambda T = 0,00042$  bis  $0,000078$  ist ein gemeinsames für diese Messungen und die meinigen. Obwohl die Wellenlängen ausserordentlich verschieden sind, herrscht hier doch eine gute Uebereinstimmung in der Form der Function  $F(\lambda T)$  der Formel (1 b). Hieraus folgt unter anderem, dass die schwierige Bestimmung der grossen Wellenlängen der Reststrahlen des Flusspates und Steinsalzes gut gelungen sein muss. Auch die Messungen der Herren Lummer und Pringsheim werden, soweit ich es nach ihren Angaben beurteilen kann, wenigstens für grössere Werte von  $\lambda T$ <sup>1)</sup> gut mit Planck's Gesetz vereinbar sein.

1) Für kleinere Werte von  $\lambda T$  dagegen würden bedeutende Abweichungen bleiben, wenn die Beobachtungen hier wirklich der Thiessen'schen Formel folgen. Nach meinen Beobachtungen ist für  $\lambda T < 3000$  Thiessen's Formel nicht gültig. Denn der Differentialquotient

$$-\frac{d \log_e (J \lambda^5)}{d 1/\lambda T}$$

würde nach Thiessen mit abnehmendem  $\lambda T$  kleiner werden, und z. B. im Sichtbaren für  $T = 1200$  schon den Wert 13350 haben, während





### 3. *Eine neue Bestimmung der Dispersion des Flussspates im Ultrarot;* von F. Paschen. ✓

#### Versuchsanordnung (vgl. Figur).

Es bedeuten:  $s_1$  den Spalt des Prismenapparates,  $G$  das früher schon von mir benutzte Rowland'sche Concavgitter, drehbar um eine verticale Axe,  $S$  ein silberner Concavspiegel, der sich in der Richtung des Pfeiles verschieben lässt,  $s_2$  einen bilateral erweiterbaren Spalt.

Das vom Spalt  $s_1$  kommende Licht erhielt bei einer geeigneten Stellung des Spiegels  $S$  eine solche Convergenz (oder Divergenz), dass das Spectrum der gewünschten höheren Ordnung scharf auf dem Spalte  $s_1$  entworfen wurde. Man benutzte zur Justirung die im Knallgasgebläse erzeugten Natriumlinien. Die Dispersion des in der Ebene des Spaltes  $s_1$  abgebildeten Gitterspectrums war eine solche, dass die  $D$ -Linien  $n - 1^{\text{ter}}$  und  $n + 1^{\text{ter}}$  Ordnung je um durchschnittlich 50 mm vom Spalt entfernt lagen, wenn die  $n^{\text{ter}}$  Ordnung mit dem Spalte coincidirten. Die Justirung der  $D$ -Linien auf dem Spalte  $s_2$  geschah mit engem Spalte  $s_2$ . Zur Messung wurde  $s_2$  so viel erweitert, dass genügende Energie zur exacten Messung auf den Bolometerstreif fiel. Der Bolometerstreif und das Spaltbild einer Linie im Prismenapparate nahmen einen Winkel von 3 Min. im Spectrum ein. Nur bei wenigen Versuchen wurden die Bolometer- und Spaltbreiten 1,5 Min. gewählt. Die Dispersion sowohl des Prismen- wie des Gitterapparates war ungefähr doppelt so gross, als bei meinen früheren Bestimmungen.



meter in dem Maasse gesteigert, wie die Lichtstärke infolge der grösseren Dispersion abgenommen hatte. Die exacten Messungen mit dieser Anordnung bis zur Wellenlänge  $7\ \mu$  theile ich hier mit.

*Beispiel.* Resultate der Messung der Wellenlänge  $3,2413\ \mu$  entsprechend dem Beugungsbilde zweiter Ordnung, wenn die *D*-Linien elfter Ordnung auf dem Spalte  $s_1$  abgebildet waren:  $3,2413 = 11/2\ 0,5893$ . Die einzelnen Messungsreihen der Energiecurven der Beugungsbilder ergaben die Maxima bei folgenden Minimalablenkungen:

|                          |           |                |
|--------------------------|-----------|----------------|
| 30°                      | 9,269'    | 11,0° C.       |
|                          | 9,192     | 11,0           |
|                          | 9,148     | 10,6           |
|                          | 9,243     | 10,1           |
|                          | 9,379     | 9,9            |
|                          | 9,343     | 10,2           |
|                          | 9,167     | 10,1           |
|                          | 9,194     | 10,4           |
|                          | 9,180     | 10,3           |
|                          | 9,240     | 10,3           |
| <hr/>                    |           |                |
| Mittel: 30°              | 9,236'    |                |
| = 30°                    | 9' 14,2'' | w. F. = 0,98'' |
| Mittel: Temp. = 10,3° C. |           |                |

Der umrandete Teil der folgenden Tabelle enthält die Messungsergebnisse. Es sind angegeben: die beobachteten mittleren Minimalablenkungen  $\delta$  und ihr wahrscheinlicher Fehler  $\omega.F$  in Secunden, die Anzahl Messungsreihen, die mittlere Temperatur und der Brechungsexponent  $n$ . In den drei letzten Columnen sind die Differenzen der beobachteten Brechungs-

de surface, et ainsi que l'a réalisé plus tard Paschen (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 4. 1899; Wied. Ann. 60. p. 722. 1897) pour le bolomètre linéaire.“ Erstens haben Lummer und Pringsheim 1897 nur gesagt, *Versuche mit einem Bolometer, bei dem die reflectirte Energie mittels eines versilberten Hohlspiegels wiedergewonnen wird, sollen zeigen, inwiefern etc.* Zweitens geht aus den Citaten hervor, dass mein Vorschlag, das Bolometer in eine spiegelnde Hülle zu setzen, der ältere ist. (Zweites Citat meiner Arbeiten, welches älteren Datums ist, als das Citat der Arbeit von Lummer und Pringsheim.)



exponenten von den nach Ketteler's Formeln berechneten in Einheiten der fünften Decimalen aufgeführt.

Ketteler's Formeln.

$$(I) \quad n^2 = a^2 - \frac{M_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2},$$

$$(II) \quad n^2 = A^2 - \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} - k\lambda^2 - h\lambda^4.$$

Die Zahlenwerte der zur Berechnung benutzten Constanten sind:

$$\text{Formel (Ia)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = 6,09104 \\ \lambda_1^2 = 1258,47 \\ \lambda_2^2 = 0,008884 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} M_1 = 5099,15 \\ M_2 = 0,00612093 \end{array}$$

Dies sind die Werte, mit denen die Formel (I) meine ersten Beobachtungen<sup>1)</sup> gut darstellte.

$$\text{Formel (Ib)} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = 5102,07 \\ \lambda_1^2 = 1259,19 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{die übrigen Constanten} \\ \text{wie in Formel (Ia)} \end{array}$$

$$\text{Formel (II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^2 = 2,03918 \\ k = 0,0032055 \\ h = 0,0,2894 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} M_2 = 0,006125 \\ \lambda_2^2 = 0,008884 \end{array}$$

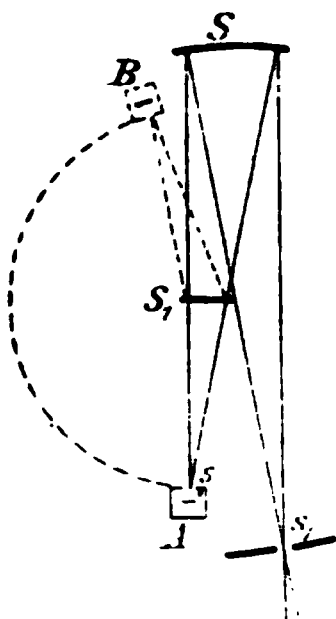
Die letzte Formel giebt den besten Anschluss an die Beobachtungen. Die Abweichungen der Beobachtungen von den Formeln entsprechen im Ultrarot wenigen Einheiten der dritten Decimalen im Werte der Wellenlängen, sodass es möglich scheint, durch exacte Einstellung diese Decimale noch einigermaassen genau zu messen.

1) F. Paschen, Wied. Ann. 53. p. 821. 1894.

(Eingegangen 29. November 1900.)

**4. Bestimmung des selectiven  
Reflexionsvermögens einiger Planspiegel;  
von F. Paschen.**

Ein mit Eisenoxyd bedecktes Platinstreifchen wurde elektrisch geglüht und sandte durch eine spaltförmige Oeffnung  $s$  eines Kastens Licht zum concaven Spiegel  $S$  von 70 cm Krümmungsradius, welcher ein reelles Bild des Spaltes  $s$  auf dem Spalt  $s_1$  meines Flusspat-Spectralapparates<sup>1)</sup> entwarf (vgl. Figur). Bei der Stellung  $A$  des Kastens gelangte das Licht direct zum Spiegel  $S_1$ , bei der Stellung  $B$ , nachdem es an dem



zu untersuchenden Planspiegel  $S_1$  reflectirt war. Der Einfallswinkel betrug bei der Anordnung 8,5 Grad. Der Kasten war an einem Arme eines Spectralapparates befestigt, mit dem er sich in die durch Anschläge fixirten Lagen  $A$  und  $B$  drehen liess. Der Spiegel  $S$  liess sich schnell in die für die Anordnung  $B$  richtige fixirte Lage bringen. Er stand auf dem Spectrometertischchen, welches mit den Spitzen seiner Füße in kleine Vertiefungen hineinpasste. Die Ebene des Planspiegels ward

in die Drehaxe hineinverlegt, und die Länge des Strahlenganges bei den Anordnungen  $A$  und  $B$  war genau die gleiche. Dies ist in dem an Absorptionen der Zimmerluft reichen ultraroten Spectraltheile zweckmässig. Der Spalt  $s$  war ein wenig grösser, als der Spalt  $s_1$ , sodass sein Bild sehr exact stets in derselben Weise justirt werden konnte. Es sind untersucht die Reflexionen verschiedener Silberspiegel und eines Neusilber-  
spiegels: 1. ein Planspiegel I auf einer Feinsilberplatte, geschliffen und polirt von Zeiss. Eben solche Hohlspiegel be-

1) Die Breite des Bolometers betrug 3 Minuten im Spectrum.

nutzte ich im Spectrometer, deren Reflexion ich wissen wollte. 2. Eine frisch versilberte ebene Glasfläche II. Die dicke Versilberung war zwar noch ein wenig durchsichtig für Blau, wie die meisten versilberten Glasflächen, aber die Schicht war sehr gleichmässig und vorzüglich polirt. Aehnlich versilberte Glasspiegel sind häufig im Spectrobolometer verwendet. Ist die Versilberung neu, so sind sie in der Reflexion Vollsilberspiegeln wenig unterlegen, wie die Messungen zeigen. Drittens untersuchte ich einen genau ebensolchen versilberten Glasspiegel III, der aber 4 Jahre alt war, und dessen Silber schon die bekannte bräunliche Färbung zeigte, die alte Silber Spiegel mit der Zeit erlangen. Die Reflexion dieses Spiegels ist bedeutend schlechter geworden. Der neusilberne Spiegel IV bestand aus derselben Legirung, aus der die Halbkugeln bestanden, welche ich zur Schwärzung der strahlenden und bestrahlten Flächen benutzte. Auch dieser Spiegel war von Zeiss vorzüglich ausgeführt.

| $\lambda$ | Vollsilberspiegel I |       |               | Versilberte Glasspiegel. |               |       |
|-----------|---------------------|-------|---------------|--------------------------|---------------|-------|
|           |                     |       |               | neu II                   | alt III       |       |
|           | $R$                 | m. F. | Zahl d. Mess. | $R$                      | Zahl d. Mess. | $R$   |
| 0,7786    | 94,24               | 0,39  | 4             | 91,96                    | 3             | 85,15 |
| 0,9104    | 95,43               | 0,15  | 4             | 94,38                    | 2             | 86,48 |
| 1,096     | 96,45               | 0,14  | 5             | 96,04                    | 3             | 88,25 |
| 1,329     | 97,30               | 0,11  | 5             | 97,27                    | 1             | 89,50 |
| 1,718     | 97,70               | 0,11  | 4             | 97,50                    | 2             | 90,94 |
| 2,204     | 97,97               | 0,19  | 4             | 97,95                    | 2             | 91,91 |
| 3,842     | 98,18               | 0,14  | 4             | 98,08                    | 2             | 93,58 |
| 4,810     | 98,23               | 0,18  | 4             | 98,13                    | 2             | 94,06 |
| 6,264     | 98,40               | 0,08  | 6             | 98,20                    | 3             | 95,47 |
| 7,737     | 98,69               | 0,24  | 4             | 98,46                    | 2             | 96,17 |

$\lambda$  bedeutet die Wellenlänge in  $\mu$ ,  $R$  die reflectirte Strahlung in Procenten der einfallenden, m. F. den mittleren Fehler, Zahl d. Mess. die Anzahl der Messungsreihen, aus denen das Mittel und der mittlere Fehler berechnet ist. Bei Spiegel III ist jede Zahl das Resultat nur einer Messungsreihe (die aber aus etwa zehn Einzelbeobachtungen bestand). Die Galvanometerausschläge betrugen nie unter 100 Sct., und ein einziger Ausschlag war bis auf  $\frac{1}{2}$  Sct. genau.





**5. Ueber das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgange eines elektrischen Stromes;  
von Egon v. Schweidler.**

(Aus den Sitzungsberichten der k. Akad. d. Wissensch. in Wien; math.-naturw. Klasse (IIa) 109, Juli 1900.)

Bestimmungen der „Leitfähigkeit“ schlecht leitender flüssiger Dielektrica sind wiederholt ausgeführt worden, doch stimmen die Angaben verschiedener Beobachter so wenig überein, dass die Leitfähigkeit einstweilen kaum als charakteristische Constante einer solchen Substanz verwendet werden kann. Diese Nichtübereinstimmung mag teilweise an dem Umstande liegen, dass die flüssigen Dielektrica häufig chemisch nicht definirte Gemische verschiedener organischer Verbindungen sind (wie die meisten fetten Oele, Petroleum, Benzin u. dgl.), oder sich nur schwierig rein darstellen und in diesem Zustande beim Experimentiren erhalten lassen. Ausserdem hat es sich aber gezeigt, dass selbst bei einer gegebenen Probe einer Substanz der scheinbare Widerstand von Nebenumständen abhängt, indem das Ohm'sche Gesetz bei flüssigen Dielektricas nicht erfüllt ist.

Neben älteren Beobachtungen von Hertz<sup>1)</sup>, Quincke<sup>2)</sup> und anderen sind es hauptsächlich die Untersuchungen Koller's<sup>3)</sup>, die hierüber Aufschluss geben.

Koller maass den Widerstand einer von zwei parallelen Metallplatten begrenzten Schicht eines flüssigen Dielektricum, indem er diesen Condensator und einen bekannten grossen Widerstand hintereinander in den Kreis einer Batterie einschaltete und elektrometrisch den Potentialabfall im Conden-

1) H. Hertz, Wied. Ann. 20. p. 279. 1883.

2) G. Quincke, Wied. Ann. 28. p. 529. 1886.

3) H. Koller, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 98. p. 201. 1889.



Flammengase) zu zeigen. Auch bei diesen finden wir eine Abnahme der Leitfähigkeit infolge der Aufzehrung der freien Ionen, dieselbe Art der Abhängigkeit der Stromstärke von der elektromotorischen Kraft und von der Elektrodenabstand, Erscheinungen, die durch die verschiedene Geschwindigkeit der positiven und negativen Ionen und durch die Störung des elektrischen Feldes infolge der Aufstauung derselben verständlich gemacht wurden.

Um diese Analogien weiter zu verfolgen, habe ich zunächst an Toluol Messungen angestellt; ich bediente mich der directen galvanometrischen Methode, die bei besser isolirenden Flüssigkeiten vielleicht versagt hätte, bei Toluol aber eine ziemliche Variation der elektromotorischen Kräfte zuließ und durch ihre Einfachheit nicht nur bequemer als die elektrometrische, sondern auch verlässlicher ist und rascheres Arbeiten ermöglicht.

Das verwendete Toluol war käufliches, „rectificirtes“; auf besondere Reinheit desselben legte ich keinen Wert, da es sich mir zunächst nicht um die Frage handelte, ob die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze bloss von Verunreinigungen (Staub, Wassergehalt u. dgl.) herrühren oder auch bei vollkommen reinen Substanzen auftreten, sondern nur darum, das Verhalten einer einmal gegebenen Substanz beim Durchgange eines elektrischen Stromes genauer festzustellen. In der That zeigte es sich, dass verschiedene Proben zwar ziemlich verschiedene Werte für die „Leitfähigkeit“ lieferten, dass aber die Aenderungen derselben mit der Durchströmungsdauer und anderen Nebenumständen in qualitativ gleicher Weise erfolgten.

Die Versuchsanordnung war die folgende:

In einer von der zu untersuchenden Flüssigkeitsprobe erfüllten Porzellanschale lagen parallel und horizontal die beiden Elektroden, gebildet durch Messingscheiben von circa 66 mm Durchmesser, die durch drei dazwischen gelegte isolirende Plättchen (entweder Quarzstücke von 1 mm oder Glasstücke von 3,1 mm Dicke) getrennt waren. Die eine Elektrode war über ein Galvanometer, eventuell über einen Kurzschluss der Galvanometerrolle dauernd zur Erde geleitet, die andere mit einem Punkte constanten Potentials verbunden, das zwischen 0 und + 300 Volt variirt und mittels eines Weston-



III.  $E = 10 \text{ V.}$ ,  $d = 1 \text{ mm.}$

| $t$  | $i$ |
|------|-----|
| 0    | —   |
| 0,25 | 115 |
| 0,5  | 110 |
| 1    | 100 |
| 2    | 80  |
| 3    | 75  |
| 4    | 65  |
| 5    | 55  |
| 6    | 72  |
| 7    | 60  |
| 8    | 51  |
| 9    | 42  |
| 10   | 40  |

IV.  $E = 5 \text{ V.}$ ,  $d = 3,1 \text{ mm.}$

| $t$ | $i$ |
|-----|-----|
| 0   | —   |
| 0,5 | 34  |
| 1   | 32  |
| 1,5 | 30  |
| 2   | 26  |
| 2,5 | 24  |
| 3   | 20  |
| 4   | 18  |
| 5   | 15  |
| 6   | 13  |
| 7   | 11  |
| 8   | 10  |
| 9   | 10  |
| 10  | 8   |
| 12  | 6   |
| 14  | 5   |

Man erkennt auch hier wieder, dass die procentuelle Abnahme der Stromstärke, also auch die ihr proportionale Abnahme der Leitfähigkeit, die ich kurz als „Ermüdung“ des Dielektricum bezeichnen will, unmittelbar nach Stromschluss weit höhere Werte annimmt als später, ferner dass die „Ermüdung“ um so mehr in den ersten Secunden erfolgt, je höher die angewendete elektromotorische Kraft ist, bei kleinerer elektromotorischen Kraft aber gleichmässiger über einen längeren Zeitraum verteilt ist, was bereits von Koller behauptet wurde. Häufig (wie z. B. in Versuchsreihe III) kam ein vorübergehendes Anwachsen der Stromstärke vor, was wohl auf zufällige Störungen zurückzuführen sein dürfte.

Wird nach längerer Durchströmungsdauer die elektromotorische Kraft plötzlich ausgeschaltet und die Anode mit der Erde verbunden, so ist ein Polarisationsstrom nicht sicher nachweisbar, jedenfalls übersteigt seine Grösse nicht  $2 \text{ bis } 3 \cdot 10^{-10} \text{ A}$ ; eine durch Polarisation entstandene elektromotorische Gegenkraft beträgt somit höchstens ein Volt und kann weder die allmähliche Abnahme der Stromstärke, noch einige später erwähnte Erscheinungen erklären.

Wird die elektromotorische Kraft, nachdem sie einige Zeit ausgeschaltet war, wieder eingeschaltet, so ist in der Regel die Stromstärke grösser als vorher, sinkt aber wieder auf den

früheren Wert; auch diese Erscheinung ist bei Anwendung höherer Spannungen stärker ausgeprägt, bei niederen Spannungen oft nicht merkbar. Bereits Hertz<sup>1)</sup> erwähnt diese Tatsache und fasst sie auf als das Resultat der Uebereinanderlagerung der „rückstandbildenden“ und der „eigentlichen Strömung“. Da aber nach dem Obigen die den Rückstand liefernden Ströme galvanometrisch nicht messbar, also von anderer Grössenordnung sind, muss man wohl schlechthin ein Wiederaanwachsen der Leitfähigkeit, eine „Erholung“ des Dielektricums in der stromlosen Periode annehmen, über deren Natur man sich die von der Theorie der Gasentladungen nahegelegten Vorstellungen bilden mag.

Zwei Beispiele für den Verlauf dieser Erscheinung geben die Tab. V und VI.

V.  $E = 300 \text{ V.}$ ,  $d = 1 \text{ mm.}$

| $t$     | $i$       | $t$       | $i$       |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| 0       | —         | 26        | 286       |
| 0,25    | 365       | [26—31;   | $E = 0$ ] |
| 1       | 340       | 31,3      | 362       |
| 2       | 325       | 32        | 315       |
| 3       | 315       | 36        | 278       |
| 5       | 309       | [36—36,5; | $E = 0$ ] |
| [5—6;   | $E = 0$ ] | 36,8      | 290       |
| 6,25    | 332       | 37,5      | 265       |
| 7       | 320       | [68—69;   | $E = 0$ ] |
| 10      | 306       | 69,3      | 65        |
| [10—12; | $E = 0$ ] | 73        | 61        |
| 12,3    | 345       | [73—75;   | $E = 0$ ] |
| 13      | 325       | 75,3      | 68        |
| 15      | 307       | 77        | 64        |
| [15—19; | $E = 0$ ] | [77—107   | $E = 0$ ] |
| 19,3    | 362       | 107,3     | 82        |
| 20      | 330       | 120       | 66        |

VI.  $E = 200 \text{ V.}$ ,  $d = 1 \text{ mm.}$

| $t$ | $i$ |
|-----|-----|
| 0   | —   |
| 1   | 125 |
| 2   | 114 |
| 5   | 107 |
| 10  | 100 |
| 68  | 60  |

VII.

|              |  |
|--------------|--|
| $\tau = 0,5$ | $\frac{\Delta i}{i} = 4,3 \text{ Proc.}$ |
| 1            | 7,5                                      |
| 2            | 12,7                                     |
| 4            | 18                                       |
| 5            | 27                                       |

1) H. Hertz, l. c.

In Tab. VII ist der Zusammenhang der durch die procentuelle Zunahme der Leitfähigkeit ( $\Delta i/i$ ) quantitativ festgesetzten „Erholung“ mit der Dauer der Erholungsperiode ( $\tau$ ) auf Grund der Versuchsreihe V dargestellt. Es zeigt sich analog wie bei der „Ermüdung“, dass die „Erholung“ hauptsächlich in der ersten Zeit stattfindet, später langsamer zunimmt.

Wird nach längerer Dauer des Stromes seine Richtung im Dielektricum umgekehrt, so erhält man zunächst eine bedeutend grössere Stromstärke als in der ursprünglichen Richtung, zugleich ist aber die zeitliche Abnahme derselben eine noch raschere als bei einem noch gar nicht vom Strome durchflossenen Dielektricum. Bei beliebig oft wiederholtem Umschalten zeigt sich diese Erscheinung immer wieder; ähnlich wie die Phänomene der „Ermüdung“ und „Erholung“ ist übrigens auch dieses um so auffallender, je grösser die angewandte elektromotorische Kraft ist.

Die Tab. VIII und IX enthalten die Resultate zweier aus anderen herausgegriffenen Versuchsreihen. *A* und *B* bezeichnen hierbei die beiden entgegengesetzten Stromrichtungen.

VIII.  $E = 200 \text{ V.}$

| $t$ |          | $i$ |
|-----|----------|-----|
| 40  | <i>A</i> | 58  |
| 42  | <i>B</i> | 170 |
| 43  | <i>B</i> | 90  |
| 45  | <i>B</i> | 85  |
| 46  | <i>A</i> | 110 |

IX.  $E = 100 \text{ V.}$

| $t$ |          | $i$ |
|-----|----------|-----|
| 0   | <i>A</i> | 77  |
| 11  | <i>A</i> | 41  |
| 12  | <i>B</i> | 107 |
| 16  | <i>B</i> | 60  |
| 17  | <i>A</i> | 115 |
| 22  | <i>A</i> | 47  |

Auch diese Erscheinung, die ja mit den Rückstandserscheinungen offenbar in nahem Zusammenhange steht, lässt sich aus den bereits erwähnten Gründen nicht einfach durch die Annahme erklären, dass zu einem gewöhnlichen Leitungsstrome ein Rückstandsstrom sich addire. Vielmehr scheint hier ein Analogon zu der unipolaren Leitfähigkeit der Gase vorzuliegen; ein durch die längere Wirkung eines Stromes ermüdetes Dielektricum zeigt, wenn auch nicht ein streng unipolares Leitvermögen, wie Gase unter bestimmten Bedingungen, doch eine beträchtliche Verschiedenheit der Werte seines Leitvermögens für entgegengesetzte Stromrichtungen.

Die Erscheinungen der „Ermüdung“ und „Erholung“ er-





X.  $E = 300 \text{ V.}$ ,  $d = 24 \text{ mm.}$

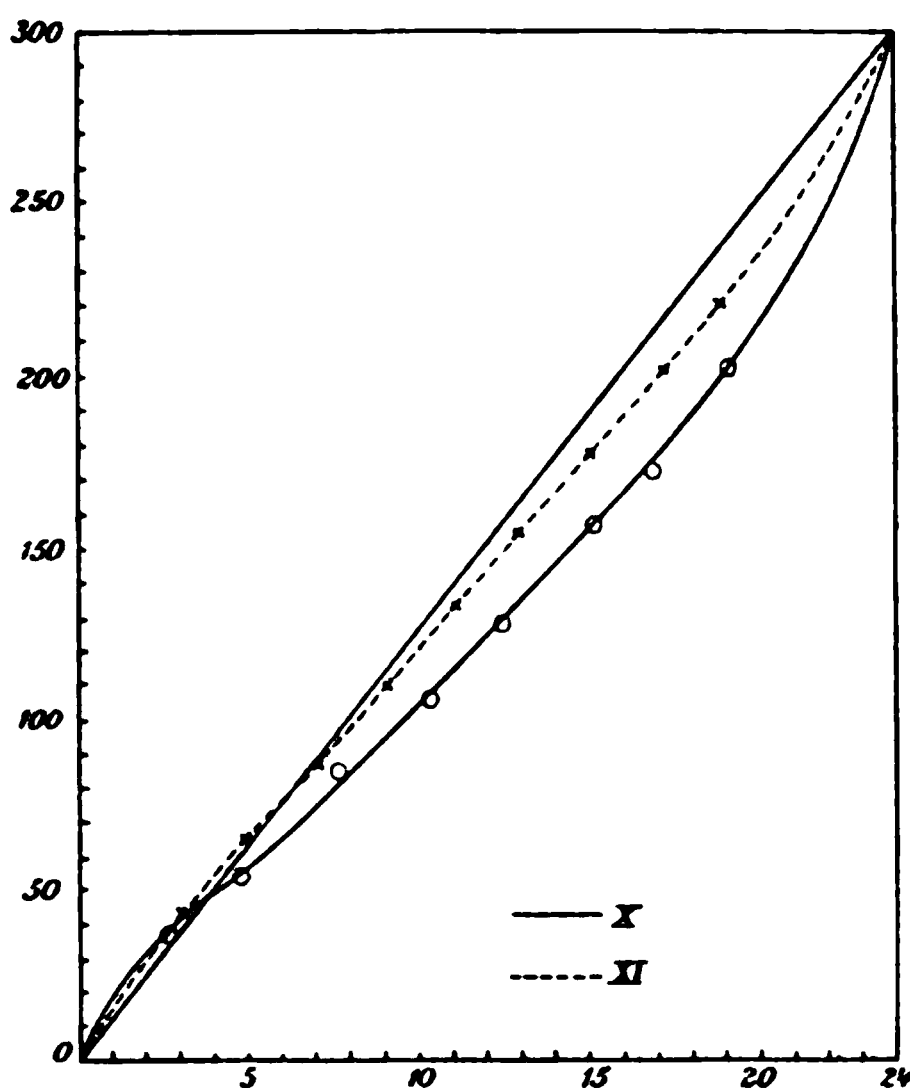
$$\frac{E}{d} = 12,5 \frac{\text{V.}}{\text{mm}}.$$

|         |          |
|---------|----------|
| $x = 3$ | $V = 41$ |
| 5       | 57       |
| 7,5     | 85       |
| 10      | 106      |
| 12,5    | 130      |
| 15      | 157      |
| 17      | 174      |
| 19      | 200      |

XI.  $E = 300 \text{ V.}$ ,  $d = 24 \text{ mm.}$

$$\frac{E}{d} = 12,5 \frac{\text{V.}}{\text{mm}}.$$

|         |          |
|---------|----------|
| $x = 3$ | $V = 43$ |
| 5       | 66       |
| 7       | 88       |
| 9       | 110      |
| 11      | 132      |
| 13      | 156      |
| 15      | 177      |
| 17      | 200      |
| 19      | 222      |



Es ist deutlich zu erkennen, dass die Potentialgradienten an den Elektroden erhöht, in der Mitte dagegen erniedrigt sind, dass also in der Nähe der Anode freie negative, in der Nähe der Kathode positive Ladungen angehäuft sind.

Auf Grund dieser Ergebnisse dürfte der Schluss gerechtfertigt sein, dass die Analogien im Verhalten ionisierter Gase und flüssiger Dielektrica keine zufälligen, sondern im Wesen des Entladungsvorganges begründet sind.

Wien, Physikalisch-chemisches Institut der Universität.

(Eingegangen 7. November 1900.)

0



sollen die Magnete bei ziemlich ruhigem Lagern ihr Moment constant erhalten. Diesen Bedingungen unterliegen z. B. die Magnete bei erdmagnetischen und physikalischen Instrumenten, Normalmagnete zur Aichung von Galvanometern etc. Bei solchen Magneten ist die hauptsächlichste Ursache der Aenderungen des Momentes in den Temperaturschwankungen, wie sie durch den Wechsel der Jahreszeiten bedingt sind, zu suchen. Daraus folgt aber, dass man von diesem Gesichtspunkte aus ein grösseres Zeitintervall für die Beobachtungen heranziehen muss.

Es ist gar nicht einzusehen, warum eine Stahlsorte, die sich in einer Beziehung bewährt, auch in der anderen die besten Resultate liefern müsste. Dies ist in der That auch nicht der Fall.

Im allgemeinen wird man bei der Prüfung der Stahlarten, bez. der daraus verfertigten Magnete ein Verfahren einschlagen müssen, wie man es bei der Untersuchung der Normalelemente angewendet hat. Hierbei bildet die Ausdehnung der Beobachtungen auf ein grosses Zeitintervall die Hauptrolle.

Um einen Beitrag zur Klärung der soeben erwähnten Punkte zu liefern, habe ich mit einer grossen Zahl von Magnetstäben Untersuchungen angestellt, die einen Zeitraum von mehr als einem Jahre umfassen. Ich untersuchte das Verhalten der Magnete bei ruhigem Lagern; während einer meiner Schüler, Hr. Krüse, die Probestücke auf die Constanz ihres Momentes bei starken Erschütterungen und sonstigen mechanischen Einflüssen untersuchte.<sup>1)</sup>

Die Untersuchung erstreckte sich auf Magnete verschiedener Provenienz. Die Probestücke wurden von verschiedenen Fabriken<sup>2)</sup> in gehärtetem Zustande bezogen und hier im Institute in dem homogenen Felde (600—700 abs. Einh.) einer stromdurchflossenen Spule magnetisirt. Für die vorliegende Frage sind insbesondere die Beobachtungen an einer Reihe von Stahlstäben der Firma „Böhler & Cie“ lehrreich. Diese

---

1) Vgl. I. Klemenčič, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Abt. IIa. 109. p. 242. 1900; C. Krüse, l. c. p. 195.

2) Von Böhler & Cie. in Wien, von Marchal in Paris, von Zellweger in Uster bei Zürich, von Remy in Hagen und von Berg in Berlin.



wieder aufgenommen. Die Magnete lagerten in dieser Zwischenzeit ganz ruhig an ihrem Orte. Was nun die Abnahme des Momentes in den ersten 27 Tagen nach der Magnetisirung anbelangt, so ergab sich dabei pro Magnet bei den einzelnen Marken eine mittlere Abnahme für die beiden Dimensionsverhältnisse wie folgt:

| Marke | $V = 25$   | $V = 10$   |
|-------|------------|------------|
| „UI“  | 1,25 Proc. | 1,72 Proc. |
| „00“  | 1,06       | 1,20       |
| „0“   | 1,01       | 1,19       |
| „45“  | 0,69       | 0,85       |
| „43“  | 0,72       | 0,89       |

Wenn man die Güte einer Stahlsorte nach der Abnahme des Momentes während der ersten 27 Tage nach der Magnetisirung beurteilen wollte, würde sich also die Reihenfolge

„45“ „43“ „0“ „00“ „UI“

ergeben.

Für die weiteren Messungen wurde, wie schon erwähnt, eine Teilung der Magnete vorgenommen. Für die Beobachtungen der Abnahme bei ruhigem Lagern wurden nur 20 Stäbe beibehalten, indem von jedem Paar ein Stück ausgeschieden wurde. Mit den ausgeschiedenen Exemplaren wurden sodann die weiter zu besprechenden Versuche des Hrn. Krüse gemacht.

Die weiteren Beobachtungen laufen von Juli 1898 bis Ende October 1899. Die mittlere Abnahme pro Magnet ergibt sich während dieser Zeit bei den einzelnen Marken:

| Marke | $V = 25$   | $V = 10$   |
|-------|------------|------------|
| „UI“  | 1,37 Proc. | 3,33 Proc. |
| „00“  | 1,65       | 3,84       |
| „0“   | 1,58       | 3,80       |
| „45“  | 1,35       | 2,95       |
| „43“  | 1,51       | 3,21       |

Es resultirt daher in diesem Falle die Reihenfolge:

„45“ „UI“ „43“ „0“ „00“

für die Güte der untersuchten Sorten.

Aus diesen Beobachtungen folgt zunächst die Thatsache, dass für die Constanz des Momentes die grossen Dimensionsverhältnisse besser sind als die kleinen, was zu erwarten war.



der Magnetisirung bei den besten Böhler'schen Stahlorten etwa 0,1 Proc. und darunter beträgt.

Hr. Krüse untersuchte mehrere Böhler'sche und auch andere Magnete hinsichtlich ihres Verhaltens bei Erschütterungen, indem er sie aus verschiedenen Höhen (1 und 1,94 Meter, in einigen Fällen auch 9,6 Meter) auf eine Marmorplatte fallen liess und sodann die Abnahme ihres Momentes bestimmte; auch brachte er die Magnete vielfach mit Eisenstäben und Eisenplatten in Berührung und untersuchte auch den Einfluss dieser Umstände auf die Constanz des Momentes. Schliesslich bestimmte er die Magnetisierungscurven einiger der untersuchten Stäbe, berechnete hieraus die Coercitivkraft und prüfte danach den Zusammenhang zwischen dieser und der Abnahme des Momentes nach Erschütterungen etc.

Krüse's Beobachtungen liefern das Resultat, dass die Verluste nach Erschütterungen um so grösser ausfallen, je kleiner die Coercitivkraft ist. Folgende Daten kennzeichnen diese Thatsache; sie beziehen sich auf Böhler'sche Magnete von  $V = 25$  bei 6 mm Seite.

| Marke            | „0“ | „00“ | „UI“ | „43“ | „45“ |
|------------------|-----|------|------|------|------|
| Coercitivkraft   | 84  | 76   | 63   | 59   | 57   |
| Abnahme in Proc. | 3,5 | 5,4  | 5,5  | 5,9  | 6,7  |

Versuche mit den gleichen Marken aber mit Stäben von 4 mm Seite und  $V = 25$  ergaben das gleiche Resultat.

Will man also die Güte einer Stahlorte nach der Abnahme des Momentes bei Erschütterungen beurteilen, so ergibt sich aus den Beobachtungen Krüse's für die Böhler'schen Marken die Reihenfolge:

„0“ „00“ „UI“ „43“ „45“,

während meine Beobachtungen für die Güte der Stahlorten bei ruhigem Lagern die Reihe

„45“ „UI“ „43“ „0“ „00“

ergeben.

Die beiden Reihen laufen zwar nicht ganz entgegengesetzt, jedoch folgt aus ihnen ganz deutlich, dass Magnete, welche sich bei Erschütterungen als besonders gut erweisen, bei ruhiger Lagerung durch längere Zeit die geringste Constanz des Momentes erwarten lassen. Diese Thatsache wird durch

das Verhalten eines Magnetes von Zellweger noch besonders bekräftigt. Dieser Magnet (rund, Durchmesser = 8 mm,  $V = 12,5$ ) zeigte nach Erschütterungen unter allen untersuchten Magneten die geringste Abnahme, bei ruhigem Lagern verlor er jedoch in acht Monaten 8,7 Proc. seines Momentes, eine Abnahme des Momentes, welche jene der übrigen untersuchten Magnete weitaus übertrifft.

Im allgemeinen wird man danach den Satz aussprechen können, dass bei ruhiger Lagerung Magnete mit kleiner Coercitivkraft bessere Resultate ergeben als solche mit grosser. Danach müsste eigentlich weiches Eisen unter Umständen die besten permanenten Magnete liefern. Vorläufige Orientierungsversuche haben in der That ergeben, dass weiches Eisen den remanenten Magnetismus zeitlich überraschend gutfesthält, sobald man nur jede Erschütterung des Probestabes vermeidet.

Innsbruck, im November 1900.

(Eingegangen 21. November 1900.)







Feder abgestimmt. Falls eine Längendifferenz auftritt, wird diese als Correctionsglied notirt. Dann wird die belastete Feder so lang gefasst, dass sie sicher zu langsam schwingt, das Papierquadrat der Wechselstrombeleuchtung ausgesetzt, und die Feder durch Zupfen in Schwingung gebracht. Bei zunehmender Verkürzung lassen sich dann in drei- und zweifachen Bildern die tieferen Octaven beobachten. Tritt zum *ersten* Mal nur *ein* Bild auf, so stimmen Funkenzahl und Schwingungszahl nahe überein. Das Quadrat scheint sich erst schnell, dann langsamer hin und her zu bewegen, bis es schliesslich still steht. Ein völliges Stillstehen wird man nur bei sehr regelmässigen Unterbrechungen erhalten, immer aber lässt sich mit Sicherheit auf die langsamste Bewegung einstellen, da die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung bei weiterer Verkürzung wieder zunimmt.

Nun wird die Länge der Feder gemessen, das Correctionsglied für die Länge hinzuaddirt und nach der angegebenen bekannten Formel die Schwingungszahl berechnet.

Häufig, namentlich bei schnelleren Schwingungen, ist es von Vorteil, nachdem man den Grundton bestimmt hat, diesen durch Mitbenutzung der tieferen Octaven zu corrigiren, weil bei diesen die Federlänge eine grössere, die Aenderung der Tonhöhe mit der Länge eine langsamere und daher die Genauigkeit eine bessere ist. Aber auch höhere Octaven können zur Controle dienen.

Ich lasse einige Beispiele mit Variation der benutzbaren Möglichkeiten folgen.

A. Kleines Inductorium (ziemlich constant laufend) mit Hammerunterbrecher.

1. Feder einer Zugklingel, 28 mm breit;  $e = 0,82$  mm; Längencorr.  $\lambda = 0$  cm.

|                           |               |                        |            |
|---------------------------|---------------|------------------------|------------|
| 2 Bilder (tiefere Octave) | $l = 23,8$ cm | $\frac{1}{2} N = 11,5$ | $N = 23,0$ |
| 1 Bild (Grundton)         | $l = 17,1$ „  |                        | $N = 22,5$ |

2. Uhrfeder, 7 mm breit;  $e = 0,42$  mm; Längencorr.  $\lambda = 0$  cm.

|                     |              |            |            |
|---------------------|--------------|------------|------------|
| 1 Bild (Grundton)   | $l = 12$ cm  |            | $N = 23,2$ |
| 1 „ (höhere Octave) | $l = 8,7$ cm | $2 N = 44$ | $N = 22$   |

3. Uhrfeder, 22 mm breit;  $e = 0,26$  mm; Längencorr.  $\lambda = 0$  cm.

|                           |                |                        |            |
|---------------------------|----------------|------------------------|------------|
| 2 Bilder (tiefere Octave) | $l = 13,85$ cm | $\frac{1}{2} N = 10,7$ | $N = 21,4$ |
| 1 Bild (Grundton)         | $l = 9,3$ „    |                        | $N = 23,8$ |

4. Uhrfeder, 1,5 mm breit;  $e = 0,15$  mm; Längencorr.  $\lambda = + 0,15$  cm.

|                   |                               |  |            |
|-------------------|-------------------------------|--|------------|
| 1 Bild (Grundton) | $l = 7,1 + \lambda = 7,25$ cm |  | $N = 22,6$ |
|-------------------|-------------------------------|--|------------|



## 8. *Ueber Temperaturen in Geissler'schen Röhren*<sup>1)</sup>; von *K. Kerkhof*.



§ 1. Die ersten Gesetze über die durch Entladungen in Geissler'schen Röhren hervorgerufenen Erwärmungen rühren von G. Wiedemann<sup>2)</sup> her. Mit Hülfe eines Thermoelementes, das er aussen an die Capillarröhren bringt, findet er, dass „Röhren von verschiedenem inneren, aber gleichem äusseren Durchmesser in gleichen Zeiten durch die Entladungen einer Influenzmaschine nahezu gleiche Wärmemengen erhalten.“

Dieses Wiedemann'sche Gesetz ist späterhin durch die calorimetrischen Messungen von Naccari und Bellati<sup>3)</sup>, von E. Wiedemann<sup>4)</sup> und Neesen und Paalzow<sup>5)</sup> bestätigt worden; auch führen die Messungen des Potentialgradienten in verschieden weiten Geissler'schen Röhren von A. Herz<sup>6)</sup>, E. Wiedemann und G. C. Schmidt<sup>7)</sup>, wie das Joule'sche Gesetz, wenn man die von Hittorf<sup>8)</sup> gefundene Gesetzmässigkeit zwischen Leitungsvermögen und Stromdichtigkeit berücksichtigt, zu dem Ergebnis, dass die vom Strome in einer bestimmten Zeit erzeugte Wärmemenge von dem Röhrenquerschnitt unabhängig ist.

Unter Zugrundelegung der calorimetrischen Messungen sind nun die Temperaturen, die Gase bei dem Durchgang des Stromes in verschieden weiten Röhren annehmen, berechnet worden. E. Wiedemann<sup>9)</sup>, Neesen und Paalzow<sup>10)</sup> kommen

1) Auszug aus der Bonner Dissertation mit Zusatz.

2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 158. p. 57. 1876.

3) A. Naccari u. M. Bellati, Beibl. 2. p. 720. 1878.

4) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10. p. 202. 1880; 20. p. 758. 1883.

5) F. Neesen u. A. Paalzow, Verhandl. d. Gesellsch. Deutscher Naturf. u. Aerzte, 63. Versamml. Abt. II. p. 51. 1890; Wied. Ann. 56. p. 275. 1895.

6) A. Herz, Wied. Ann. 54. p. 244. 1895.

7) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 66. p. 314. 1898.

8) W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 629. 1879.

9) E. Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 298. 1879.

10) F. Neesen u. A. Paalzow, Wied. Ann. 56. p. 276. 1895.



schen Galvanometers wurde durch ein Fernrohr, das etwa 2 m von dem Spiegel der Nadel entfernt war, abgelesen; es zeigte sich, dass einer Temperaturerhöhung um  $1^{\circ}$  C. des Bolometerdrahtes bei einer Stromstärke von etwa 0,005 Amp. 4 Sct. entsprachen, sodass man die  $\frac{1}{8}$ -Grade noch sehr genau ablesen konnte.

Da mir keine constante Batterie zur Verfügung stand, so wurden die Versuche mit einem Ruhmkorff ausgeführt, der so weit vom Galvanometer aufgestellt war, dass er keinen störenden Einfluss auf letzteres ausüben konnte.

Als Gase wurden  $\text{CO}_2$ , O, H und Luft benutzt.

§ 3. Die ersten Versuche bezogen sich darauf, die Temperaturen des positiven Lichtbüschels für verschiedene Gase in Röhren verschiedener Lichtweite zu ermitteln. Vor jeder Messungsreihe vergewisserte man sich durch Ausschalten der Bolometerstromquelle, dass eine Ablenkung der Galvanometernadel nur durch die Erwärmung des Bolometerdrahtes veranlasst wurde. Beobachtete man die Ablenkung der Galvanometernadel von dem Augenblick an, wo der Strom durch die Geissler'sche Röhre hindurchging, so bemerkte man zunächst eine erhebliche Ablenkung, bis nach einigen Minuten das Maximum der Ablenkung eingetreten war, bei welchem wir annehmen können, dass der Wärmezustand im Geissler'schen Rohr stationär ist, dass also ebensoviel Wärme im Entladungsrohr erzeugt wird, als nach aussen an die Glaswand und an die Luft abgegeben wird. Der Galvanometerausschlag blieb bei niedrigem Drucke in der Geissler'schen Röhre constant, während bei den höheren Drucken von etwa 7 mm an geringe Schwankungen der Galvanometernadel eintraten. Die Messungen ergaben, dass die Temperaturen im positiven Lichtbüschel bei Verminderung des Druckes geringer werden, um vom kritischen Drucke an wieder schnell anzuwachsen<sup>1)</sup>, und zwar sind die Temperaturen bei demselben Drucke für  $\text{CO}_2$  grösser, als die für Luft, diese erheblich grösser als die Temperaturen bei der Entladung durch Wasserstoff; dieses Verhältnis ändert sich jedoch von Druck zu Druck. Temperaturcurven, die in Röhren

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10. p. 226. 1880 und 20. p. 757. 1883; A. Naccari u. G. Guglielmo, Att. di Torino 19. p. 9. 1884.





Um eine grössere Unterbrechungszahl zu erhalten, sind noch einige Messungen mit einem Wehneltunterbrecher bei einer Klemmspannung von etwa 70 Volt gemacht worden.

e) Wasserstoff 3,5 mm.

|             |     |    |      |
|-------------|-----|----|------|
| Durchmesser | 4   | cm | 29   |
| „           | 2   | „  | 49,1 |
| „           | 1,5 | „  | 63,5 |

f) Wasserstoff 2,3 mm.

|             |     |    |      |
|-------------|-----|----|------|
| Durchmesser | 4   | cm | 31   |
| „           | 2   | „  | 49,8 |
| „           | 1,5 | „  | 72   |

Bei der folgenden Reihe wird das Inductorium durch acht Accumulatoren angeregt; es geht hier der Oeffnungs- und Schliessungsfunke über:

g) Wasserstoff 2,2 mm.

|             |     |    |      |
|-------------|-----|----|------|
| Durchmesser | 5   | cm | 30,6 |
| „           | 4   | „  | 33   |
| „           | 2   | „  | 46,8 |
| „           | 1,5 | „  | 61,8 |

Der aus dem Wiedemann'schen Gesetz gezogene Schluss, dass die Temperaturen sich umgekehrt proportional den Röhrenquerschnitten verhalten, steht mit den vorhergehenden Messungen in Widerspruch.

Das Wiedemann'sche Gesetz beruht auf Bestimmungen der Wärmemenge, die von einem Entladungsschlage herrührt; man könnte also den obigen Messungen den Einwurf machen, dass die Entladungen eines Inductoriums benutzt worden sind, die nur nach gewissen Zeiträumen durch die Geissler'sche Röhre hindurchgehen; das Bolometer müsste demnach, vorausgesetzt, dass das Verhältnis der zwischen den einzelnen Entladungen verstrichenen Zeit zu der Entladungsdauer sehr gross ist, eine Temperatur anzeigen, die notwendig kleiner sein müsste als die Temperatur, welche das Gas bei seinem Aufleuchten hatte.<sup>1)</sup> Einer continuirlichen Entladung werden wir aber um so näher kommen, je grösser wir die Zahl der Unterbrechungen des primären Stromkreises des Inductoriums machen. Nach den vielfachsten Messungen lassen aber selbst gesteigerte Unterbrechungszahlen — Wagner'scher Hammer, Deprez- und Wehneltunterbrecher — keine wesentlichen Unterschiede erkennen.

1) B. Hasselberg, l. c.



Setzen wir

$$T_1 = c \log r_1 + c',$$

$$T_2 = c \log r_2 + c',$$

so wird bei der Elimination von  $c$  und  $c'$ :

$$(5) \quad T = (T_1 - T_2) \frac{\log r - \log r_1}{\log r_1 - \log r_2} + T_1.$$

Demnach

$$(6) \quad \frac{dT}{dr} = \frac{T_1 - T_2}{r(\log r_1 - \log r_2)}.$$

Für den Wärmestrom  $U$  in der Richtung  $r$  haben wir die Gleichung

$$(7) \quad U = -k \frac{dT}{dr},$$

wo  $k$  das Wärmeleitungsvermögen bedeutet, nach Gleichung (6) also:

$$(8) \quad U = \frac{k(T_1 - T_2)}{r(\log r_2 - \log r_1)}.$$

Die Wärmemenge, welche längs der Peripherie des Kreises vom Radius  $r$  durch die Längeneinheit des Rohres ausströmt, ist:

$$(9) \quad 2\pi r U = \frac{2\pi k(T_1 - T_2)}{\log r_2 - \log r_1},$$

wo  $T_1$  und  $T_2$  die Temperaturen in den Kreisperipherien vom Radius  $r_1$  und  $r_2$  bedeuten. Aus Gleichung (9) folgt, dass für eine Geissler'sche Röhre mit dem inneren Radius  $r_1$  und dem äusseren  $r_2$  die Temperatur an der inneren Glaswand  $T_1$  sich berechnet zu:

$$(10) \quad T_1 = \frac{r_2 U}{k} (\log r_2 - \log r_1) + T_2,$$

wo  $k$  das Wärmeleitungsvermögen des Glases und  $T_2$  die Temperatur an der äusseren Glaswand bedeutet.

Um nun aus der an der inneren Glaswand eintretenden Wärmemenge und der dort herrschenden Temperatur  $T_1$  einen Schluss auf die mittlere Temperatur des Gases zu machen,

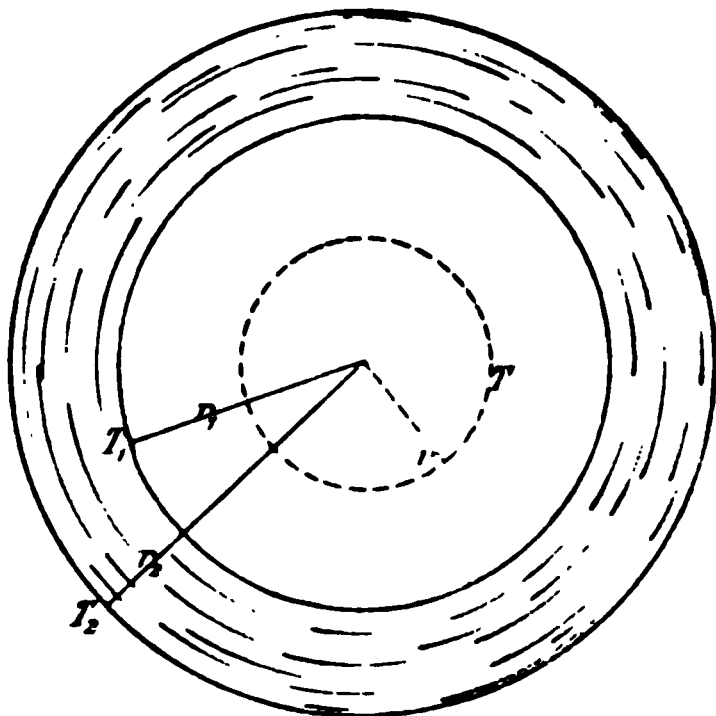


Fig. 1.

denken wir uns einen mit dem Rohre concentrischen Gas-cylinder vom Radius  $r$  und der Höhe der Längeneinheit, in welchem überall die constante Temperatur  $T$  herrscht, und von dem durch Leitung durch die übrige Gasschicht an der inneren Glaswand in das Glas eine bestimmte Wärmemenge eintritt.

Die mittlere Temperatur, die die „Gasröhre“ infolge der Wärmeleitung angenommen hat, ist:

$$\begin{aligned} T_{rr_1} &= \frac{1}{(r_1^2 - r^2) \pi} \int_r^{r_1} T 2 r \pi d r = \frac{2}{(r_1^2 - r^2)} \int_r^{r_1} T r d r \\ &= \frac{2}{r_1^2 - r^2} \left\{ \left[ \frac{T r^2}{2} \right]_r^{r_1} - \int_r^{r_1} \frac{r^2}{2} d T \right\}. \end{aligned}$$

Nach Gleichung (4a) ist:

$$d T = -\frac{c}{r} d r,$$

also:

$$T_{rr_1} = \frac{T_1 r_1^2 - T r^2}{r_1^2 - r^2} + \frac{U_\beta r_1}{2 k'},$$

da

$$U_\beta = -k' \left( \frac{d T}{d r} \right)_{r=r_1} = -\frac{k' c}{r_1}.$$

Die mittlere Temperatur des ganzen Gases würde hier-nach sein:

$$\frac{T_{rr_1} (r_1^2 - r^2) \pi + T r^2 \pi}{r_1^2 \pi} = T_1 + \frac{U_\beta r_1}{2 k'} - \frac{U_\beta r_1 r^2}{2 r_1^2 k'}.$$

Setzen wir nun diesen Ausdruck ein in die Gleichung:

$$T_m = \frac{1}{r_1^2 \pi} \int_0^{r_1} T 2 r \pi d r,$$

so wird:

$$(11) \quad T_m = \frac{2}{r_1^2} \int_0^{r_1} \left( T_1 + \frac{U_\beta r_1}{2 k'} - \frac{U_\beta r_1 r^2}{2 k r_1^2} \right) r d r = T_1 + \frac{U_\beta r_1}{4 k'},$$

Nach Gleichung (10) wird:

$$(12) \quad T_m = \frac{r_2 U}{k} (\log r_2 - \log r_1) + \frac{U_\beta r_1}{4 k'} + T_2.$$

Die Wärmemenge, welche an der äusseren Glaswand austritt, ist dieselbe, welche, in dem Gase durch den elektrischen Strom erzeugt, an der inneren Glaswand eintritt:

$$2 r_2 \pi U = 2 r_1 \pi U_\beta = Q_1,$$

mithin wird:

$$(13) \quad T_m - T_2 = \frac{Q_1}{2 \pi k} (\log r_2 - \log r_1) + \frac{Q_1}{8 \pi k'}.$$

Nach den Wiedemann'schen Messungen sind bei dem Durchgang des elektrischen Stromes in Capillaren von demselben äusseren Halbmesser  $r_2$  und dem verschiedenen inneren  $r_1$  und  $r_1'$  die Temperaturen an der äusseren Glaswand ( $T_2$ ) ebenso wie die ausströmenden Wärmemengen ( $Q_1$ ) dieselben. Für eine Röhre vom Radius  $r_1'$  bez.  $r_2$  würde die mittlere Temperatur demnach sein:

$$(14) \quad T_m' = \frac{Q_1}{2 \pi k} (\log r_2 - \log r_1') + \frac{Q_1}{8 \pi k'} + T_2.$$

Setzen wir  $T_2 = 0$ , so wird:

$$(15) \quad T_m : T_m' = \frac{1}{k} \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{4 k'} : \frac{1}{k} \log \left( \frac{r_2}{r_1'} \right) + \frac{1}{4 k'}.$$

Zu einem ähnlichen Ausdruck gelangt man durch einige Folgerungen, welche man aus der Abhandlung von E. Warburg: „Ueber Wärmeleitung und Temperatur der in Geissler'schen Röhren leuchtenden Gase“<sup>1)</sup> ziehen kann.

Für das positive ungeschichtete Licht ist unter der Annahme, dass die ganze elektrische Arbeit dort, wo sie geleistet wird, sich in Wärme umsetzt und die Stromdichte im ganzen Querschnitt des Rohres constant ist, die durch die Stromarbeit hervorgerufene Wärmemenge  $q$  in Grammc calorien pro Secunde und Cubikcentimeter:

$$1) \quad q = 0,237 \frac{v^2 i}{R^2 \pi},$$

wo  $v$  der Potentialgradient in Volt pro Centimeter,  $i$  die Stromstärke in Ampère und  $R$  der innere Röhrenhalbmesser in Centimetern bedeutet.

1) E. Warburg, Wied. Ann. 54. p. 265. 1895.

Vermittelst der Gleichungen:

$$(2) \quad r^2 \pi q = - 2 r \pi k' \frac{d u}{d r} (r < R)$$

und

$$(3) \quad R^2 \pi q = - 2 r \pi k \frac{d u}{d r} (r > R),$$

wo  $u$  die Temperatur,  $k'$  das Wärmeleitungsvermögen des Gases und  $k$  das des Glases bezeichnet, findet man für die mittlere Temperatur des Gases:

$$(4) \quad \bar{u} = v i \left( \frac{0,237}{2 \pi k} \log \left( \frac{R'}{R} \right) + \frac{0,237}{8 \pi k'} \right).$$

Da der Potentialgradient nach den Messungen von A. Herz<sup>1)</sup> für das positive Lichtbündel von dem Röhrenquerschnitt nahezu unabhängig ist (der Potentialgradient nimmt mit abnehmender Lichtweite ein wenig zu), so ist für die gleiche Stromstärke  $i$  das Product  $vi$  in allen Röhren eine Constante. Nach Gleichung (4) besteht daher zwischen den Temperaturen in zwei Geissler'schen Röhren mit dem gleichen äusseren Radius  $R'$  und dem verschiedenen inneren  $R_\alpha$  und  $R_\beta$  die Beziehung:

$$(5) \quad \bar{u}_\alpha : \bar{u}_\beta = \frac{1}{k} \log \left( \frac{R'}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{4 k'} : \frac{1}{k} \log \left( \frac{R'}{R_\beta} \right) + \frac{1}{4 k'}.$$

Dieses ist aber derselbe Ausdruck für die Temperaturen, wie er sich aus den Wiedemann'schen Messungen ergeben hatte, was nach den Annahmen, unter denen die vorhergehende Rechnung vor sich ging, und nach den Untersuchungen von Ångström<sup>2)</sup> und W. Wien<sup>3)</sup> vorauszusehen war.

Ist die Glasdicke der Röhre  $\varrho$  gegen den Radius der Röhre hinlänglich klein, so erhält man für die mittlere Temperatur den Wert:

$$u = v i \left( \frac{0,0378}{k'} \left( \frac{\varrho}{R} \right) + \frac{0,0094}{k} \right).$$

Bei gleicher Glasdicke würden die Temperaturen in verschiedenen Geissler'schen Röhren hiernach höchstens den reciproken Werten der Radien proportional sein können, wie es auch die obigen Messungen ergeben, und zwar müssen.

1) A. Herz, Wied. Ann. 54. p. 264. 1895.

2) K. Ångström, Abhandl. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Upsala 1892.

3) W. Wien, Physikal. Zeitschr. 1. p. 10. 1899.

entsprechend den Werten für das Wärmeleitungsvermögen  $k$  für Wasserstoff und Luft, die Temperaturunterschiede in den verschiedenen Querschnitten für Luft grösser sein als für Wasserstoff [vgl. für gleiche Verhältnisse ( $p = 3,2$  mm), Reihe a und d].

Nach den vorstehenden Erörterungen können wir demnach auch in den engen Capillaren nicht so hohe Temperaturen annehmen, wie sie nach den calorimetrischen Messungen berechnet worden sind.<sup>1)</sup>

**Temperaturen in Geissler'schen Röhren beim Einschalten von Funkenstrecken.**

§ 5. Mit Rücksicht auf die in der Spectralanalyse bisher allgemein vertretene Ansicht, dass die Veränderung des Bandenspectrums beim Einschalten von Funkenstrecken in ein Linienspectrum durch die Temperaturerhöhung des Gases bedingt ist, indem das Bandenspectrum einer niedrigen, das Linienspectrum einer hohen Temperatur entspricht<sup>2)</sup>, schien es nicht unwesentlich, den Einfluss von Funkenstrecken auf die Temperatur des Gases zu untersuchen; es war hierzu die Einrichtung getroffen, dass mit Hülfe einer Wippe ein gut isolirtes Funkenmikrometer in den secundären Stromkreis des Inductoriums ein- und ausgeschaltet werden konnte. Die Versuche mussten sich in der Regel auf sehr kleine Funkenstrecken beschränken, da beim Einschalten von grossen Funkenstrecken erhebliche Schwankungen der Galvanometernadel eintraten.

Beim Einschalten von 2—3 cm grossen Funkenstrecken zeigt sich stets eine höhere Temperatur als ohne Funkenstrecke und zwar nahm diese Temperaturerhöhung mit abnehmendem Drucke zu; wurden kleinere Funkenstrecken eingeschaltet, so zeigte die Galvanometernadel ohne grössere Schwankungen niedrigere Temperaturen an.

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. 54. p. 270. 1894; W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 576. u. 578. 1879; G. Klingenberg, Elektrotechn. Zeitschr. 14. p. 226. 1896; M. Cantor, Ann. d. Phys. 3. p. 462. 1900; H. Hertz, Wied. Ann. 19. p. 782. 1895; F. Neesen u. A. Paalzow, Wied. Ann. 56. p. 226. 1895; A. Wüllner, Lehrbuch der Physik 3. p. 1892. 1896; O. Lehmann, Elektrische Entladungen p. 541. 1898.

2) H. Kayser, Wied. Ann. 42. p. 310. 1891; E. Wiedemann, Wied. Ann. 10. p. 231. 1880.





Bei grösseren Funkenstrecken als 10 mm nimmt die Temperatur wieder zu, es treten aber jetzt derartige Schwankungen der Galvanometernadel ein, dass keine genauere Messung mehr möglich ist.

| Druck 2,5 mm  |             | Druck 1,5 mm  |             |
|---------------|-------------|---------------|-------------|
| Funkenstrecke | Scalenteile | Funkenstrecke | Scalenteile |
| 0 mm          | 83          | 0 mm          | 157         |
| 1             | 79          | 1             | 152         |
| 2             | 79          | 2             | 151         |
| 3             | 81,5        | 4             | 149         |
| 4             | 88,5        | 6             | 148,5       |
| 6             | 86,5        | 10            | 156         |
| 10            | 87          | 20            | 180         |

Mit zunehmender Funkenstrecke nimmt also die Temperatur im positiven Lichtbüschel immer mehr ab; doch wird die Temperaturerniedrigung bei gleicher Zunahme der Funkenstrecke immer kleiner, bis bei einer gewissen Länge der Funkenstrecke ein Minimum der Temperatur vorhanden ist; diese Funkenstrecke hat für die verschiedenen Drucke verschiedene Werte,

|   |   |   |     |   |   |   |   |     |   |
|---|---|---|-----|---|---|---|---|-----|---|
| bei dem Drucke 7 mm ist sie etwa gleich 10 mm |   |   |     |   |   |   |   |     |   |
| „   | „ | „ | 4,2 | „ | „ | „ | „ | 6   | „ |
| „   | „ | „ | 2,5 | „ | „ | „ | „ | 1,5 | „ |
| „   | „ | „ | 1,3 | „ | „ | „ | „ | 6   | „ |

Schliesslich möge noch eine Messungsreihe angeführt werden, welche den Einfluss einer Funkenstrecke von 3 mm Länge auf die Temperatur der Gase in Geissler'schen Röhren verschiedenen Querschnittes zeigt:

| Durchmesser<br>der Röhre | Luft, $p = 2,4$ mm    |                      | Differenz |
|--------------------------|-----------------------|----------------------|-----------|
|                          | Temperatur            |                      |           |
|                          | ohne<br>Funkenstrecke | mit<br>Funkenstrecke |           |
| 4 cm                     | 12,5 °                | 11,6 °               | 0,9 °     |
| 2                        | 21,2                  | 19,9                 | 1,3       |
| 1,5                      | 26                    | 25,5                 | 1,5       |

Man erkennt aus der Tabelle, dass die Temperaturerniedrigung durch Einschalten kleiner Funkenstrecken um so grösser ist, je enger der Querschnitt der Röhre wird.



Spectrum auftreten, beim Einschalten einer Selbstinduction geschwächt werden und sogar verschwinden, hat man den Schluss gezogen, dass der Einfluss der Selbstinduction auf eine Temperaturerniedrigung des Funkens zurückzuführen ist.

In der Annahme, dass eine durch Selbstinduction bewirkte Temperaturerniedrigung bei der Funkenentladung in freier Luft ebenso bei der Entladung durch eine Geissler'sche Röhre eintritt, sind Messungen gemacht worden, welche den Einfluss einer Selbstinduction auf die Temperatur im Geissler'schen Rohre darthun sollen; zu diesem Zwecke war die Einrichtung getroffen, dass vermittelt zweier Wippen eine Spirale, eine Leydener Flasche und beide gleichzeitig in den Stromkreis eines Inductoriums eingeschaltet werden konnten.

Die Leydener Flasche war stets parallel geschaltet; d. h. ihre innere Belegung war mit der Kathode und dem einen Pol, die äussere mit der Anode und dem anderen Pol des Inductoriums verbunden. Die Selbstinduction bestand aus einem gewöhnlichen kupfernen Leitungsdraht, der zu einer Spirale von 5 cm Höhe mit einem äusseren Durchmesser von 9 cm und einem inneren von 4 cm aufgewickelt war; sie war gewöhnlich vor der Kathode eingeschaltet.

Die in den folgenden Tabellen angeführten Scalenteile bilden den Mittelwert von mehreren durch wiederholtes Ein- und Ausschalten der Leydener Flasche bez. Spirale erhaltenen Messungen, und geben die Temperatur-Erniedrigung bez. -Erhöhung an, die durch Einschalten dieser in der Geissler'schen Röhre hervorgerufen wird.

| Entfernung  |             | CO <sub>2</sub> Druck = 4 mm |                  |                             |
|-------------|-------------|------------------------------|------------------|-----------------------------|
| O - Anode   | Scalenteile | Spirale                      | Leydener Flasche | Leydener Flasche u. Spirale |
| 5 mm        | 135         | + 1                          | 129,5            | + 1,5                       |
| 30 „        | 136,5       | + 1                          | 131              | + 2                         |
| 60 „        | 134         | + 3                          | 126              | + 1,5                       |
| 80 „        | 130         | + 1                          | 124              | + 1,5                       |
| 100 „       | 125         | + 0                          | 120              | + 0,2                       |
| 130 „       | 116         | — 3,5                        | 119              | — 8,5                       |
| 150 „       | 127         | — 4,5                        | 132              | — 9,5                       |
| 163 „       | 228,5       | — 7                          | 247              | — 12,5                      |
| 165 Kathode |             |                              |                  |                             |





Da, wie sich später herausstellte, das hier benutzte Geissler'sche Rohr nicht ganz dicht war, also während des Stromdurchganges Luft zutreten konnte, ferner aus der Ansatzröhre, die mit Hg angefüllt war, Hg-Dämpfe vorhanden waren, so sind die Bedingungen, unter denen derartige Thonerdeabsetzungen vor sich gehen, auch hier gegeben.

Weitere Versuche, die mit vollständig blanken, und amalgamirten Aluminiumelektroden angestellt wurden, ergaben, wenn Luft zugelassen wurde, nur eine unregelmässige Bildung von Thonerde an der Kathodenelektrode.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institute der Universität Bonn ausgeführt; ich benutze die Gelegenheit, dem Director desselben, Hrn. Prof. Dr. H. Kayser, sowie dem Hrn. Privatdocenten Dr. A. Hagenbach auch an dieser Stelle für die mir jederzeit in lebenswürdigster Weise gewährte Unterstützung bei meiner Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 7. December 1900.)

## 9. *Magnetische Spiegelbilder;* *von Heinrich Jaeger.*

(Auszug aus der von der technischen Hochschule in München gekrönten Preisschrift.)

Wie von J. Stefan bereits 1882 theoretisch dargethan wurde<sup>1)</sup>, haben ferromagnetische Substanzen bei geeigneter Disposition die Fähigkeit, in magnetischen Feldern hinsichtlich der Energieverteilung Veränderungen hervorzurufen. Man beschränkte sich darauf, die sogenannte „Schirmfähigkeit“ gedachter Materialien festzustellen, d. h. das Vermögen ferromagnetischer Substanz, in gewissen Fällen als Schutz gegen magnetische Kräfte dienen zu können. So wichtig die experimentell verificirten und maritimen Interessen nutzbar gemachten Untersuchungen Stefan's gewesen sind<sup>2)</sup>, ihnen kann der Vorwurf einer gewissen Einseitigkeit nicht erspart bleiben. Der Gedanke, dass in *dem* Teile des auf gedachte Weise gestörten Feldes, welcher mit der „geschirmten“ Stelle correspondirt, durch die Anwesenheit des Ferromagneticums ebenfalls Veränderungen der Energieverteilung — vielleicht *conträrer* Art als die seither beobachteten — aufträten, erschien durchaus discutabel und bei dem Dunkel, welches heute noch die letzten Ursachen des Phänomens verschleiert, welches als „Magnetismus“ in die Erscheinung tritt, gewiss der eingehenden Prüfung würdig. Ich stellte mir daher die Aufgabe, unter möglichst klaren und übersichtlichen Verhältnissen Schirmwirkungen im Sinne Stefan's herzustellen und die Untersuchungen in den Grenzen zu vervollständigen, die durch die experimentelle Durchführbarkeit gegeben waren.

### 1. Versuchsanordnung und Messmethoden.

Als magnetisches Feld wählte ich zunächst das einfachste und bekannteste, das des *geradlinigen* stromdurchflossenen *Leiters*. Diese Annahme und technische Erwägungen führten

1) J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 85. 2. Abt. p. 613.

2) W. Thomson's Marinegalvanometer.





## 2. Spezielle Versuchsanordnung.

Als Strommesser im secundären Kreis benutzte ich das astatische Galvanometer von H. du Bois-Rubens, welches, mit dem leichtesten der drei vorhandenen Magnetsysteme ausgerüstet, auf 17 sec einer vollen Amplitude astasirt und in

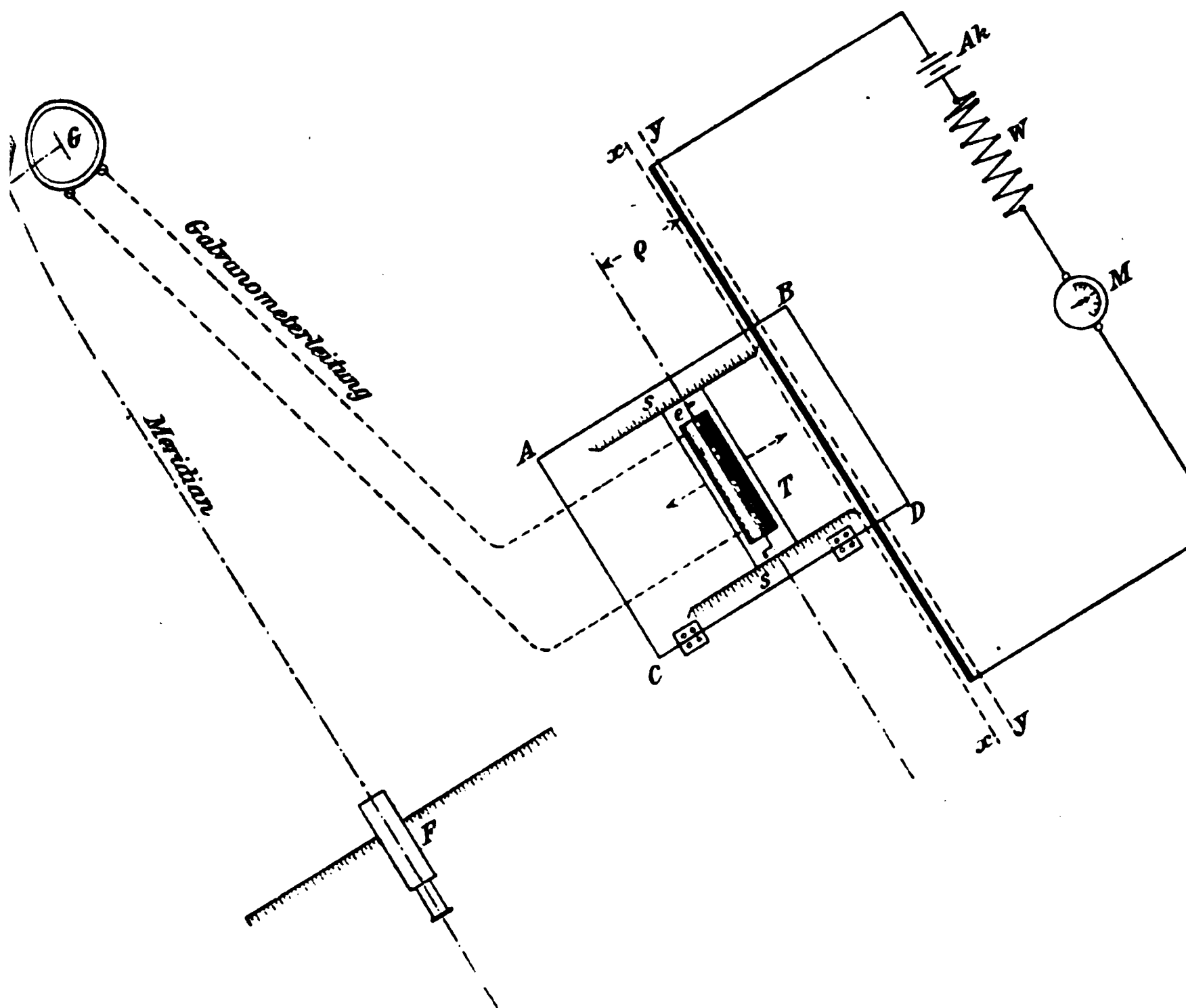


Fig. 1.

Verbindung mit der Spiegelablesung nach Gauss benutzt wurde. Die Notwendigkeit, mit der Versuchseinrichtung thunlichst dem Messapparate fernzubleiben, zwang mich, den Galvanometer-spiegel mittels des zu seiner Normalen unter  $45^\circ$  aufgestellten Hülfs spiegels *H*, vergl. Fig. 1, zu beobachten. Der Abstand dieses Bildes von der Scala am Fernrohr *F* betrug 2000 Scalenteile. Unter diesen Verhältnissen ergab sich als Galvanometer-











Tabelle II.

Stromstärke:  $i = 1,0$  Amp.

| $\varrho$<br>mm | Feld des<br>freien<br>Leiters | Abschwächung des Feldes durch |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                 |                               | Platte<br>Nr. 1               | Platte<br>Nr. 2 | Platte<br>Nr. 3 | Platte<br>Nr. 4 | Platte<br>Nr. 5 | Platte<br>Nr. 6 |
| 30              | 47,2                          | 15,0                          | 13,9            | 14,1            | 10,9            | 10,5            | 7,2             |
| 35              | 40,2                          | 13,1                          | 11,0            | 12,5            | 10,8            | 9,85            | 7,21            |
| 40              | 35,1                          | 13,2                          | 12,5            | 12,5            | 10,1            | 9,25            | 7,1             |
| 45              | 31,8                          | 13,0                          | 11,3            | 11,8            | 9,8             | 9,1             | 8,1             |
| 50              | 28,4                          | 12,0                          | 10,2            | 11,5            | 10,2            | 9,4             | 7,8             |
| 60              | 24,0                          | 11,0                          | 10,2            | 10,8            | 10,1            | 9,6             | 8,1             |
| 70              | 20,5                          | 11,2                          | 9,9             | 11,1            | 9,2             | 8,3             | 8,0             |
| 80              | 18,5                          | 10,0                          | 9,5             | 10,6            | 8,8             | 8,5             | 8,2             |
| 90              | 16,9                          | 9,9                           | 10,0            | 10,1            | 8,3             | 8,2             | 7,8             |
| 100             | 15,0                          | 9,8                           | 9,4             | 9,6             | 8,8             | 8,5             | 8,0             |
| —               | —                             | —                             | —               | sehr hart       | hart            | weich           | sehr<br>weich   |

## 5. Verhalten der Weicheisenplatte Nr. 6 speciell.

Einige Versuche liessen erkennen, dass der *procentuale* Grad der Schirmwirkung mit *abnehmender* Stromstärke im Primärkreis im allgemeinen *zunahm*. Bei 0,5 Ampère war dieselbe, wie Tab. III (p. 354) erkennen lässt, nahezu vollständig, d. h. im abgeschirmten Raume waren nur noch Spuren vom Strom herrührender magnetischer Energie vorhanden. — Die gewünschten Prämissen waren also gegeben.

## 6. Spiegelartige Feldverstärkung.

Nun brachte ich die Platte derart ins Versuchsgestell ein, dass es möglich war, mittels der Tastspule den mit der geschirmten Stelle correspondirenden Raum nach Methode I zu untersuchen. Das Resultat dieser Abtastung ist aus Tab. IV (p. 355) ersichtlich, der ich zur Erhöhung der Uebersichtlichkeit unter Columnne III\* die *verdoppelten* Werte des Feldes des freien Leiters, Columnne III, beifüge.

Ein Vergleich der Zahlwerte in Columnne III\* und VI lässt unmittelbar erkennen, dass das Feld eines auf einer genügend

Tabelle III.

Methode I. Stromstärke:  $i = 0,5$  Amp.

| I                    | II      | III                           | IV                 | V   | VI                                 |
|----------------------|---------|-------------------------------|--------------------|---|------------------------------------|
| Abstand<br>$\varrho$ | Erdfeld | Feld des<br>freien<br>Leiters | Feld der<br>Platte | Feld der<br>Platte +<br>verändert.<br>Feld des<br>Leiters | Verändertes<br>Feld des<br>Leiters |
| 22                   | +0,2    | 66,8                          | 22,1               | 28,6  | 1,5                                |
| 25                   | +0,8    | 56,8                          | 21,0               | 22,6  | 1,6                                |
| 30                   | +1,2    | 47,2                          | 21,2               | 22,0  | 0,8                                |
| 35                   | +1,2    | 38,8                          | 19,5               | 21,0  | 1,5                                |
| 40                   | +1,8    | 36,8                          | 19,5               | 20,5  | 1,0                                |
| 45 -                 | +2,2    | 33,0                          | 15,0               | 18,3  | 3,3                                |
| 50                   | +1,6    | 30,6                          | 15,5               | 17,7  | 2,2                                |
| 60                   | +1,7    | 17,6                          | 14,0               | 18,6  | 4,6                                |
| 70                   | +1,0    | 15,6                          | 13,5               | 16,5  | 3,0                                |
| 80                   | +1,8    | 15,2                          | 11,8               | 14,8  | 3,0                                |
| 90                   | +1,0    | 14,4                          | 11,5               | 13,0  | 1,5                                |
| 100                  | +0,9    | 13,0                          | 11,5               | 13,0  | 1,5                                |
| 120                  | +0,6    | 11,0                          | 10,0               | 12,7  | 2,7                                |
| 130                  | -0,8    | 10,2                          | 10,5               | 12,7  | 2,2                                |
| 140                  | -0,5    | 9,6                           | 9,1                | 12,8  | 3,7                                |
| 150                  | -0,2    | 9,3                           | 10,0               | 11,7  | 1,7                                |
| 160                  | -0,3    | 8,7                           | 8,5                | 11,6  | 3,1                                |
| 180                  | -1,0    | 8,0                           | 8,0                | 9,9   | 1,9                                |
| 200                  | -1,6    | 8,2                           | 7,3                | 8,8   | 0,6                                |

weichen und genügend dimensionirten Eisenplatte ruhenden geradlinigen stromdurchflossenen Leiters infolge der Anwesenheit des Ferromagneticums verdoppelt wird, d. h. letzteres wirkt so, als befinde sich in der Ebene seiner vorderen Begrenzungsfläche ein zweiter, den wirklich vorhandenen nach Richtung und Grösse durchaus identischer Strom. Diesen fictiven Strom kann man in Anlehnung an die bekannte optische Erscheinung als *magnetisches Bild* bezeichnen.



Tabelle IV.

Stromstärke:  $i = 0,5$  Amp.

| I               | II      | III                           | IV                          | V  | VI                                      | III*  |
|-----------------|---------|-------------------------------|-----------------------------|--|---|---|
| $\varrho$<br>mm | Erdfeld | Feld des<br>freien<br>Leiters | Feld<br>der Platte<br>Nr. 6 | Ver-<br>ändertes<br>Feld des<br>Leiters<br>+ Feld<br>der Platte, | Ver-<br>ändertes<br>Feld des<br>Leiters | Feld des<br>freien<br>Leiters<br>$\times 2$ |
| 20              | 0,21    | 67,7                          | 10,4                        | 144,8  | 184,4                                   | 135,4                                       |
| 25              | 0,8     | 57,0                          | 10,2                        | 122,5  | 112,3                                   | 114,0                                       |
| 30              | 1,2     | 48,25                         | 9,0                         | 105,1  | 96,1                                    | 96,5  |
| 35              | 1,5     | 39,5                          | 6,5                         | 85,6   | 79,1                                    | 79,0  |
| 40              | 1,7     | 36,0                          | 6,3                         | 78,8   | 72,5                                    | 72,0  |
| 45              | 2,0     | 30,5                          | 10,7                        | 73,0   | 62,3                                    | 61,0  |
| 50              | 1,8     | 26,25                         | 8,9                         | 62,1   | 53,2                                    | 52,5  |
| 60              | 1,7     | 20,5                          | 14,4                        | 57,5   | 48,1                                    | 41,0  |
| 70              | 0,9     | 17,4                          | 14,1                        | 49,1   | 35,0                                    | 34,8  |
| 80              | 1,0     | 15,6                          | 15,2                        | 45,7   | 30,5                                    | 31,12                                       |
| 90              | 1,0     | 14,35                         | 15,3                        | 43,5   | 28,2                                    | 28,7  |
| 100             | 0,8     | 12,50                         | 7,7                         | 33,7   | 26,0                                    | 25,0  |
| 110             | 0,7     | 11,0                          | 5,8                         | 28,8   | 23,0                                    | 22,0  |
| 120             | 0,2     | 10,2                          | 6,1                         | 26,9   | 20,8                                    | 20,4  |
| 130             | -0,8    | 9,8                           | 5,1                         | 25,2   | 20,1                                    | 19,6  |
| 140             | -0,4    | 9,6                           | 5,4                         | 25,2   | 19,8                                    | 19,2  |
| 150             | -0,2    | 9,4                           | 5,2                         | 24,1   | 18,9                                    | 18,8  |
| 160             | -0,6    | 8,6                           | 5,3                         | 23,8   | 18,5                                    | 17,2  |
| 170             | -0,6    | 8,0                           | 5,1                         | 22,1   | 17,0                                    | 16,0  |
| 180             | -0,9    | 7,95                          | 5,5                         | 21,7   | 16,2                                    | 15,9  |
| 190             | -0,7    | 8,0                           | 4,0                         | 19,9   | 15,9                                    | 16,0  |
| 200             | -1,2    | 7,2                           | 5,1                         | 19,7   | 14,6                                    | 14,4  |
| 210             | -0,7    | 6,1                           | 4,0                         | 17,1   | 13,1                                    | 12,2  |
| 220             | -1,0    | 5,5                           | 3,0                         | 14,1   | 11,1                                    | 11,0  |

7.

An diese Versuche schlossen sich eingehende Untersuchungen hinsichtlich der Abhängigkeit jener spiegelartigen Feldverstärkungen von der Plattenbreite, der Materialhärte und von der Intensität des Stromes im geradlinigen Leiter. Indessen stiess ich hierbei auf grosse Schwierigkeiten. Bei



bination gestattete, die erhaltenen Resultate mit denen einer idealen Spiegelfeldverstärkung zu vergleichen.

### 9. Allgemeine Versuchsanordnung und Controleinrichtung.

Zur Strommessung im secundären Kreis diente wiederum das du Bois-Rubens'sche Galvanometer, welches indessen nun mit einem Systeme von geringerer Empfindlichkeit ausgerüstet und auf 7 sec einer vollen Amplitude astasirt wurde. Da die Empfindlichkeit astatischer Galvanometer dem allmählich abnehmenden Momente der Nadeln entsprechend mit der Zeit veränderlich ist, so war eine stete Controle der Galvano-

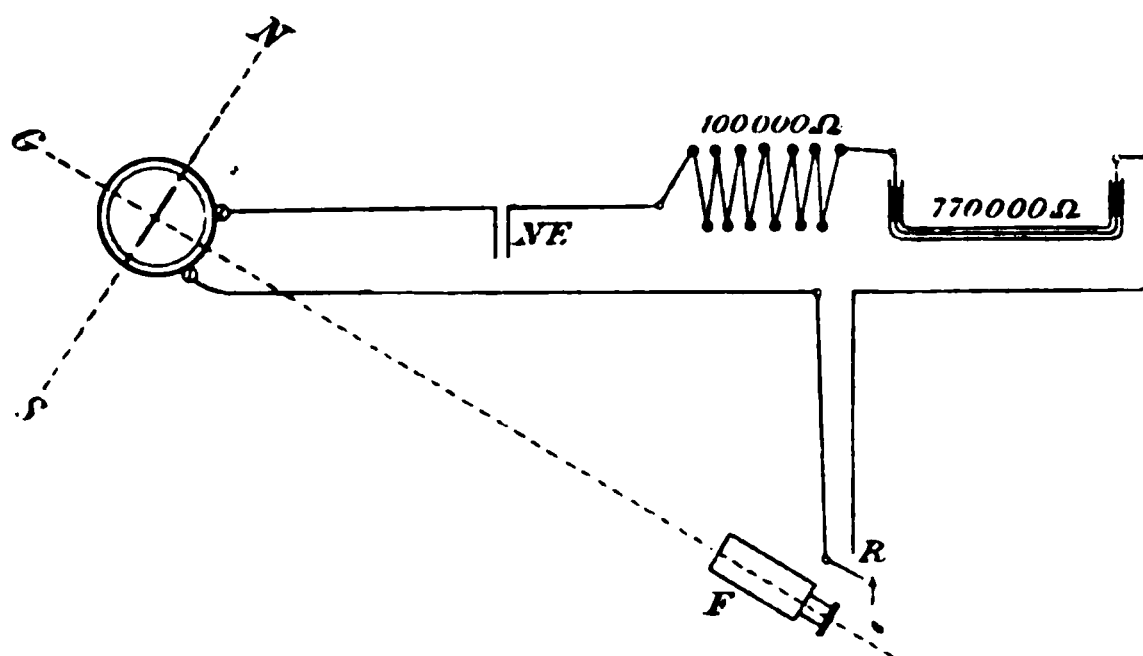


Fig. 2.

meterconstanten dringend erwünscht. Nach längeren Versuchen ergab sich die in Fig. 2 dargestellte Einrichtung, welche sich durchaus bewährte. Ihr liegt der Gedanke zu Grunde, dass eine Änderung der Galvanometerempfindlichkeit unter sonst gleichen Umständen proportional sein muss dem durch eine *constante* elektromotorische Kraft bewirkten Scalenausschlag. Zur Erzeugung dieser elektromotorischen Kraft bez. zur Controle ihrer Constanz dienten zwei Normal-Weston-(Cadmium-amalgam, -sulfat)-Elemente, die nach Fertigstellung eine Klemmenspannung von 1,019 Volt aufwiesen.

Der Temperaturcoefficient der Elemente war

$$\gamma_t = -0,0000125 (t - 18^\circ),$$

die an und für sich geringen Temperaturschwankungen im Versuchsraum konnten demgemäss vernachlässigt werden. Von







betrachtet *hinter* der Eisenplatte lag, auch nicht eine Spur vom Solenoide herrührender magnetischer Energie nachweisbar war: es fand eine absolute Schirmwirkung statt, die a priori als wesentliches Kriterium der vermuteten Correspondenzerscheinung angesehen worden war.

Tabelle V.

Stromstärke:  $i = 0,2$  Ampère.

| I         | II                             | III                             |
|-----------|--------------------------------|---------------------------------|
| $\varrho$ | Solenoid §<br>gegen Solenoid § | Solenoid §<br>gegen Eisenplatte |
| 20        | 253,2                          | 251,5                           |
| 30        | 250,9                          | 251,4                           |
| 40        | 243,1                          | 243,0                           |
| 50        | 230,72                         | 228,5                           |
| 60        | 207,8                          | 204,6                           |
| 70        | 173,15                         | 172,05                          |
| 80        | 135,4                          | 133,2                           |
| 90        | 96,0                           | 94,02                           |
| 100       | 65,4                           | 65,3                            |

## 12. Einfluss der mechanischen Härte.

Aeusserst wichtig erschien es zu entscheiden, ob die *mechanische Härte* bei dem spiegelartigen Verhalten eines Ferromagneticums von Einfluss sei; frühere Versuche in dieser Richtung waren — wie schon erwähnt — gänzlich fehlgeschlagen. Das Resultat dieser Betrachtung bringe ich in Tab. VI, der ich einige versuchstechnische Notizen beifüge. Die Tastspule wurde in einer Entfernung  $\varrho = 20$  mm im Hauptsolenoid § fixirt und das Vergleichssolenoid in gleicher Weise wie beim grundlegenden Versuche (11) der Reihe nach durch die verschiedenen Platten, vergl. Tab. I ersetzt. Die klarsten Resultate erzielte ich mit den Platten Nr. 3, 4, 5 und 6, welche — wie bereits früher erwähnt — die verschiedenen Härtephasen genau gleich dimensionirter Stäbe darstellen.

Tab. VI besagt:

*Die Fähigkeit ferromagnetischer Substanz, spiegelartige Feldverstärkungen zu bewirken, ist eine Function ihrer mechanischen Härte. Sie nimmt mit Steigerung des Härtegrades ab.*

Fig. 4.

Zur Durchführung dieses interessanten Versuches wählte ich wiederum die grosse Platte, bezeichnet Nr. 7, denn diese gestattete erfahrungsgemäss die Verwendung stärkerer Primärströme, woraus wiederum die Möglichkeit resultirte, sich mit einer geringen Galvanometerempfindlichkeit zu begnügen. Ich



versah die Solenoide mit genau entsprechenden Drehzapfen  $a_5$  und  $a_8$ , vgl. vorstehende schematische Abbildung Fig. 4, und mit grossen Messingzeigern  $Z_5$  und  $Z_8$ , fixirte dieselben alsdann derartig auf der mit präziser Graduirung versehenen Grundplatte  $G$ , dass sie mit grösster Genauigkeit in die bezüglichen Spiegelbildstellungen — die Symmetrieaxe  $XX$  als spiegelnde Fläche gedacht — gebracht werden konnten. Die drehbare Tastspule  $T$  arretirte ich wiederum im Inneren des Hauptsolenoides in der Entfernung  $\varrho = 20$  mm, stellte dann die — bei 1,0 Ampère Stromstärke im Solenoidkreis — an den bezüglichen Stellen vorhandene Feldstärke fest, indem ich allmählich den Winkel der Solenoide zur Symmetrieaxe ( $\alpha/2$ ) grösser und grösser wählte (Tab. VII). Alsdann trennte ich die Grundplatte  $G$  im Schnitte  $XX$  und ersetzte das Vergleichssolenoid durch die vorerwähnte Eisenplatte, sodass die vordere Plattenebene mit der früheren Symmetrieaxe  $XX$  zusammenfiel, während die sonstigen Versuchsbedingungen gewahrt blieben. Das Resultat der nun vorgenommenen Abtastung der verschiedenen Positionen ist unter Columne III nachstehender Tabelle eingetragen.

Das Versuchsergebnis zeigt mit grösster Klarheit den spiegelartigen Einfluss eines Ferromagneticums auf das Feld eines beliebig zu ihm gelagerten von *constantem Strom* durchflossenen Solenoides. Die Galvanometerempfindlichkeit betrug  $1,2 \cdot 10^{-7}$  Ampère pro Scalenteil. Die spiegelartigen Feldverstärkungen können also unter sonst günstigen Umständen mit Galvanometern von relativ geringer Empfindlichkeit dargethan werden.

Tabelle VII.

Stromstärke:  $i = 1,0$  Amp.

| $\frac{\alpha}{2}$ | Solenoid<br>gegen<br>Solenoid | Solenoid<br>gegen<br>Eisenplatte | $\frac{\alpha}{2}$ | Solenoid<br>gegen<br>Solenoid | Solenoid<br>gegen<br>Eisenplatte |
|--------------------|-------------------------------|----------------------------------|--------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 0°                 | 180,2                         | 179,2                            | 27°                | 145,6                         | 145,3                            |
| 3                  | 173,7                         | 172,0                            | 33                 | 144,6                         | 144,0                            |
| 6                  | 165,9                         | 165,0                            | 39                 | 141,9                         | 141,8                            |
| 9                  | 161,3                         | 160,7                            | 45                 | 138,4                         | 138,1                            |
| 12                 | 156,0                         | 156,0                            | 51                 | 137,0                         | 137,2                            |
| 15                 | 152,0                         | 153,15                           | 60                 | 136,6                         | 136,6                            |
| 21                 | 148,2                         | 149,09                           |                    |                               |                                  |



Versuchsreihe gestaltete sich folgendermaassen. Nach Abtönung der Galvanometerempfindlichkeit auf  $2,7 \cdot 10^{-8}$  Ampère pro Scalenteil bestimmte ich, wie bei den früheren Untersuchungen, das „Feld des freien Leiters“ für  $\varrho = 13 \text{ mm}$ . Nach Feststellung dieser Feldstärke (Tab. VIII, Column II) brachte ich den stromdurchflossenen Leiter und mit ihm die Tastspule in den auf 14 mm präcisirten Abstand von einer Eisenplatte und stellte durch mehrfachen Stromschluss die *nun* vorhandene Feldstärke

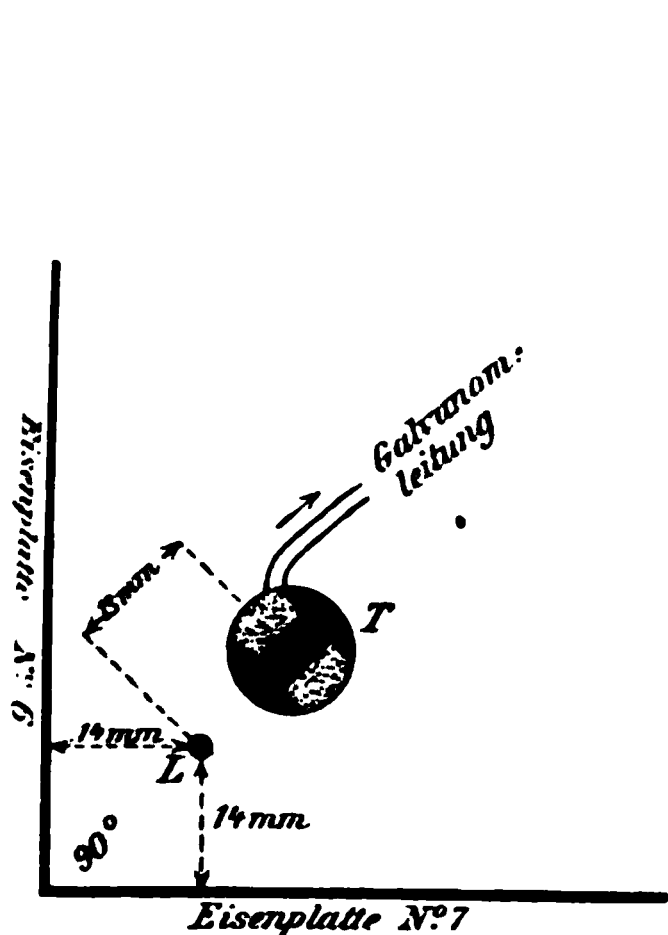


Fig. 5.

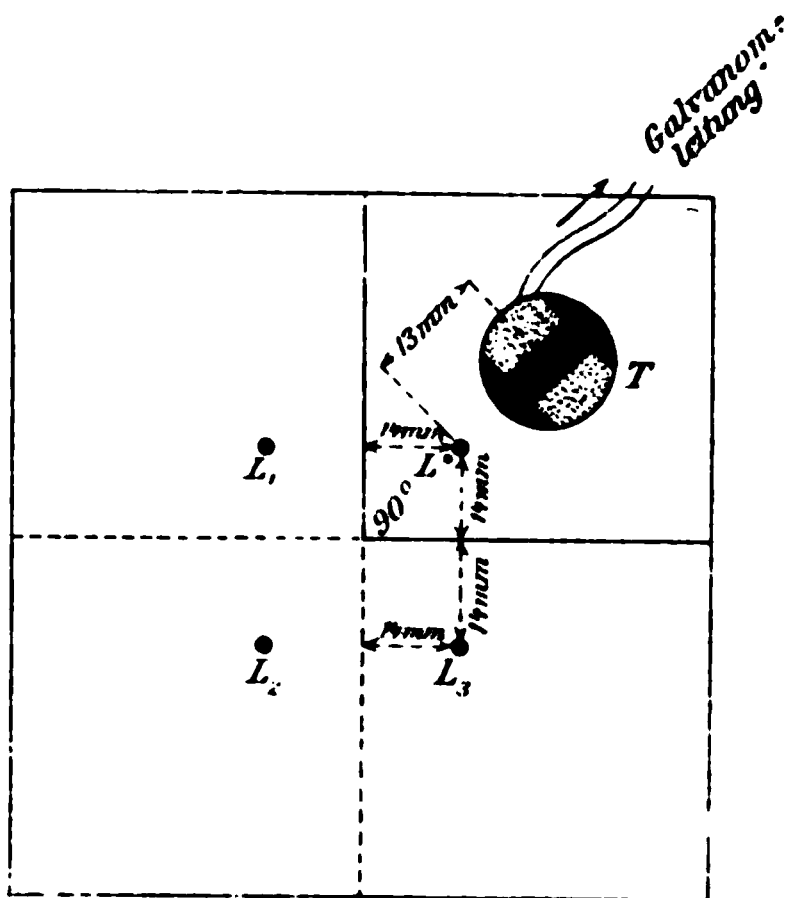


Fig. 6.

fest (Tab. VIII, Column III). Dann nahm ich unter sonst gleichen Bedingungen die Abtastung vor, wenn sich der Stromleiter in der durch Fig. 5 gekennzeichneten Stellung *im Eisenwinkel* befand (Column IV). Schliesslich maass ich die durch die *vier Parallelströme* — vergl. Fig. 6 — an der entsprechenden Stelle im Idealapparat erzeugte Feldstärke, vgl. Tab. VIII, Column V, und führte den Gesamtversuch für fünf verschiedene Stromstärken unter sorgsamer Beobachtung aller Controlmaassregeln durch. Die auf einwandfreie Weise erhaltenen Resultate der Tabelle weisen die Existenz *kaleidoskopartiger* Wirkung eines Winkels aus *ferromagnetischem* Materiale auf in demselben befindliche magnetische Energie überzeugend nach (Tab. VIII).

Tabelle VIII.

| I                           | II                         | III  | IV                                      | V   |
|-----------------------------|----------------------------|--|---|---|
| Stromstärke<br>i . . . Amp. | Feld des<br>freien Leiters | Feld des<br>freien Leiters,<br>verstärkt<br>durch Platte 1 | Feld des<br>Leiters<br>im <i>Winkel</i> | Feld des<br>Leiters im<br><i>Idealapparat</i> |
| 1,0                         | 13,5                       | 16,12  | 23,8                                    | 28,6  |
| 2,0                         | 25,5                       | 33,0   | 46,0                                    | 46,2  |
| 3,0                         | 39,0                       | 47,5   | 69,5                                    | 69,5  |
| 4,0                         | 45,2                       | 63,2   | 93,2                                    | 98,9  |
| 5,0                         | 68,0                       | 79,1   | 119,0                                   | 117,8   |

**Schluss.**

Die vorstehenden Untersuchungen liessen erkennen, dass zwischen den Erscheinungen des *Lichtes* und des *Magnetismus* grosse Analogien bestehen, deren zweifellos vorhandener causaler Zusammenhang unserer Erkenntnis noch verschlossen ist. Vielleicht gelingt es durch eingehende Prüfung der Beeinflussung magnetischer Energie durch *gekrümmte* ferromagnetische Flächen, weitere Brücken zwischen optischen und magnetischen Erscheinungen zu schlagen und einzureihen unter die als *Bewegungserscheinungen* erkannten Energieformen *Licht* und *Electricität*. die Kraft, die heute in zahllosen Anwendungen in Wissenschaft und Technik dem Wohle und Ruhme der Nationen dient.

München, December 1900.

(Eingegangen 12. December 1900.)

**10. Experimentelle Bestimmung  
von Capillaritätsconstanten condensirter Gase;  
von Leo Grunmach.**

[Aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin  
mitgeteilt vom Verfasser.<sup>1)</sup>]

Für Flüssigkeitswellen, welche unter der gemeinsamen Wirkung der Schwere und der Oberflächenspannung sich bilden, hat Lord Kelvin<sup>2)</sup>, ausgehend von hydrokinetischen Betrachtungen, eine Beziehung zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge abgeleitet, welche lautet

$$v^2 = g \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\alpha}{\sigma}.$$

Hierin bedeuten  $v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit,  $g$  die Beschleunigung infolge der Schwere,  $\lambda$  die Wellenlänge,  $\sigma$  die Dichte der Flüssigkeit und  $\alpha$  deren Oberflächenspannung. Jeder der beiden Teile, aus denen die rechte Seite der Gleichung besteht, hat eine bestimmte physikalische Bedeutung. Der erste, von der Schwere abhängige Teil entspricht Wellen von grösserer Wellenlänge, die vorwiegend von der Schwere und nur in geringem Grade von der Oberflächenspannung abhängig sind, während der zweite Teil für Capillarwellen gilt, die, von der Schwere nahezu unabhängig, in ihrem Entstehen und Fortbestehen fast nur durch die Oberflächenspannung bedingt sind. Für solche Capillarwellen lässt sich daher der erste von der Schwere herrührende Teil vernachlässigen, sodass man für sie erhält

$$v^2 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\alpha}{\sigma},$$

und wenn man  $v = n\lambda$  setzt, wo  $n$  die Schwingungszahl bedeutet,

$$\alpha = \frac{n^2 \lambda^3 \sigma}{2\pi}.$$

---

1) L. Grunmach, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Gesamtsitzung vom 26. Juli 1900.

2) W. Thomson, Phil. Mag. 42. p. 368. 1871.













## 2. Pictet'sche Flüssigkeit.

a) Als chemisch rein bezogen von der Gesellschaft für flüssige Gase (Raoul Pictet).

Spitzenentfernung = 2349,6 p = 2,0419 cm; halbe Wellenlänge ( $\lambda/2$ ) = 75,776 p  $\pm$  0,131 p; mittlere Temperatur der Flüssigkeit =  $-33^{\circ}$  C., mittlere Temperatur der Stimmgabel =  $+13^{\circ}$  C.

$$n_{13} = 253,28.$$

Hieraus ergibt sich die specifische Cohäsion der Pictet'schen Flüssigkeit

$$a_{-33}^2 = 46,628.$$

Da Dichtebestimmungen der Pictet'schen Flüssigkeit nicht bekannt gegeben sind — solche sollen zwar in umfangreicher Weise im Pictet'schen Laboratorium ausgeführt worden sein, das Beobachtungsmaterial ist aber leider bei einem Brande verloren gegangen —, so habe ich sie selbst mit einer guten Mohr'schen Waage ausgeführt und  $\sigma_{-33} = 1,504$  gefunden. Bei Annahme dieses Wertes berechnet sich die *Capillarconstante der Pictet'schen Flüssigkeit bei  $-33^{\circ}$  C.* zu

$$\alpha_{-33} = 35,065 \text{ Dynen/cm.}$$

b) Eine zweite Bestimmungsreihe wurde ausgeführt mit vor etwa 15 Jahren von Hrn. Pictet selbst dargestellter Pictet'scher Flüssigkeit, welche mir Hr. Pictet damals für andere Untersuchungen freundlichst überlassen hatte, und welche seitdem in einer zugeschmolzenen Glasröhre aufbewahrt worden war. Für diese ergab sich die specifische Cohäsion bei  $-60^{\circ}$  C.

$$a_{-60}^2 = 48,964,$$

die Dichte bei  $-60^{\circ}$  C.

$$\sigma_{-60} = 1,564$$

und demgemäss die *Capillarconstante bei  $-60^{\circ}$  C.*

$$\alpha_{-60} = 38,209 \text{ Dynen/cm.}$$

## 3. Verflüssigtes Ammoniak

(welches höchstens 0,1 Proc. Verunreinigung enthält, aber nicht durch Wasser, sondern vielleicht durch Pyridin).

Spitzenentfernung = 2271,1 p = 2,0419 cm; halbe Wellenlänge ( $\lambda/2$ ) = 101,685 p  $\pm$  0,481 p; mittlere Temperatur des ver-



abgeleitet hat, dass der Differentialquotient der molecularen Oberflächenenergie nach der Temperatur,  $\partial(\alpha v^{1/2})/\partial t$ , innerhalb weiter Grenzen von der Temperatur unabhängig ist und den constanten Wert 2,27 hat, und dass die moleculare Oberflächenenergie selbst

$$\alpha v^{1/2} = 2,27 (\theta - t)$$

ist, wo  $\theta$  die kritische und  $t$  die Beobachtungstemperatur bedeutet. Diese Gleichung, welche durch die umfangreichen Untersuchungen der Herren Ramsay und Shields<sup>1)</sup> im wesentlichen bestätigt und nur wenig modificirt worden ist, und welche eine vollkommene Analogie für die Zustandsgleichung idealer Gase bildet, gewährt die Möglichkeit, die Moleculargrösse unvermischter Flüssigkeiten zu bestimmen, wenn deren Oberflächenspannung bekannt ist. Es ergibt sich nämlich aus ihr für das Moleculargewicht  $M$  die Gleichung

$$M = \sigma \sqrt{\left( \frac{2,27 (\theta - t)}{\alpha} \right)^2}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung wird durch meine Beobachtungen an verflüssigter schwefliger Säure und an verflüssigtem Ammoniak bestätigt. Denn setzt man in dieselbe als kritische Temperaturen für schweflige Säure, bez. für Ammoniak die Werte  $157^\circ \text{C.}^2)$ , bez.  $130,5^\circ \text{C.}^3)$ , als Oberflächenspannungen bei den Beobachtungstemperaturen  $-25^\circ \text{C.}$ , bez.  $-29^\circ \text{C.}$  die oben gefundenen Werte 33,285, bez. 41,778 und endlich für die Dichten bei diesen Temperaturen die Werte 1,5016, bez. 0,6703 ein, so erhält man als Werte für das Moleculargewicht der verflüssigten schwefligen Säure

$$M_{\text{SO}_2} = 1,5016 \sqrt{\left( \frac{2,27 (157 + 25)}{33,285} \right)^2} = 65,66$$

1) W. Ramsay u. J. Shields, Zeitschr. f. physik. Chem. 12. p. 433. 1893.

2) Als Mittelwert aus den Beobachtungen der Herren Sajotschewski (Beibl. 3. p. 741. 1879), Ladenburg (Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 11. p. 818. 1878), Drion (Ann. chim. phys. (3) 56. p. 221. 1859), Clark Phil. Mag. (5) 10. p. 149. 1880), Schuck (Beibl. 6. p. 86. 1882), Cailletet und Mathias (Compt. rend. 104. p. 1563. 1887).

3) Als Mittelwert aus den Beobachtungen der Herren Dewar (Phil. Mag. (5) 18. p. 210. 1884) und Vincent u. Chappuis (Journ. de phys. (2) 5. p. 58. 1886).



Chlor auch bei höheren Temperaturen, nämlich in der Nähe von  $-60^{\circ}$  und sogar von  $-50^{\circ}$  C., Capillaritätsbestimmungen ausgeführt, aus denen hervorzugehen scheint, dass sein Moleculargewicht mit steigender Temperatur abnimmt und sich dem des gasförmigen immer mehr nähert. Indessen waren die Beobachtungen infolge der starken Chlorgasentwicklung für Augen und Atmungsorgane und auch für die Stimmgabel zu angreifend (vom verflüssigten Chlor wurden die Stimmgabelspitzen gar nicht angegriffen), als dass ich sie genügend lange hintereinander hätte fortsetzen können, um sichere Beobachtungswerte zu erlangen. Die Versuche werden bei Anwendung geeigneter Schutzvorrichtungen innerhalb weiterer Temperaturgrenzen fortgeführt und auf andere condensirbare Gase ausgedehnt werden.

(Eingegangen 18. December 1900.)





2. Das Integral der lebendigen Kraft ist gegeben durch:

$$\frac{\mu}{2} \left\{ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} = -\varepsilon V + \text{const.}$$

Wir bezeichnen mit  $ds$  das Element der von dem Teilchen  $e$  durchlaufenen Bahn, dann ist

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2.$$

Setzen wir ferner die Bahngeschwindigkeit des Teilchens

$$\frac{ds}{dt} = \sigma,$$

so lässt sich das Integral der Gleichung (1) in der Form schreiben:

$$(2) \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 + \frac{2e}{\mu} (V_0 - V),$$

wo  $\sigma_0$  der Wert der Bahngeschwindigkeit, welcher dem Potential  $V_0$  entspricht. So oft die Bahn des Teilchens dieselbe Potentialfläche schneidet, ist auch seine Geschwindigkeit wieder dieselbe.

3. Führen wir an Stelle der Potentiale  $V$  und  $P$  die Componenten der elektrostatischen und der magnetischen Kräfte ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon A - \frac{e}{v} \left\{ B \frac{dz}{dt} - C \frac{dy}{dt} \right\}, \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon B - \frac{e}{v} \left\{ C \frac{dx}{dt} - A \frac{dz}{dt} \right\}, \\ \mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon \Gamma - \frac{e}{v} \left\{ A \frac{dy}{dt} - B \frac{dx}{dt} \right\}. \end{cases}$$

4. Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , so ergibt sich durch Addition:

$$\mu \left\{ A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{d^2 y}{dt^2} + C \frac{d^2 z}{dt^2} \right\} = \varepsilon (A A + B B + C \Gamma)$$

oder

$$(4) \quad \mu \frac{d^2}{dt^2} \{A x + B y + C z\} = e (A A + B B + C \Gamma).$$

Durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems ziehen wir die Richtung der magnetischen Kraftlinien  $\S$ , und den Radiusvector  $r$  nach dem Teilchen  $e$ ; wir legen durch dieses Teilchen eine Ebene senkrecht zu der Richtung  $\S$ . Sie schneidet



6. Von dem Anfangspunkt des Coordinatensystems aus ziehen wir eine *Linie*  $N$  so, dass sie senkrecht steht auf  $\S$  und auf  $\mathfrak{F}$ , und so, dass die Reihenfolge  $N, \S, \mathfrak{F}$  gleichsinnig ist mit der Reihenfolge der Axen  $x, y, z$ . Die Richtungscosinusse von  $N$  seien  $v_1, v_2, v_3$ ; dann ist:

$$(9) \quad \begin{cases} \varrho v_1 = B\Gamma - CB, \\ \varrho v_2 = CA = A\Gamma, \\ \varrho v_3 = AB = BA, \end{cases}$$

wo:

$$(9') \quad \varrho = \S \mathfrak{F} \sin(\S, \mathfrak{F}).$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (3) der Reihe nach mit  $\varrho v_1, \varrho v_2, \varrho v_3$ , so ergibt sich durch Addition:

$$\begin{aligned} \frac{v}{e} \cdot \mu \varrho \frac{d^2}{dt^2} (v_1 x + v_2 y + v_3 z) = & - \left( B \frac{dx}{dt} - C \frac{dy}{dt} \right) (B\Gamma - CB), \\ & - \left( C \frac{dx}{dt} - A \frac{dz}{dt} \right) (CA - A\Gamma), \\ & - \left( A \frac{dy}{dt} - B \frac{dz}{dt} \right) (AB - BA). \end{aligned}$$

Wir legen durch die jeweilige Lage des Teilchens  $e$  eine Ebene senkrecht zu der Linie  $N$ ; ihr Schnittpunkt mit  $N$  sei  $n$ , der Abstand des Punktes  $n$  vom Anfangspunkt des Coordinatensystems sei  $n$ ; dann ist:

$$(10) \quad n = v_1 x + v_2 y + v_3 z$$

und wir erhalten die Gleichung:

$$(10') \quad \mu \sin(\S, \mathfrak{F}) \frac{d^2 n}{dt^2} = - \frac{e \S}{v} \frac{df}{dt} + \frac{e \S}{v} \cos(\S, \mathfrak{F}) \frac{dh}{dt}.$$

7. Setzen wir in Gleichung (10) für  $v_1, v_2, v_3$  ihre Werte aus Gleichung (9) und (9'), so ergibt sich:

$$\S \mathfrak{F} \sin(\S, \mathfrak{F}) \cdot n = \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ A & B & \Gamma \end{vmatrix}.$$

Substituieren wir diesen Wert der Determinante in Gleichung (8'), so ergibt sich:

$$(11) \quad \mu \frac{d^2 f}{dt^2} = e \mathfrak{F} + \frac{e}{v} \cdot \S \sin(\S, \mathfrak{F}) \frac{dn}{dt}.$$

$$+ \frac{v c_1^2}{v} \mathfrak{F} \cos (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) .$$

Differentiiren wir nun die Gleichung (11) nach (7), so wird:

$$\mu \frac{d^2 f}{d t^2} = \frac{v}{v} \mathfrak{F} \sin (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) \frac{d^2 n}{d t^2} ,$$

und mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung:

$$(13) \quad \frac{d^2 f}{d t^2} + \frac{v^2}{v^2 \mu^2} \mathfrak{F}^2 \frac{d f}{d t} = \frac{v^2}{v^2 \mu^2} \mathfrak{F}^2 \cos (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) \left\{ \frac{v}{\mu} \mathfrak{F} \cos (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) t + c_1 \right\}$$

die Differentialgleichung zur Bestimmung von  $f$ .

9. Die Integration von Gleichung (12) giebt:

$$(14) \quad n = - \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}} \sin (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) v t + a_1 \sin \frac{v \mathfrak{F}}{v \mu} t + b_1 \cos \frac{v \mathfrak{F}}{v \mu} t + \gamma_1 .$$

wo  $a_1$ ,  $b_1$  und  $\gamma$  Integrationsconstanten sind.

Gleichung (13) giebt:

$$(15) \quad \begin{cases} f = \frac{s \mathfrak{F} \cos^2 (\mathfrak{H}, \mathfrak{F})}{2 \mu} \left\{ t^2 - \frac{2 v^2 \mu^2}{s^2 \mathfrak{H}^2} \right\} + c_h^0 \cos (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) t \\ \quad + a_2 \sin \frac{s \mathfrak{H}}{v \mu} t + b_2 \cos \frac{s \mathfrak{H}}{v \mu} t + \gamma_2. \end{cases}$$

Damit Gleichung (11) erfüllt wird, muss

$$a_2 = b_1 \sin (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \quad \text{und} \quad b_2 = -a_1 \sin (\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$$

sein.

Setzt man nun

$$a_1 = d \sin \delta, \quad b_1 = d \cos \delta,$$

so wird

$$(16) \quad \begin{cases} n = -\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \sin (\mathfrak{F}, \mathfrak{H}) v t + d \cos \left( \frac{s \mathfrak{H}}{v \mu} t - \delta \right) + \gamma_1, \\ f = \frac{s \mathfrak{F} \cos^2 (\mathfrak{H}, \mathfrak{F})}{2 \mu} \left\{ t^2 - \frac{2 v^2 \mu^2}{s^2 \mathfrak{H}^2} \right\} + c_h^0 \cos (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) t \\ \quad + d \sin (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin \left( \frac{s \mathfrak{H}}{v \mu} t - \delta \right) + \gamma_2. \end{cases}$$

Die Richtungen  $\mathfrak{F}$  und  $N$  stehen aufeinander senkrecht; wir können also  $n$  und  $f$  als rechtwinklige Coordinaten behandeln in einem ebenen System, dessen Axen durch  $\mathfrak{F}$  und  $N$  gegeben sind. Nun ist für  $t = 0$ :

$$f_0 = -\frac{v^2 \mu}{s} \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}^2} \cos^2 (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) - d \sin (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin \delta + \gamma_2,$$

$$n_0 = d \cos \delta + \gamma_1.$$

Machen wir durch Parallelverschiebung des Systems:

$$f_0 = -d \sin (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin \delta,$$

$$n_0 = -d \cos \delta,$$

so wird:

$$\gamma_2 = \frac{v^2 \mu}{s} \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}^2} \cos^2 (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}), \quad \gamma_1 = 0,$$

und damit:

$$(16') \quad \begin{cases} f = \frac{s \mathfrak{F} \cos^2 (\mathfrak{H}, \mathfrak{F})}{2 \mu} t^2 + c_h^0 \cos (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) t \\ \quad + d \sin (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) \sin \left( \frac{s \mathfrak{H}}{v \mu} t - \delta \right), \\ n = -\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} \sin (\mathfrak{F}, \mathfrak{H}) v t + d \cos \left( \frac{s \mathfrak{H}}{v \mu} t - \delta \right). \end{cases}$$

10. Ueber den Charakter der durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmten Curve wird man sich am einfachsten

Die Curve ist eine *Parabel*. Die Coordinaten ihres *Scheitelpunktes* sind:

$$f_1^0 = -\frac{c_h^0{}^2}{2} \frac{\mu}{s \mathfrak{F}}, \quad n_1^0 = \frac{c_h^0{}^2 \mu}{s \mathfrak{F}} \operatorname{tg}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}).$$

Die *Scheiteltangente* der Parabel ist parallel der Axe *N*. Die Parabel geht durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems  $\mathfrak{F}, N$ , und zwar liegt der in Betracht kommende Zweig derselben in dem Winkel zwischen der positiven  $\mathfrak{F}$ -Axe und der negativen *N*-Axe.

Wenn der Winkel  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}$  gleich Null ist, d. h., wenn die magnetischen Kraftlinien mit den elektrostatischen zusammenfallen, so degenerirt die Parabel in die Axe  $\mathfrak{F}$  oder  $\mathfrak{F}$ . Wenn der Winkel  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}$  gleich einem rechten ist, d. h., wenn die magnetischen Kraftlinien auf den elektrostatischen senkrecht stehen, so fällt die Parabel zusammen mit der Axe *N*. Von dem Nullpunkt des Systems  $\mathfrak{F}, N$  an gerechnet bewegt sich der Punkt *P* auf der negativen *N*-Axe.

11. Aus den Gleichungen (18) folgt:

$$(20) \quad \frac{f^2}{d^2 \sin^2(\xi, \zeta)} + \frac{n^2}{d^2} = 1.$$

Haben wir für irgend eine Zeit die Lage von  $P$  auf der von ihm beschriebenen Parabel bestimmt, so liegt  $\Pi$  auf einer Ellipse, deren Centrum  $P$  ist, deren grosse Axe  $d$  parallel ist mit  $N$ , deren kleine Axe  $d \sin(\xi, \zeta)$  parallel ist mit  $\xi$ .

Man kann diese Ellipse in bekannter Weise construiren mit Hülfe zweier Kreise, die um  $P$  mit den Halbmessern  $d$  und  $d \sin(\xi, \zeta)$  beschrieben werden. Lässt man den bei der Construction benutzten Radiusvector in der Secunde  $s \xi / 2 \pi v \mu$  Umläufe machen, so erhält man ein vollständiges Bild von der elliptischen Bewegung des Punktes  $\Pi$ . Bezeichnen wir die Umlaufszeit mit  $T$ , so ist:

$$T = \frac{2 \pi v \mu}{s \xi}.$$

Um die wirkliche Bewegung von  $\Pi$  in der Ebene  $\xi N$  zu finden, muss man den Mittelpunkt  $P$  der Ellipse in einer der Umlaufsbewegung entsprechenden Weise auf seiner Parabel weiterrücken lassen. Die Curve, welche auf diese Weise entsteht, hat einen cykloidenartigen Charakter.

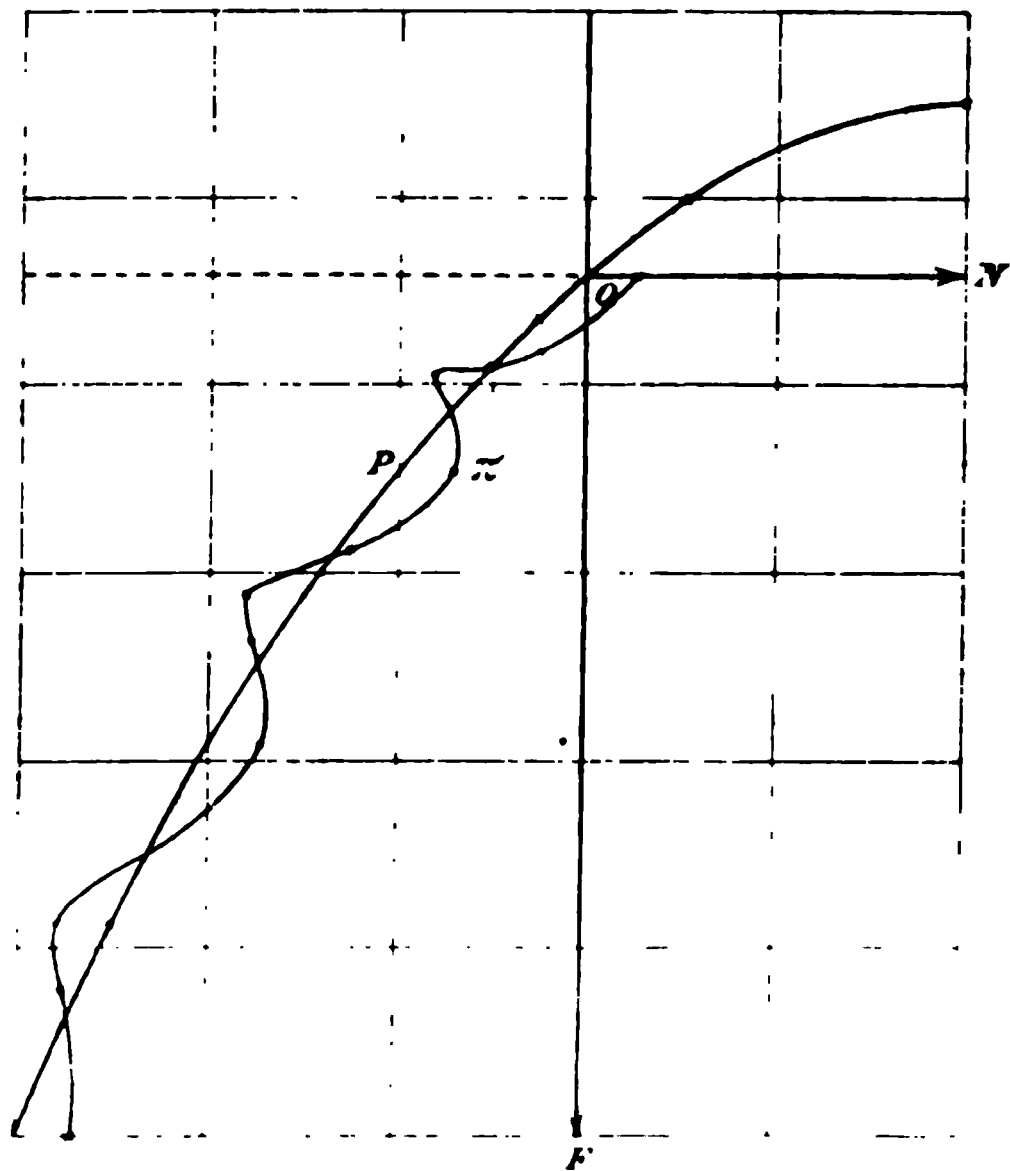
So oft der Punkt  $\Pi$  in seiner Ellipse einen Umlauf vollzieht, verschiebt sich der Punkt  $n$ , die Projection von  $\Pi$  auf die Axe  $N$  um die Strecke

$$- \frac{2 \pi v^2 \mu}{s \xi} \cdot \frac{\xi}{\xi} \sin(\xi, \zeta).$$

Auf Grund dieser Bemerkung kann man von der durch den Punkt  $\Pi$  beschriebenen Curve das folgende Bild (vgl. Figur, p. 386) entwerfen.

Um die räumliche Bewegung des elektrischen Teilchens  $s$  zu erhalten, muss man gleichzeitig mit dem Punkte  $\Pi$  der Ebene  $\xi N$  den früher eingeführten Punkt  $h$  in der Axe  $\xi$  sich bewegen lassen. Mit  $\Pi$  verbindet man ein auf der Ebene  $\xi N$  senkrecht stehendes Lot, mit  $h$  eine zu der Axe  $\xi$  senkrechte Ebene; die jeweilige Lage des Teilchens  $s$  wird dann durch den Schnitt der Ebene mit dem Lote bestimmt. Die so erzeugte Curve hat einen schraubenartigen Verlauf.

12. *Specielle Fälle.* Wenn der Winkel  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{S}$  ein rechter ist, so geht die Parabel über in die Axe  $N$ . Zugleich werden die Axen der von dem Punkt  $\Pi$  beschriebenen Ellipse einander gleich, die Ellipse verwandelt sich in einen Kreis. Der Punkt  $\Pi$  beschreibt in diesem Falle eine gewöhnliche Cykloide, deren Axe durch den negativen Ast der Axe  $N$  gegeben ist. Die Beschleunigung in der Richtung der Axe  $\mathfrak{S}$  ist Null. Wenn also auch die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens  $c_0$  Null



ist, so beschränkt sich die ganze Bewegung auf die Ebene  $\mathfrak{S} N$ : man kommt dann zu dem folgenden eigentümlichen Resultat. Wenn die elektrischen und die magnetischen Kraftlinien zu einander senkrecht stehen, und das Teilchen  $\epsilon$  keine Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der Axe  $\mathfrak{S}$  besitzt, so bewegt es sich in einer *Cykloide*, deren *Axe senkrecht steht zu den magnetischen und zu den elektrischen Kraftlinien*, also im wesentlichen in einer zu den beiden Kräften *transversalen* Richtung.

Wenn die Richtungen der magnetischen und der elektrostatischen Kraftlinien zusammenfallen, so ist es zweckmässiger, auf die ursprünglichen Gleichungen zurückzugehen. Wenn



man die Richtung der Kraftlinien mit der Richtung der  $x$ -Axe zusammenfallen lässt, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon \mathfrak{F}, \quad \mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{F} \frac{dx}{dt}, \quad \mu \frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{\varepsilon}{v} \mathfrak{F} \frac{dy}{dt}.$$

Die Bewegung setzt sich zusammen aus einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in der Richtung der  $x$ -Axe und aus einer Kreisbewegung in der Ebene  $yz$  mit der Umlaufszeit  $2\pi v \mu / \varepsilon \mathfrak{F}$ . Die Bahn ist eine Schraube mit wachsender Höhe der Gänge.

13. Die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung dürften Anwendung finden auf die Erscheinungen in der Nähe der Kathode, auf die Veränderung, insbesondere die Neubildung der Schichten unter magnetischer Wirkung, sowie auf die Erscheinung des Nordlichtes.

(Eingegangen 23. December 1900.)

**12. Ueber Schichtung  
in einem Strome elektrischer Teilchen;  
von Eduard Riecke.**

(Im Auszuge mitgeteilt in der Physikalischen Zeitschrift.)

Als eine besonders merkwürdige und rätselvolle Erscheinung hat man von jeher die Schichtenbildung in Geissler'schen Röhren betrachtet. Sie zeigt, dass die Verschiebungsgeschwindigkeiten der Ionen der Länge der Röhre nach in periodischer Weise wechseln, hier ansteigen, dort sinken können. Mit einer Wellenbewegung im gewöhnlichen Sinne hat die Erscheinung nichts zu thun, denn die Elemente der Strömung zeigen an einer und derselben Stelle der Röhre keinen periodischen Wechsel. Viel wahrscheinlicher ist es, dass die Schichtenbildung eine Begleiterscheinung der Strömung ist; ihr Analogon sind nicht die Kundt'schen Staubfiguren, sondern die Anschwellungen und Einschnürungen eines unter hohem Druck austretenden Gasstrahles, und der periodische Wechsel der Dichtigkeit, welcher damit verbunden ist. Es ist nicht unmöglich, dass zwischen dieser Ausströmungserscheinung und der Schichtung eines elektrischen Funkens ein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Für die Strömung elektrischer Teilchen in einem homogenen elektrischen Felde bot sich zunächst eine andere Möglichkeit der Schichtung, welche im Folgenden entwickelt ist.<sup>1)</sup>

1. Es sei ein homogenes elektrisches Feld von der Intensität  $\mathfrak{E}$  gegeben; in diesem bewegen sich in der Richtung der Kraftlinien gleichartige elektrische Teilchen so, dass in einer zu den Kraftlinien senkrechten Ebene die Geschwindigkeit aller Teilchen die gleiche ist. Die elektrischen Teilchen be-

1) Erst nach dem Abschluss der vorliegenden Arbeit wurde ich mit einer auf denselben Gegenstand gerichteten Arbeit des Hrn. G. W. Walker im Phil. Mag. vom Juni 1900 bekannt. Hr. Walker geht aus von den Gleichungen der kinetischen Gastheorie und findet eine Differentialgleichung für das elektrostatische Potential, deren Lösung ein periodisches Glied enthält.

wegen sich unter den Wirkungen der äusseren Kraft  $\mathfrak{F}$  und der zwischen den Teilchen selbst vorhandenen inneren elektrodynamischen Kräfte. Ausserdem aber sei das elektrische Feld von einem neutralen Mittel erfüllt, dessen Einfluss auf die Bewegung sich in einer der Geschwindigkeit der Teilchen proportionalen Reibungskraft geltend macht.

Da die Bewegung aller in parallelen Linien sich bewegenden Teilchen dieselbe ist, so beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung eines einzigen. Die positive Richtung der Kraftlinien, in welcher sich dieses Teilchen bewegt, machen wir zur  $x$ -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Es sei nun an irgend einer Stelle der  $x$ -Axe die Geschwindigkeit des Teilchens gleich Null. Vermöge der Beschleunigung, welche dem Teilchen von der Kraft  $\mathfrak{F}$  erteilt wird, bewegt es sich in der Richtung der  $x$ -Axe mit wachsender Geschwindigkeit. Der Bewegung wirkt aber die der Geschwindigkeit proportionale Reibung entgegen. Man wird also annehmen dürfen, dass von einem bestimmten Punkt der  $x$ -Axe mit der Abscisse  $x_0$  die Geschwindigkeit keine sehr grosse Veränderung mehr erleidet. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf dieses Gebiet einer wenig veränderlichen Geschwindigkeit.

2. *Die elektrodynamischen Wechselwirkungen.* Bei der Berechnung der elektrodynamischen Wechselwirkungen werden wir das *Gesetz von Clausius* zu Grunde legen, welches von J. J. Thomson auch aus der Maxwell'schen Theorie abgeleitet worden ist.

Die Kraft, welche ein im Punkte  $x, y, z$  befindliches Teilchen von der Ladung  $\varepsilon$  von einem zweiten Teilchen  $\varepsilon_1$  an der Stelle  $x_1, y_1, z_1$  erleidet, habe in der Richtung der  $x$ -Axe die Componente  $\Xi$ . Die Geschwindigkeitscomponenten der Teilchen seien  $u, v, w$  und  $u_1, v_1, w_1$ . Nach dem Gesetze von Clausius ist dann:

$$\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_1} \Xi = - \frac{d\psi}{dx} + k \frac{d\psi}{dx} \{u u_1 + v v_1 + w w_1\} - k \frac{d}{dt} \{\psi u_1\}.$$

$\psi$  ist bei Clausius gleich der reciproken Entfernung der beiden Teilchen; wir setzen voraus, dass  $\psi$  nur in grösserer Entfernung übergeht in  $1/r$ , dass aber in kleiner Entfernung die Werte von  $\psi$  selbst und von seinen Differentialquotienten



Somit:

$$\frac{\Xi'}{\epsilon} = + (1 - k u^2) \chi (x - x_1) \left\{ \eta + \frac{d\eta}{dx} (x_1 - x) \right\} dw_1.$$

Für die Gesamtwirkung aller in unserer Kugel befindlichen Teilchen ergibt sich mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse:

$$\sum \frac{\Xi'}{\epsilon} = - (1 - k u^2) \frac{d\eta}{dx} \sum \chi (x - x_1)^2 dw_1.$$

Solange  $ku^2$  kleiner als 1, ist die Kraft negativ, wenn  $d\eta/dx$  einen positiven Wert hat.

Wir setzen nun zweitens die Dichte  $\eta_1$  constant gleich  $\eta$  und betrachten die Geschwindigkeit  $u_1$  als veränderlich. Dann erhalten wir:

$$\frac{\Xi''}{\epsilon} = \eta \chi (x - x_1) dw_1 - k \eta \chi (x - x_1) u_1^2 dw_1 - k \eta \psi \frac{du_1}{dt} dw_1.$$

Nun ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$u_1^2 = u^2 + \frac{du^2}{dx} (x_1 - x),$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dt} \right) (x_1 - x) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{du}{dt} \right) (x_1 - x)^2.$$

Setzen wir diese Werte ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\Xi''}{\epsilon} &= \eta \chi (x - x_1) dw_1 - \eta k u^2 \chi (x - x_1) dw_1 \\ &\quad + \eta k \frac{du^2}{dx} \chi (x - x_1)^2 dw_1 \\ &\quad - \eta k \frac{du}{dt} \psi dw_1 - \eta k \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dt} \right) \psi (x_1 - x) dw_1 \\ &\quad - \eta k \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{du}{dt} \right) \cdot \frac{\psi}{2} (x - x_1)^2 dw_1. \end{aligned}$$

Für die von allen Teilchen der Kugel auf  $\epsilon$  ausgeübte Wirkung erhält man mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\Xi''}{\epsilon} &= k \eta \frac{du^2}{dx} \sum \chi (x - x_1)^2 dw_1 - k \eta \frac{du}{dt} \sum \psi dw_1 \\ &\quad - k \eta \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{du}{dt} \right) \cdot \frac{1}{2} \sum \psi (x - x_1)^2 dw_1. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$u dt = dx,$$

somit:

$$\frac{du}{dt} = u \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \frac{du^2}{dx}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung findet man:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\ddot{x}}{s} &= k \eta \frac{du^2}{dx} \cdot \sum \left\{ \chi (x - x_1)^2 - \frac{1}{2} \psi \right\} d\omega_1 \\ &\quad - k \eta \frac{d^2 u^2}{dx^2} \cdot \frac{1}{2} \sum \psi (x - x_1)^2 d\omega_1. \end{aligned}$$

Wir führen nun für die im vorhergehenden gefundenen Summen die Bezeichnungen ein:

$$(2) \quad \begin{cases} P = \sum \chi (x - x_1)^2 d\omega_1, & Q = \sum \left\{ \chi (x - x_1)^2 - \frac{1}{2} \psi \right\} d\omega_1, \\ R = \frac{1}{2} \sum \psi (x - x_1)^2 d\omega_1. \end{cases}$$

Dann wird die ganze elektrische Kraft, welche das Teilchen  $\varepsilon$  von den Nachbarteilchen erleidet, gegeben durch:

$$(2') \quad \begin{cases} X = -P\varepsilon(1 - k u^2) \frac{d\eta}{dx} + Q k \varepsilon \eta \frac{du^2}{dx} \\ \quad - R k \varepsilon \eta \frac{d^2 u^2}{dx^2}. \end{cases}$$

3. Im stationären Zustande muss die Zahl der Teilchen, welche in 1 sec durch eine zu den Strömungslinien senkrechte Fläche von 1 qcm hindurchgehen, allenthalben dieselbe sein. Dasselbe gilt dann auch von der Menge der in einer Secunde durch jene Fläche gehenden Elektrizität, von der elektrischen Strömung  $i$ . Auf der anderen Seite ist die Menge der Elektrizität, welche in einer Secunde durch die Flächeneinheit hindurchgeht, gleich  $\eta u$ ; wir haben also die Beziehung:

$$(3) \quad \eta u = i,$$

wo  $i$  die constante Stärke der elektrischen Strömung ist.

4. Die Differentialgleichung für die Bewegung des Teilchens  $\varepsilon$  werden wir jetzt in der folgenden Form aufstellen:

$$(4) \quad \begin{cases} \mu \frac{du}{dt} = \varepsilon \mathfrak{F} - P \varepsilon (1 - k u^2) \frac{d\eta}{dx} + Q k \varepsilon \eta \frac{du^2}{dx} \\ \quad - R k \varepsilon \eta \frac{d^2 u^2}{dx^2} - \varrho u. \end{cases}$$

Der letzte Term der rechten Seite entspricht der Reibung des elektrischen Teilchens an den in dem Felde vorhandenen neutralen Molecülen. Setzen wir in dieser Gleichung:

$$\eta = \frac{i}{u} \quad \text{und} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d u^2}{dx},$$

so ergibt sich:

$$R k \varepsilon i \frac{1}{u} \frac{d^2 u^2}{dx^2} + \left( \frac{\mu}{2} - \frac{Q k \varepsilon i}{u} \right) \frac{d u^2}{dx} - P \varepsilon i \frac{1}{u^2} - \frac{k u^2}{u^2} \frac{du}{dx} + \varrho u = \varepsilon \mathfrak{F}.$$

Wir machen nun den Ansatz:

$$u = u_0 + u,$$

wo  $u$  gegen  $u_0$  sehr klein sein soll. Vernachlässigen wir die Quadrate von  $u/u_0$  gegen 1, so ergibt sich die Gleichung:

$$2 R k \varepsilon i \left( 1 - \frac{u}{u_0} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ \mu u_0 - 2 Q k \varepsilon i \left( 1 - \frac{u}{u_0} \right) - P \varepsilon i \frac{1 - k u_0^2}{u_0^2} - 2 u/u_0 \right\} \frac{du}{dx} + \varrho \left( u + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho} \right) = 0.$$

Vernachlässigen wir hier auch noch  $u/u_0$  gegen 1, so erhalten wir:

$$(5) \quad \begin{cases} 2 R k \varepsilon i \frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ \mu u_0 - (2 Q - P) k \varepsilon i - \frac{P \varepsilon i}{u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} \\ + \varrho \left( u + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho} \right) = 0, \end{cases}$$

oder:

$$(5') \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + \left\{ \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} \\ + \frac{\varrho}{2 R k \varepsilon i} \left( u + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho} \right) = 0. \end{cases}$$

Wir führen die weiteren Abkürzungen ein:

$$p = \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2},$$

$$q = \frac{\varrho}{2 R k \varepsilon i},$$

dann wird die Gleichung (5'):

$$(6) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + p \frac{du}{dx} + q \left( u + u_0 - \frac{\varepsilon \mathfrak{F}}{\varrho} \right) = 0.$$

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma_2 = -\frac{M+N}{2} + i \frac{\sqrt{8}}{2} (M-N), \\ \gamma_3 = -\frac{M+N}{2} - i \frac{\sqrt{8}}{2} (M-N). \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass  $(q/2)^2 + (p/8)^2$  einen positiven Wert besitzt; dann sind  $M$  und  $N$  reell;  $N$  ist sicher negativ, der absolute Wert von  $M$  ist jedenfalls kleiner als der absolute Wert von  $N$ , somit ist  $M+N$  negativ,  $M-N$  dagegen positiv. Wir setzen:

$$(10) \quad M+N = -\alpha, \quad \frac{\sqrt{8}}{2} (M-N) = \beta \pi.$$

Dann sind die drei Wurzeln:

$$(11) \quad \gamma_1 = -\alpha, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha}{2} + i\beta\pi, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha}{2} - i\beta\pi.$$

Das Integral der Gleichung (6) wird:

$$u + u_0 = \frac{s\tilde{\gamma}}{q} + C_1 e^{-\alpha x} + (C_2 e^{i\beta\pi x} + C_3 e^{-i\beta\pi x}) e^{\frac{\alpha}{2}x}.$$

Bezeichnen wir die ganze Geschwindigkeit des Teilchens  $s$  wie früher durch  $u$ , so kann das gefundene Integral auf die Form gebracht werden:

$$(12) \quad \begin{cases} u = \frac{s\tilde{\gamma}}{q} \{1 - e^{-\alpha(x-x_0)}\} + u_0 e^{-\alpha(x-x_0)} \\ \quad + \alpha e^{\frac{\alpha}{2}(x-x_0)} \sin \pi \beta (x-x_0). \end{cases}$$



Es ist dann für  $x = x_0$ :  $u = u_0$ ; das periodische Glied verschwindet für:

$$x = x_0, \quad x = x_0 + \frac{1}{\beta}, \quad x = x_0 + \frac{2}{\beta}, \dots,$$

Es ist also  $1/\beta$  die halbe Wellenlänge des periodischen Gliedes.

Für grosse Werte von  $x - x_0$  ist in den Punkten, für welche das periodische Glied verschwindet:

$$u = \frac{e \mathfrak{F}}{\rho}.$$

Unserer Voraussetzung nach darf  $u_0$  nicht sehr verschieden sein von  $e \mathfrak{F}/\rho$ .

Setzen wir

$$x - x_0 = \frac{n}{2\beta},$$

wo  $n$  eine beliebige ganze Zahl sein soll, so wird:

$$u = \frac{e \mathfrak{F}}{\rho} \left\{ 1 - e^{-\frac{\alpha n}{2\beta}} \right\} + u_0 e^{-\frac{\alpha n}{2\beta}} \pm a e^{\frac{\alpha n}{4\beta}}.$$

Die Gleichung (12) gilt nur innerhalb eines Gebietes, in welchem auch diese Geschwindigkeit nur wenig abweicht von  $u_0$ , in dem also  $a e^{\alpha n/4\beta}$  klein bleibt gegen  $u_0$ .

An Stelle von  $x$  führen wir endlich noch eine andere Veränderliche  $\xi$  ein, durch die Gleichung:

$$(13) \quad \xi = \beta(x - x_0),$$

d. h. wir benutzen die halbe Wellenlänge des periodischen Gliedes als neue Längeneinheit. Dann wird die Gleichung für die Geschwindigkeit, wenn wir gleichzeitig mit  $u_0$  dividiren:

$$(13') \quad \frac{u}{u_0} = \frac{e \mathfrak{F}}{\rho u_0} \left\{ 1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta} \xi} \right\} + e^{-\frac{\alpha}{\beta} \xi} + \frac{u}{u_0} e^{\frac{\alpha}{2\beta} \xi} \sin \pi \xi.$$

Die Geschwindigkeiten sind in dieser Formel ausgedrückt als Vielfache der Anfangsgeschwindigkeit  $u_0$ , von welcher sie der Voraussetzung nach immer nur wenig abweichen.

5. Wir benutzen die Werte von  $\xi$  als Abscissen und repräsentiren die Werte von  $u/u_0$  durch eine Curve, indem wir sie

als Ordinaten senkrecht zu den auftragen. Die Curve  $u/u_0$  stellt die Superposition zweier Curven dar. Die Curve, welche zwischen dem A und nur wenig verschiedenen Endwert  $\pm \mathfrak{E}/\rho u_0$  verläuft, ist eine Sinuslinie mit stetig wachsender Amplitude; die halbe Wellenlänge dieser Sinuslinie ist gleich

Die elektrische Dichte ist nach Gleichung (13) durch:

$$\eta = \frac{i}{u} = \frac{i}{u_0} \cdot \frac{u_0}{u} = \eta_0 \frac{u_0}{u},$$

wenn wir mit  $\eta_0$  die anfängliche Dichte bezeichnen.

Zeichnet man also eine Curve, welche die reciproken Werte von  $u/u_0$  darstellt, so giebt diese Curve zugleich ein Bild von der Verteilung der elektrischen Dichte in dem durchströmten Felde. Die Curve der elektrischen Dichte entsteht hiernach gleichfalls aus der Superposition einer Exponentialcurve und einer Wellenlinie; die halbe Wellenlänge der letzteren ist wieder gegeben durch  $1/\beta$ .

Nun war  $\beta$  gegeben durch:

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} (M - N).$$

Es war ferner:

$$M^2 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}, \quad N^2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2},$$

$$q = \frac{\rho}{2 R k \varepsilon i}, \quad p = \frac{\mu u_0}{2 R k \varepsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2}.$$

Hiernach wächst  $\beta$ , wenn  $\mu$  und  $\rho$  zunehmen; es nimmt ab, wenn der Quotient  $i/u_0$ , d. h. die anfängliche elektrische Dichte  $\eta_0$  zunimmt. Umgekehrt nimmt die Wellenlänge des periodischen Gliedes ab, wenn  $\mu$  und  $\rho$  wachsen; sie nimmt zu, wenn die anfängliche Dichte  $\eta_0$  wächst.

6. *Strömung im reibungslosen Felde.* Haben wir keine Reibung in dem elektrischen Felde, so wird die allgemeine Gleichung der Bewegung:

$$(14) \quad R k \varepsilon i \frac{1}{u} \frac{d^2 u^2}{dx^2} + \left( \frac{\mu}{2} - \frac{Q k \varepsilon i}{u} \right) \frac{du^2}{dx} - P \varepsilon i \frac{1 - k u^2}{u^3} \frac{du}{dx} = \pm \mathfrak{E}.$$

Wenn die Geschwindigkeit  $u$  auch in diesem Falle nur wenig von einem anfänglichen Wert  $u_0$  abweicht, so gilt die speciellere Gleichung:

$$(14') \quad \frac{d^3 u}{dx^3} + \left\{ \frac{\mu u_0}{2 R k \epsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2} \right\} \frac{du}{dx} = \frac{\epsilon \mathfrak{F}}{2 R k \epsilon i}.$$

Setzen wir wie früher:

$$p = \frac{\mu u_0}{2 R k \epsilon i} - \frac{2 Q - P}{2 R} - \frac{P}{2 R k u_0^2}$$

und

$$r = \frac{\epsilon \mathfrak{F}}{2 R k \epsilon i},$$

so wird die Gleichung:

$$(14'') \quad \frac{d^3 u}{dx^3} + p \frac{du}{dx} = r.$$

Machen wir den Ansatz:

$$u = \frac{r}{p} x + a e^{\kappa x} + \text{const.},$$

so ergibt sich zur Bestimmung von  $\kappa$ :

$$(15) \quad \kappa^2 + p = 0.$$

Ist  $p$  positiv, was bei grossen Werten von  $u_0$  im allgemeinen zutreffen wird, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung imaginär. Erinnern wir uns, dass die ganze Geschwindigkeit des betrachteten Teilchens gegeben ist durch  $u = u_0 + u$ , so kann die Lösung auf die Form gebracht werden:

$$(16) \quad u = u_0 + \frac{r}{p} (x - x_0) + a \sin \sqrt{p} (x - x_0),$$

oder, wenn wir  $\sqrt{p} (x - x_0) = \pi \xi$  setzen:

$$(16') \quad u = u_0 + \frac{r \pi}{p \sqrt{p}} \cdot \xi + a \sin \pi \xi.$$

Die Geschwindigkeit  $u$  setzt sich aus drei Termen zusammen; der erste ist gleich der constanten Anfangsgeschwindigkeit; dazu kommt ein mit der Veränderlichen  $\xi$  wachsender

Term und endlich  
länge gegeben ist

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

Die Wellenlänge nimmt ab, wenn die Masse  $p$  zunimmt.

Bei kleinen Anfangsgeschwindigkeiten  $u_0$  wird  $p$  negativ;  
 $p = -p'$ . Die Differentialgleichung ist dann:

$$(17) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - p' \frac{du}{dx} = r$$

und ihre Lösung:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= u_0 + u - u_0 - \frac{r(x-x_0)}{p'} \\ &\quad + \alpha \left\{ e^{\sqrt{p'}(x-x_0)} - e^{-\sqrt{p'}(x-x_0)} \right\} \end{aligned} \right.$$

Der Verlauf der Geschwindigkeit ist in diesem Falle ein aperiodischer.

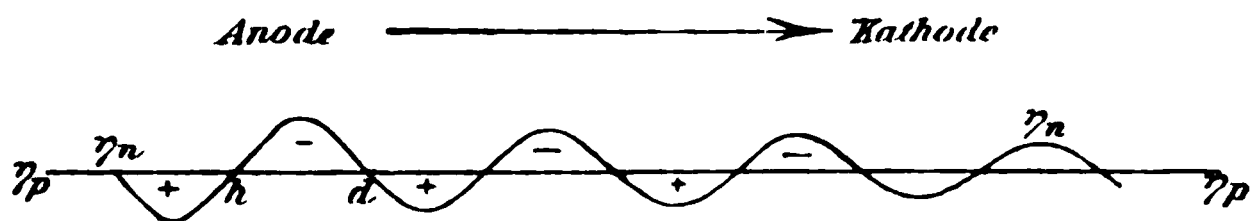
Hierin scheint ein charakteristischer Unterschied der Bewegungen mit Reibung und ohne Reibung zu liegen. Im letzteren Falle verschwinden die periodischen Anwandlungen der Bewegung, sobald  $p$  negativ wird. Wenn Reibung vorhanden ist, so ist das nicht der Fall, die Periodicität erhält sich, solange nur  $(p/2)^2 + (p/3)^2$  positiv bleibt. Erst wenn diese Grösse negativ wird, fallen die periodischen Anwandlungen weg.

Uebrigens muss hervorgehoben werden, dass die Gleichungen (16) und (18) immer nur innerhalb sehr beschränkter Gebiete anwendbar sind; denn das mit  $x - x_0$  proportionale Glied bedingt eine stetige Vergrößerung der Differenz, welche zwischen der jeweils vorhandenen Geschwindigkeit und der Anfangsgeschwindigkeit  $u_0$  besteht. Diese Differenz sollte aber nach unserer Voraussetzung nur klein sein.

7. *Elektrische Doppelströmung in Geissler'schen Röhren.*  
In einer Geissler'schen Röhre kann man das elektrische Feld zwischen der Anode und dem dunkeln Zwischenraume als ein im wesentlichen constantes betrachten. In diesem Felde findet eine doppelte Strömung von Elektrizität statt; negative elektrische Teilchen bewegen sich von der Kathode zur Anode, positive von der Anode zur Kathode. Auf Grund der Untersuchungen über Canalstrahlen identificiren wir die positiven Teilchen mit gewöhnlichen Ionen; von den negativen

nehmen wir an, dass sie *identisch* seien mit den Teilchen der Kathodenstrahlen, den Elektronen. Unter dieser Voraussetzung ist die Masse  $\mu$  der positiven Teilchen um vieles grösser als die der negativen; es liegt ausserdem die Annahme nahe, dass die Reibung bei den positiven Teilchen grösser sei, als bei den negativen. Wir betrachten zunächst die Bewegungen der beiden Arten von Ionen als voneinander unabhängig. In dem Ausdruck für die Geschwindigkeit der Teilchen ist dann die Wellenlänge des periodischen Gliedes viel kleiner bei den positiven, als bei den negativen Teilchen. Nehmen wir an, dass innerhalb des betrachteten Gebietes der nicht periodische Teil der Geschwindigkeit weder bei den positiven, noch bei den negativen Teilchen eine merkliche Aenderung erleide, so wird die Geschwindigkeitscurve der negativen Teilchen durch eine Wellenlinie dargestellt sein, deren Niveaulinie der  $x$ -Axe parallel ist. Die Geschwindigkeitscurve der positiven Teilchen dagegen ist eine der  $x$ -Axe parallele gerade Linie. Dasselbe gilt dann auch von den die Dichtigkeiten der negativen und der positiven Teilchen repräsentirenden Linien  $\eta_n$  und  $\eta_p$ .

Wir führen endlich noch die Annahme ein, dass die freie Elektrizität in dem betrachteten Abschnitt der Röhre im Ganzen gleich Null sei. Die gerade Linie, welche die Dichte  $\eta_p$  repräsentirt, fällt dann mit der Niveaulinie der Curve  $\eta_n$  zusammen. Daraus ergibt sich dann ein wellenförmiger Verlauf der freien Ladung, wie er in der nachstehenden Figur gezeichnet ist.



8. Wir haben im Vorhergehenden die Strömungen der positiven und der negativen Teilchen als voneinander unabhängig betrachtet. Es fragt sich, inwieweit dies gestattet ist. Wenn die Geschwindigkeit der positiven Teilchen constant ist, so verschwindet ihre elektrodynamische Wirkung auf die negativen; die Bewegung der letzteren kann also ebenso berechnet werden, wie früher.

Umgekehrt kann natürlich die elektrodynamische Wirkung









Beide Strömungsarten können gleichzeitig in demselben Körper vorhanden sein; das Eintreten der selbstständigen Strömung offenbart sich in einem starken Ansteigen der Stromstärke.

In Gasen ist eine unselbstständige Strömung möglich, wenn Ionisation durch nicht elektrische Wirkungen, nämlich durch Röntgen-<sup>1)</sup>, Becquerel-<sup>2)</sup>, ultraviolette Strahlung<sup>3)</sup> oder durch hohe Temperatur gegeben ist. Indem wir in ihnen eine starke elektromotorische Kraft wirken lassen, können wir in ihnen auch eine selbstständige Strömung hervorrufen. Diese soll uns hier speciell beschäftigen.

2. *Ursachen der Ionisierung in der selbstständigen Strömung.* — In elektrisch neutralen Teilchen sind die positiven und negativen Ionen durch die Kraft der elektrischen Anziehung aneinander gebunden. Sollen sie frei werden, so müssen sie entgegen dieser Kraft soweit voneinander entfernt werden, dass sie ihre gegenseitige Anziehung nicht mehr zu hindern vermag, einem beliebigen Antrieb in irgend einer Richtung zu folgen. Dies kann einmal dadurch erreicht werden, dass man an den entgegengesetzt geladenen Ionen eines neutralen Teilchens eine (elektromotorische) Kraft wirken lässt, welche die Ionen in entgegengesetzter Richtung auseinandertreibt.

Als solche elektromotorische Kraft kommt in erster Linie die Kraft des elektrischen Feldes in Betracht. Diese bringt für sich allein und unmittelbar wirkend dann Ionisierung hervor, wenn sie grösser ist als die Kraft, mit welcher die Ionen in einem neutralen Teilchen sich anziehen. Nehmen wir an, dass in einem Körper lediglich durch diese direkte Wirkung der elektrischen Feldstärke Ionisation geschaffen wird, so ist verständlich, dass in einem Dielektricum die elektrische Kraft nicht über einen gewissen Grenzwert steigen kann, ohne Ionisation hervorzubringen und dann eben dadurch zu sinken.

Eine andere elektromotorische Kraft ist folgende. Besitzt ein neutrales Teilchen senkrecht zu magnetischen Kraftlinien eine relative translatorische oder rotatorische Geschwindigkeit,

1) W. C. Röntgen, Ber. d. Würzb. Soc. 1895; Wied. Ann. 64. p. 12. 1898.

2) F. H. Becquerel, Compt. Rend. 122. p. 559. 1896.

3) Ph. Lenard, Ann. d. Phys. 1. p. 486. 1900.



ab. Für das folgende sei zunächst angenommen, dass die Grössen, welche den Zustand eines Körpers, speciell eines Gases, bestimmen, constant seien und dass lediglich die Feldstärke variiert werde.

Die elektrische Strömung in einem Gase kann auf ihrer Bahn ultraviolette oder Röntgenstrahlung erregen. Da indes solche Strahlungen nur durch den Stoss bewegter Teilchen ausgelöst werden, so sei ihre ionisierende Wirkung eingeschlossen gedacht in den Ausdruck Ionisierung durch den Stoss bewegter Teilchen. Ausgeschlossen ist im Folgenden dauernde Ionisierung durch secundäre Ursachen, die nicht in der Feldstärke ihren Ursprung haben.

3. *Ionisierungsgrenzwert der Feldstärke, „elektromotorische Gegenkraft“ im Lichtbogen.* — Von verschiedenen Seiten<sup>1)</sup> ist bereits darauf hingewiesen worden, dass eine elektrische Strömung in einem Gas durch Strahlungen, die sie in ihm auslöst, das Gas auf ihrer Bahn leitend mache und so eine Erniedrigung des Spannungsgefälles herbeiführe. Für denjenigen, der in den Kathoden- und Canalstrahlen schnell bewegte Ionen sieht<sup>2)</sup>, ist es selbstverständlich, dass die ionisierende Wirkung der bewegten Ionen nicht bloss an der Kathode, sondern in allen Teilen der Strombahn sich zeigen müsse. Es sei wiederholt, dass wir A. Schuster (l. c.) die Ansicht verdanken, dass durch den Stoss bewegter elektrischer Teilchen neutrale Teilchen in leitfähige Partikeln oder Ionen zerlegt werden.

J. J. Thomson<sup>3)</sup> ist in einer jüngst veröffentlichten Arbeit soweit gegangen, die Ionisierung eines Gases ausschliesslich auf Rechnung der bewegten Ionen zu setzen, und hat die wichtige Meinung ausgesprochen, dass die Ionisierung nur dann erfolgen könne, wenn die Geschwindigkeit der Ionen und darum die elektrische Feldstärke oberhalb eines gewissen kritischen Wertes liege. Einen Grund für diese Vorbedingung hat er indes nicht angegeben.

Nun muss man wohl ebenfalls der Ansicht sein, dass in den Fällen der Entladung, die wir beobachten, die elektrische Feldstärke für sich allein nicht ausreiche, die Ionen eines neutralen

1) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 66. p. 330. 1898.

2) W. Wien, Wied. Ann. 66. p. 446. 1889.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 50. p. 279. 1900.



für eine bestimmte Stromstärke nur oberhalb eines gewissen Wertes der Spannungsdifferenz der Elektroden möglich.

Insofern die potentielle Ionenenergie eine Function der absoluten Temperatur  $T$  und einer für den betreffenden Körper charakteristischen Constante  $k$  ist, insofern die kinetische Energie, die ein Ion unter der Wirkung der Feldstärke  $K$  annimmt, von einer Constante  $\alpha_p$  bez.  $\alpha_n$  und der mittleren Weglänge  $l_p$  bez.  $l_n$  des positiven bez. negativen Ions abhängt, lässt sich die Bedingung für das Eintreten der Ionisirung dahin definiren, dass eine Function  $F(K, T, k, \alpha, l)$  verschwinden muss. Aus  $F(K, T, k, \alpha_p, l_p) = 0$  bez.  $F(K, T, k, \alpha_n, l_n) = 0$  lassen sich für die verschiedenen Werte von  $T$ ,  $k$ ,  $\alpha$  und  $l$  die Ionisierungsgrenzwerte  $(K_0)_p$  bez.  $(K_0)_n$  für das bewegte positive bez. negative Ion berechnen.

Es ist schwierig, die Grenzspannung (Spannungsdifferenz der Elektroden beim Erlöschen der Strömung) einer selbstständigen Strömung in Gasen durch eine Function darzustellen, da sie auch von den Dimensionen der Entladebahn abhängt. Aber soviel lässt sich auf Grund des Vorstehenden sagen, dass für jede selbstständige Strömung in einem Gas bei gegebenen Umständen, vor allem für eine bestimmte Stromstärke ein Wert der Spannungsdifferenz der Elektroden besteht, unterhalb dessen die Strömung nicht möglich ist.

Die elektrische Strömung in einem Dampf haben wir in eine Reihe zu stellen mit der Strömung in einem Gas. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint die sogenannte elektromotorische Gegenkraft des Lichtbogens als die zur Aufrechterhaltung der Ionisirung notwendige Grenzspannung einer selbstständigen Strömung.

4. *Entladungsverzug.* — Die vorstehenden Ueberlegungen haben stillschweigend die nach neueren Versuchen<sup>1)</sup> zutreffende Voraussetzung, dass schon vor dem Eintreten der Wirkung der Feldstärke einige freie Ionen aus irgend welchen Gründen vorhanden sind; diese werden dann von der Feldstärke in Bewegung gesetzt und bringen mit dieser zusammen durch ihren Stoss Ionisirung hervor.<sup>2)</sup> Sind keine freien Ionen vorhanden,

1) W. Linss, Elektrotechn. Zeitschr. 11. p. 506. 1898; J. Elster und H. Geitel, Ann. d. Phys. 2. p. 425. 1900.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 50. p. 279. 1900.



Molierung und nehmen zunächst an, dass die Zahl der freien Ionen in der Volumeneinheit lediglich durch Ionisierung und Molierung geändert werde; auch soll nur eine Art positiver und negativer Ionen auftreten, wie ja bereits im Vorausgehenden stillschweigend angenommen wurde.

Die Zahl der freien Ionen, welche durch Ionisierung neu entstehen, ist eine Function der Anzahl  $n_p$  bez.  $n_n$  der vorhandenen freien positiven bez. negativen Ionen, der Feldstärke  $K$ , der absoluten Temperatur  $T$ , einer für den Körper charakteristischen Constante  $k$ , der freien Weglängen  $l_p$  bez.  $l_n$ , zweier für die zwei Ionenarten charakteristischen Constante  $\alpha_p$  bez.  $\alpha_n$  und endlich der Zeit  $t$ . Die Zahl der durch Ionisierung in der Volumeneinheit neu entstehenden Ionen lässt sich also darstellen als eine Function  $f = f_p(K, T, k, \alpha_p, l_p, t) + f_n(K, T, k, \alpha_n, l_n, t)$ . Hierzu ist die Bedingung zu nehmen  $f_p = 0$  für  $K < (K_0)_p$  und  $f_n = 0$  für  $K < (K_0)_n$ ;  $(K_0)_p$  und  $(K_0)_n$  sind die aus den Gleichungen  $F = 0$  sich ergebenden Grenzwerte. Die Zahl der durch Molierung verschwindenden Ionen lässt sich geben durch eine Function  $\varphi(K, T, k, \alpha_p, \alpha_n, l_p, l_n, t)$ .

Im stationären Zustand der Ionisation muss gelten

$$\frac{df}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung ist z. B. auf eine längere ungeschichtete positive Lichtsäule anzuwenden.

In einem stationär durchströmten und darum stationär ionisirten Gas wird nun die Zahl der Ionen ausser durch Ionisierung und Molierung im allgemeinen auch noch durch die Diffusion und die elektrische Konzentrationsänderung<sup>1)</sup> beeinflusst. Die Zahl der durch Diffusion bez. die elektrische Konzentrationsänderung verschwindenden und neu auftretenden Ionen sei durch die Function  $\chi$  bez.  $\psi$  dargestellt. Die Bedingungsgleichung für stationäre Ionisation ist dann im allgemeinen Fall

$$\frac{df}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\chi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Es ist die Frage aufgeworfen worden, ob eine stationäre elektrische Strömung in Gasen möglich sei, und von der einen

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. 2. p. 4 u. 133. 1900; Ann. d. Phys. 3. p. 510. 1900.





Kraft und ist  $(K_0)_n < K < (K_0)_p$ , so erfolgt an der betrachteten Stelle Ionisirung nur durch die negativen Ionen.

Ist  $K > (K_0)_p > (K_0)_n$ , so bewirken die positiven wie negativen Ionen Ionisirung, aber diese in grösserem Maasse als jene.

Hat zwischen zwei Elektroden in einem verdünnten Gas eine selbstständige Strömung statt und ist  $(K_0)_p$  bedeutend grösser als  $(K_0)_n$ , so wird die Form der Strömung abhängig von der Bewegung der negativen Ionen. Da diese von der Kathode herkommen, so werden die einzelnen Abschnitte (Schichten) der Strömung in ihrer Lage bestimmt durch diejenige der Kathode; sie müssen mit dieser fest verbunden<sup>1)</sup>, aus ihr hervorzuströmen erscheinen. Auch hängt dann die Stärke des elektrischen Stromes in erster Linie von den Verhältnissen an und in der Nähe der Kathode ab.<sup>2)</sup>

Eine andere Folge der unipolaren Ionisirung, die unipolare Entladung, wird weiter unten besprochen werden.

7. *Gangunterschied zwischen Ionisirung und Feldstärke.* — In den vorausgehenden Abschnitten wurde stillschweigend immer angenommen, dass das Maass der kinetischen Energie und damit der Ionisirung abhängt von der Feldstärke an dem Orte der Ionisirung. Dies ist nicht allgemein richtig. Gemäss der an anderen Stellen entwickelten Anschauungen über die Eigenart der elektrischen Strömung in Gasen<sup>3)</sup> ist nämlich die kinetische Energie der Ionen in Gasen im allgemeinen nicht mehr proportional der an Ort und Stelle herrschenden Kraft.

Indem ein Ion unter der Wirkung der Feldstärke wachsende kinetische Energie annimmt, legt es eine Strecke Weges zurück; sinkt längs desselben die Feldstärke, ohne dass es Energie durch Zusammenstoss einbüsst, so besitzt es an dem Ort mit kleinerer Feldstärke grössere kinetische Energie als an den vorausgehenden Orten mit grösserer Feldstärke. Dort kann es darum trotz der kleineren Feldstärke eine grössere ionisirende Wirkung haben als hier. Allgemein kann man sagen: Der Ort der ionisirenden Wirkung eines Ions ist gegen den Ort, wo ihm die Feldstärke kinetische Energie erteilt hat, ver-

1) E. Goldstein, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1876. p. 292.

2) Vgl. J. Stark, Ann. d. Phys. 1. p. 435. 1900.

3) J. Stark, Physikal. Zeitschr. 1. p. 441. 1900; 2. p. 132. 1900.







Körper ist also von einer dünnen unmittelbar an ihm liegenden Atmosphäre ionisirten Gases umgeben. Die freien positiven und negativen Ionen in dieser werden bei vorhandener Ladung des Körpers durch die Feldstärke in entgegengesetzter Richtung in Bewegung gesetzt und wirken dann ionisierend auf neutrale Gasteilchen, sowie die Feldstärke den Ionisierungsgrenzwert erreicht hat. Zu beachten ist jedoch dabei, dass diese ionisierende Wirkung hauptsächlich nur diejenigen Ionen hervorbringen können, welche sich von dem glühenden Körper weg in das Gas hineinbewegen. Da nämlich die ionisierte Gasschicht dünn ist, so kommen die auf den Körper zuwandernden Ionen an diesem bald zum Stillstand; es kann darum nur eine kleine Zahl von ihnen im Gas vorhanden sein. Demgemäss gelangen in der Umgebung eines glühenden Körpers vorzugsweise nur Ionen eines Zeichens zur ionisierenden Wirkung, nämlich diejenigen, welche gleiches Zeichen mit der Ladung des Körpers haben und darum von diesem weg in das Gas wandern.

Da nun die negativen Ionen in Gasen nach den obigen Darlegungen stärker ionisierend wirken als die positiven, so ist gemäss den Auseinandersetzungen über unipolare Ionisierung verständlich, dass der Ionisierungsgrenzwert der Feldstärke oder der absolute Wert der Entladespannung für eine negative Ladung eines glühenden Körpers kleiner ist als für eine positive.

Göttingen, 5. December 1900.

(Eingegangen 14. December 1900.)

---



Der Verfasser der Arbeit, von welcher wir sprechen, hat aus den verschiedenen Werten für  $a$  folgende Schlussfolgerungen (l. c. p. 278) gezogen:

„Vergleicht man die mitgeteilten Resultate miteinander, so erhält man für die von mir untersuchten Metallsulfide und Metalloxyde folgende Spannungsreihe:

|             |                  |           |
|-------------|------------------|-----------|
| Chalkopyrit | Kupfer           | Eisen     |
| Pyrolusit   | Cadmium          | Pyrrhotit |
| Wismut      | Nickelerz        | Antimon   |
| Zink        | Kohle            | Pyrit     |
| Nickel      | (für Bogenlicht) | +         |

*Die Glieder dieser Reihe folgen dem Gesetze der thermoelektrischen Spannungsreihe der Metalle mit hinreichender Annäherung.*“ So ist z. B.

$$\begin{array}{l} \text{Pyrolusit/Kohle} + \text{Kohle/Pyrit} = \text{Pyrolusit/Pyrit} \\ 315,2 \quad + \quad 615,6 \quad = \quad 930,8 \text{ (beob. 933,2),} \\ \text{ferner} \\ \text{Wismut/Zink} + \text{Zink/Pyrit} = \text{Wismut/Pyrit} \\ 134,6 \quad + \quad 600,5 \quad = \quad 735,1 \text{ (beob. 731,9).} \end{array}$$

Mein Zweck war, *diese letztere Folgerung* von A. Abt mit Hilfe anderer aus den Ergebnissen dieser Messungen herausgegriffener Beispiele zu *prüfen*.

Stellen wir zunächst fest, dass der genannte Physiker findet:

$$\begin{array}{ll} \text{für Pyrit/Zink} & a = 600,5 \\ \text{„ Pyrit/Eisen} & a = 635,9 \end{array}$$

Das Eisen müsste also in der thermoelektrischen Spannungsreihe vom Pyrit weiter entfernt sein als das Zink. Aber man hat andererseits:

$$\begin{array}{ll} \text{für Chalkopyrit/Eisen} & a = 667,1 \\ \text{„ Chalkopyrit/Zink} & a = 602,6 \\ \text{„ Pyrrhotit/Zink} & a = 29,7 \\ \text{„ Pyrrhotit/Eisen} & a = 11,0 \\ \text{„ Pyrolusit/Eisen} & a = 353,9 \\ \text{„ Pyrolusit/Zink} & a = 333,1 \end{array}$$

Die Ergebnisse der drei letzten Reihen zeigen dagegen, dass Zink und Eisen in der thermoelektrischen Spannungs-





Die Länge  $a$  ist also je nachdem 127,1 155,6 186,3 199,7. Die directe Prüfung der Thermoelemente Wismut/Antimon hat, nach A. Abt, ergeben:  $a = 199,7$ .

Thermoelement Pyrrhotit/Wismut.

|                          |   |                    |   |                  |
|--------------------------|---|--------------------|---|------------------|
| 1. Pyrit/Wismut          | — | Pyrit/Pyrrhotit    | = | Pyrrhotit/Wismut |
| 731,9                    | — | 563,2              | = | 168,7            |
| 2. Chalkopyrit/Pyrrhotit | — | Chalkopyrit/Wismut | = | Pyrrhotit/Wismut |
| 649,5                    | — | 542,2              | = | 107,8            |
| 3. Pyrolusit/Pyrrhotit   | — | Pyrolusit/Wismut   | = | Pyrrhotit/Wismut |
| 370,1                    | — | 210,6              | = | 159,5            |

Die Länge  $a$  ist hier 107,3 159,5 oder 168,7; die directe Messung hatte  $a = 178,0$  ergeben.

Diese Beispiele beweisen, dass die Schlussfolgerung der Arbeit von A. Abt sich keineswegs bestätigt, sowie um klarzustellen, dass *die von ihm geprüften Körper nicht dem Gesetze unterworfen sind, welchem die thermoelektrische Spannungsreihe der Metalle gehorcht.*

(Eingegangen 27. November 1900.)



Bromsilber und Jodkalium zeigen also eine Contraction des Volumens und ihre Molecularwärmen sind grössere als die Summe der Atomwärmen.

Die Jodquecksilberverbindungen  $\text{Hg}_2\text{J}_2$  und  $\text{HgJ}_2$  dagegen zeigen eine Dilatation des Volumens, aber ihre Molecularwärmen sind geringere als die Summe der entsprechenden Atomwärmen. Uebrigens sind die beobachteten Differenzen zu bedeutend, als dass man dieselben Irrtümern bei den Versuchen zuschreiben müsste.

Andererseits kann die specifische Wärme der Legirungen meist mit Hülfe der sogenannten Mischungsregel bestimmt werden, wie Regnault bewiesen hat, oder, was auf dasselbe herauskommt, durch das Gesetz Neumann-Joule-Kopp. Ausnahme davon machen die Eisen-Antimonlegirungen, wie J. Laborde dargelegt hat.<sup>1)</sup> Uebrigens bilden sich diese Legirungen unter beträchtlicher Volumenverminderung<sup>2)</sup> und doch sind die beobachteten specifischen Wärmen höher als die durch Berechnung erhaltenen.

---

1) Vgl. E. van Aubel, Physik. Zeitschr. 1. p. 452. 1900.

2) J. Laborde, Journal de physique (3) 5. p. 547. 1896.

(Eingegangen 27. November 1900.)



verschieden langen Wegen in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren, so werden sie diese jemals gleichzeitig nur dann erreichen, wenn das Verhältniss der Weglängen durch eine rationale Zahl ausgedrückt wird. Bei einer ausgedehnten Strahlungsquelle wird sich daher der ursprüngliche Zustand niemals genau wieder herstellen. Es lässt sich aber auch dieser Vorgang als umkehrbar ansehen, indem nach endlicher Zeit sich von selbst der ursprüngliche Zustand angenähert herstellt. Ist die Zeit unbeschränkt, so ist keine Grenze für die erreichbare Annäherung gegeben. Wenn man die Auffassung hat, dass durch conservative Vorgänge, wenn sie auch in der grössten Unordnung vor sich gehen, Irreversibilität nicht hervorgerufen werden kann, so wird man freie Ausbreitung in dem erwähnten Sinne für umkehrbar ansehen müssen.

Der zweite Satz bezog sich auf die Ausnahmestellung der magnetischen Drehung der Polarisationssebene und behauptete, dass hierbei eine uncompensirte Verwandlung im Clausius'schen Sinne möglich sei. In meiner ursprünglichen Darstellung ist eine Lücke enthalten, indem die Betrachtung des Strahlenganges nicht vollständig angegeben war. Hierdurch ist durchaus gerechtfertigt, was die Herren Brillouin und Planck gegen die gegebene Darstellung angeführt haben. Es war vergessen worden zu sagen, dass die magnetische Drehung erst dann von Einfluss ist, wenn man die von jedem Element ausgehenden Kegel betrachtet. Ich habe nun in Ergänzung meiner ersten Darstellung gezeigt, dass zwei Elemente, die durch ein magnetisches Medium hindurchstrahlen, einander nicht gleich viel Strahlung zusenden.

Hr. Planck hält nun für möglich, dass Strahlen, die gar nicht von dem einen Element in der Richtung zum anderen zugestrahlt werden, die Compensation liefern können. Schliesst man die ganze Strahlung in einen Raum mit adiabatischen Wänden ein, so muss aber das eine Element jedenfalls Ersatz für den Ausfall an Strahlung bekommen und zwar müssen die Strahlen, die den Ersatz leisten, nach dem Kirchhoff'schen Satze in derselben Richtung auffallen, wie es die Strahlen thun würden, die von dem anderen Element zugestrahlt würden, wenn die magnetische Drehung nicht vorhanden wäre. Es ist mir nicht möglich gewesen zu sehen, woher diese Strahlen

kommen sollen. Ich gebe indessen gern zu, dass eine geschärfte Kritik namentlich einer so fundamentalen Frage gegenüber durchaus geboten ist und eine erneute Untersuchung der Frage, wo in diesem Falle die Compensation steckt, erscheint dringend wünschenswert, doch bin ich selbst noch nicht zu einem befriedigenden Ergebnis gelangt.

(Eingegangen 29. December 1900.)

*Anmerkung bei der Correctur*  
 Lummer und Pringsheim<sup>1)</sup>:  
 meine letzten Ausführungen<sup>2)</sup>  
 lichen die früheren Behauptungen  
 halte es daher für unnötig, zu  
 Die hinzugefügte Bemerkung, d  
 gesprochene Vermutung richtet,  
 des Strahlungsgesetzes vornehm  
 Missverständnis. Ich habe aus  
 weichungen von dem aus molec  
 Gesetz mit zunehmender Tempe  
 vorrücken müssen und damit  
 festgehaltenen Wellenlänge in diesem Falle bei weiter steigender  
 Temperatur zu den molecularen Wirkungen andere hinzu-  
 kommen müssen, die sich bei tieferer Temperatur nur bei den  
 langen Wellen zeigen.

1) E. Jahnke, O. Lummer und E. Pringsheim, Ann. d. Phys. 4. p. 225. 1901.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 530. 1900.







ein Wechselstrom, dessen Schwingungszahl gleich der Umdrehungszahl der Scheibe mal der Anzahl der Eisenanker ist.

Bis hierher ist die Art der Stromerzeugung durchaus ähnlich derjenigen, wie sie v. Kriess<sup>1)</sup> in seinem Inductionsapparat, und Grützner<sup>2)</sup> in seiner Reizsirene angewandt haben. Abgesehen von der geringen Frequenz, die mit diesen Apparaten zu erreichen ist, sind die Ströme sehr schwach und durchaus nicht sinusförmig, sodass sie sich wohl für physiologische Versuche, nicht aber für physikalische Messungen eignen. Dafür werden sie erst brauchbar, nachdem durch *elektrische Resonanz* die Intensität, wie sogleich gezeigt werden soll, ausserordentlich erhöht und der

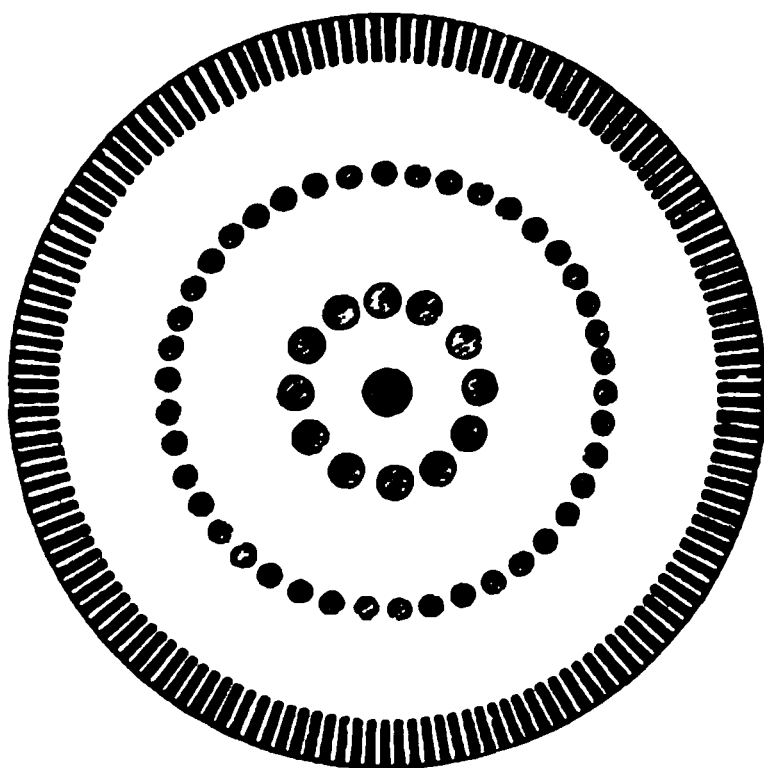


Fig. 1.

Strom von den Oberströmen gereinigt ist, sodass man einen verhältnismässig starken, *annähernd reinen Sinusstrom* zur Verfügung hat.

Mit der in einer früheren Arbeit<sup>3)</sup> angegebenen ersten Form der Wechselstromsirene konnten nur Frequenzen bis zu ca. 1000 erzielt werden. Der im Folgenden beschriebene Apparat soll zur Erzeugung schnellerer Sinusströme dienen.

Die Messingscheibe (Fig. 1) besass einen Durchmesser von 40 cm und war 1 cm dick. Am Rande wurden ringsherum 250 2 cm lange Zähne ausgefräst und die Zwischenräume mit 0,3 mm dicken Stücken Transformatorblech ausgefüllt, die

1) J. v. Kriess, Verhandl. d. Naturf. Ges. Freiburg 8. p. 2. 1882.

2) P. Grützner, Tagebl. d. 59. Vers. deutsch. Naturforscher etc. p. 202. Berlin 1886.

3) M. Wien, Wied. Ann. 66. p. 871. 1898.







Die auf diese Weise durch Resonanz erzielten maximalen Stromstärken  $A'_1$  sollten nun eigentlich mit der Schwingungszahl zunehmen, weil die inducirte elektromotorische Kraft mit der Schwingungszahl wächst. Dies ist jedoch nur in gewissen Grenzen der Fall: einerseits nimmt die magnetische Induction wegen der Schirmwirkung der Wirbelströme nicht proportional der Schwingungszahl zu, sondern langsamer, andererseits bewirkt der steigende Energieverlust im Eisen eine Zunahme des wirksamen Widerstandes<sup>1)</sup> mit der Frequenz. Ich erhielt folgende Werte der maximalen Stromamplituden in Ampère für verschiedene Schwingungszahlen  $N$  bei hintereinander geschalteten Elektromagnetspulen:

|          |      |      |      |      |      |
|----------|------|------|------|------|------|
| $N =$    | 1000 | 2000 | 4000 | 6000 | 8000 |
| $A'_1 =$ | 0,10 | 0,16 | 0,25 | 0,26 | 0,22 |

Dabei steigt der gesamte wirksame Widerstand des Stromkreises von ca. 50 Ohm auf ca. 200, während der wahre Widerstand 30,3 Ohm betrug.

Bei parallel geschalteten Elektromagnetrollen erhielt ich für  $N=4000$  und 22 Ohm im Schliessungskreis eine Stromamplitude von 0,5 Amp.

Es fragt sich nun, in wie weit der Wechselstrom durch die Resonanzerhaltung *rein sinusförmig* geworden ist. Die höheren Componenten werden durch die Einschaltung des Condensators nur wenig verändert, z. B. die Octave

$$\frac{A'_2}{A_2} = \sqrt{\frac{W^2 + 4 n^2 L^2}{W^2 + \left(2 n L - \frac{1}{2 n C}\right)^2}} = 1,32$$

für den obigen Fall, während die Amplitude des Grundstromes auf den 24,2 fachen Wert stieg.

Die Gesamtstärke aller Neben- und Oberströme  $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots$ , in dem Stromkreis *ohne Condensator* wurde in folgender Weise bestimmt: Das Dynamometer wurde einmal (Schaltung 1) von einem einfachen Widerstand abgezweigt und die Selbstinduction des Dynamometers durch Capacität für die Schwingungszahl des Grundstromes compensirt, dann erhielt man wegen der Resonanzwirkung merklich einen Ausschlag proportional  $A_1^2$ . Das andere Mal (Schaltung 2) bestand die

1) Vgl. Anm. p. 450 des folgenden Artikels.









## B. Versuche über resonirende elektrische Systeme.

Mittels dieser hochfrequenten Sinusströme lassen sich die Erscheinungen der Resonanz mit grosser Genauigkeit darstellen, besser noch wie mit irgend welchen akustischen Systemen.

Ein elektrisches System besitze den Widerstand  $W$ , das Selbstpotential  $L$  und die Capacität  $C$ ; in demselben werde, wie in unserem Fall, eine mit der Schwingungszahl steigende elektromotorische Kraft  $E = n Q$  inducirt. Dann entsteht ein Strom, dessen Amplitude  $A_0$  gegeben ist durch den Ausdruck:

$$A_0 = \frac{n Q}{\sqrt{W^2 + (n L - 1/n C)^2}}$$

Der Stromkreis, an welchem die Messungen ausgeführt wurden, besass einen Widerstand von 32,0 Ohm, ein Selbstpotential von  $3,09 \cdot 10^7$  cm und eine Capacität von 0,051 Mikrof., wie durch besondere Messungen ermittelt wurde. Die Berechnung von  $A_0^2$  nach der obigen Formel ergab die Zahlen der Tab. 1, worin der grösste Wert — für die Eigenperiode des Systems  $n = (1 / \sqrt{L C}) = 2 \pi \cdot 4008$  — gleich 100 gesetzt ist.

Tabelle 1.

|               |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $N = 3408$    | 3508 | 3608 | 3708 | 3808 | 3908 | 3958 | 4008 |
| $A_0^2 = 1,2$ | 1,8  | 3,0  | 5,6  | 12,3 | 38,1 | 71,8 | 100  |
| $N = 4008$    | 4058 | 4108 | 4208 | 4308 | 4408 | 4508 | 4608 |
| $A_0^2 = 100$ | 74,0 | 43,1 | 16,5 | 9,6  | 5,3  | 3,7  | 2,8  |

Die entsprechende Curve ist in Fig. 6 wiedergegeben und mit I bezeichnet.

$A_0^2$  wurde durch ein Kohlrausch'sches Dynamometer im Nebenschluss gemessen. Die Resultate giebt die Tab. 2. Es sind die beobachteten Ausschläge  $\alpha$  selbst, ferner dieselben in Procenten des grössten Ausschlages  $100 \alpha / \alpha_m$  angegeben.

Tabelle 2.

|                                     |      |      |      |       |      |      |      |      |      |
|-------------------------------------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| $N = 3456$                          | 3750 | 3820 | 3930 | 4008  | 4140 | 4278 | 4319 | 4425 | 4620 |
| $\alpha = 3,2$                      | 17,0 | 36,2 | 86,5 | 205,0 | 65,3 | 20,2 | 15,8 | 8,1  | 5,6  |
| $\frac{\alpha}{\alpha_m} 100 = 1,6$ | 8,3  | 17,7 | 42,2 | 100   | 31,9 | 9,9  | 7,7  | 4,0  | 2,7  |



sich leicht für Beschleunigungs- bez. magnetische Koppelung umrechnen und lauten, indem statt der allgemeinen Schwingungsconstanten die elektromagnetischen Constanten eingeführt sind, für die Quadrate der Stromamplituden in den beiden Stromkreisen:

$$A_1^2 = \frac{n^2 Q^2}{\left\{ W_1 + W_2 \frac{n^2 M^2}{W_2^2 + \left( \frac{1}{nC_2} - nL_2 \right)^2} \right\}^2 + \left\{ \left( \frac{1}{nC_1} - nL_1 \right) - \frac{n^2 M^2 \left( \frac{1}{nC_2} - nL_2 \right)}{W_2^2 + \left( \frac{1}{nC_2} - nL_2 \right)^2} \right\}^2}$$

und

$$A_2^2 = \frac{Q^2 M^2}{L_1^2 C_1^2 \left\{ W_1 W_2 + n^2 M^2 - \left( \frac{1}{nC_1} - nL_1 \right) \left( \frac{1}{nC_2} - nL_2 \right) \right\}^2 + \left\{ W_1 \left( \frac{1}{nC_2} - nL_2 \right) + W_2 \left( \frac{1}{nC_1} - nL_1 \right) \right\}^2}$$

Die folgende Tab. 3 giebt die berechneten und beobachteten Werte von  $A_1^2$ , wobei wieder das Maximum von  $A_0^2$ , also der Schwingung des ungekoppelten Systems I, gleich 100 gesetzt ist.

Tabelle 3.

## Berechnung.

$N = 3408 \quad 3508 \quad 3608 \quad 3708 \quad 3730 \quad 3758 \quad 3808 \quad 3908 \quad 4008$

$A_1^2 = 1,8 \quad 3,1 \quad 8,1 \quad 35,2 \quad 38,1 \quad 26,8 \quad 9,4 \quad 1,0 \quad 0,15$

$N = 4008 \quad 4108 \quad 4208 \quad 4308 \quad 4350 \quad 4408 \quad 4508 \quad 4608$

$A_1^2 = 0,15 \quad 0,9 \quad 5,3 \quad 32,4 \quad 50,1 \quad 41,0 \quad 14,5 \quad 7,1$

## Beobachtung.

$N = 3456 \quad 3750 \quad 3820 \quad 3930 \quad 4008 \quad 4140 \quad 4278 \quad 4319 \quad 4425 \quad 4620$

$\alpha_1 = 4,2 \quad 88,0 \quad 26,1 \quad 3,6 \quad 1,2 \quad 5,1 \quad 35,4 \quad 91,3 \quad 58,1 \quad 8,4$

$\frac{\alpha_1}{\alpha_m} \cdot 100 = 2,0 \quad 42,9 \quad 12,6 \quad 1,8 \quad 0,6 \quad 2,5 \quad 17,3 \quad 44,5 \quad 28,3 \quad 4,1$

In der Fig. 6 ist die berechnete Curve mit I + II bezeichnet, die beobachteten Werte sind durch Kreuze ( $\times \times$ ) eingetragen. Dieselben fallen nicht so genau mit der berechneten Curve zusammen, wie bei der einfachen Resonanzcurve (I).



sammen und das Minimum zwischen ihnen wird weniger tief. Dann zeigt zunächst das System II nur noch ein flaches Maximum für die Eigenperiode der beiden Systeme, bei immer weiterem Entfernen der Rollen wird dieses Maximum immer spitzer: wir erhalten eine ausgesprochene Resonanzcurve und das secundäre System reagiert merklich nur noch auf eine bestimmte Schwingungszahl. Man kann nun leicht eine Reihe solcher secundärer Systeme anordnen, die alle auf verschiedenen Schwingungszahlen eingestimmt sind, und je nach der Frequenz, die man im primären Kreise erzeugt, wird man dieses oder jenes secundäre System erregen können. Damit wäre der eingangs erwähnte Mangel der Marconi'schen Telegraphie ohne Draht gehoben. Leider tritt dafür hier noch eine viel grössere Schwierigkeit auf: die gegenseitige Induction zweier geschlossener Ströme, deren Abstand gross ist gegen ihre Dimensionen, nimmt sehr schnell mit ihrem Abstände ab, sodass eine Wirkung auf grössere Entfernung auf diese Art ausgeschlossen erscheint.

Bei *freien* Schwingungen bewirkt die Koppelung mit einem gleichgestimmten zweiten System, dass in beiden Schwebungen entstehen, indem die gesamte Schwingungsenergie abwechselnd in dem einen und in dem andern System auftritt.<sup>1)</sup> Ein interessantes Beispiel dafür bieten die Photographien Hertz'scher Schwingungen von J. Trowbridge<sup>2)</sup>, dem allerdings der wahre Grund der Schwebungen nicht bekannt war: „With periods ranging from 0,00001 to 0,000001 of a second, I have found it impossible to tune two circuits in which spark occurred to perfect resonance. There were always indications of beats due, I believe, to the capacity not rising immediately to its full value.

### C. Messinstrumente für schnelle Sinusströme.

Wir haben gesehen, dass zur Messung stärkerer Sinusströme das *Kohlrausch'sche Dynamometer* direct oder im Nebenschluss eingeschaltet ein geeignetes Instrument ist. Für die *Nulleinstellungen in der Wheatstone'schen Brücke*, welche die

---

1) Vgl. M. Wien, l. c.

2) J. Trowbridge, Phil. Mag. 38. p. 183. 1894.





Durchmesser haben. Ein solches sprechend wurde auch Gewichtsystem gewählt: die Längsten und alle zusammen wogen 6 des Systems ist aus Fig. 8a.

Zur Herstellung des  $\mathcal{H}$  starkem Eisendraht ein Ring dessen Dicke 4 mm betrug. Enden gerade gefeilt und das



Fig. 8c.

Fig.

er mit einer Wicklung von 0,1 mm-Kupferdraht versehen, deren Gesamtwiderstand ca. 200 Ohm betrug. Jedoch konnten die beiden Hälften auch  $\parallel$  geschaltet werden, sodass der Widerstand sich dann auf ca. 50 Ohm belief.

Wie aus Figg. 8b und 8c ersichtlich, wird das Ganze dann in einfacher Weise mittels des Messingbalkens  $A$  montiert. Mit Hilfe der Schrauben  $\sigma_1, \sigma_2$  kann das System leicht herausgenommen und durch ein anderes ersetzt werden. Die Schraube  $\sigma_3$  (unten) dient zur Änderung der Spannung des Drahtes,  $\sigma_4$  (oben) zum Drehen des Systems, sodass die Magnete den Polflächen des Elektromagneten parallel gerichtet werden können.

Damit sind die wesentlichen Teile des Apparates beschrieben. Was noch sonst auf den Figg. 8b und 8c zu sehen ist, dient

1) Die Spiegel wurden von dem Optiker Hrn. Magen, Berlin, Sebnitzstrasse, bezogen und lieferten in Rücksicht auf ihre geringe Grösse äusserst scharfe Bilder.



dazu, das System genau auf eine bestimmte vorgeschriebene Schwingungszahl einzustimmen, was bei vielen Anwendungen wünschenswert ist. Zu diesem Zwecke kann, wie bei dem Rubens'schen Apparat, die Länge des Drahtes mit Hülfe der Schlitten  $S_1 S_2$  verändert werden. Die genaue Einstimmung geschieht dann schliesslich durch Aenderung der Dämpfung, indem man mittels der Schrauben  $E_1 E_2$  die Entfernung der Pole von dem System variirt.<sup>1)</sup>

Die Empfindlichkeit des Apparates kann man in folgender Weise im voraus schätzen. Ein modernes Galvanometer möge einen Ausschlag von 1 Scalenteil bei 1000 Scalenteilen Entfernung, einer doppelten Schwingungsdauer von 10 Secunden und 200 Ohm Widerstand, für einen Strom von  $10^{-11}$  Ampère geben. Für  $\frac{1}{100}$  Secunde Schwingungsdauer würde der gleiche Ausschlag erst bei  $10^{-5}$  Ampère erfolgen. Für einen Wechselstrom von 100 Schwingungen in der Secunde wird der Ausschlag durch Resonanz ca. 100 mal vergrößert; infolge des Kerns aus weichem Eisendraht ist das Feld 10 mal so stark wie bei Galvanometerrollen von gleichem Widerstand. Demnach erhalten wir eine Verbreiterung des Spaltbildes um 1 Scalenteil für  $10^{-8}$  Ampère. Etwa  $\frac{1}{20}$  Scalenteil ist durch Unscharfwerden der gekreuzten Drähte im Spalt noch erkennbar, somit ist ein Wechselstrom von  $5 \cdot 10^{-10}$  noch eben merklich.

Die Untersuchung ergab für einen Apparat mit einem System  $N=100$  einen Scalenteil Ausschlag für  $1,7 \cdot 10^{-6}$  Ampère; eine Verbreiterung des Spaltbildes um einen Scalenteil für eine mittlere Intensität des Wechselstromes von  $1,4 \cdot 10^{-8}$  Ampère, demnach wäre ein Strom von  $7 \cdot 10^{-10}$  Ampère noch eben merklich, was der Vorausberechnung genügend entspricht.

Das neue Instrument übertrifft demnach unter gleichen Verhältnissen das optische Telephon etwa um das 15 fache, das Rubens'sche Vibrationsgalvanometer etwa um das 4 fache an Empfindlichkeit, was wohl hauptsächlich durch die geringere Trägheit des Systems bewirkt wird. Die beiden Vibrations-

---

1) Der Apparat ist von Hrn. Feldhausen, Mechaniker an dem physikalischen Institut der hiesigen Technischen Hochschule, hergestellt und mit drei Systemen zum Preise von 110 Mark erhältlich.

begrenzt und die Nulleinstellung ist mühsamer. Daher ziehe ich für tiefere Schwingungen bis 256 das optische Telephon vor; für höhere Schwingungen wird es jedoch zu unempfindlich — über 600 habe ich die Tonhöhe überhaupt nicht bringen können —, sodass hier ausschliesslich das Vibrationsgalvanometer in Frage kommt, dessen Dämpfung überdies für höhere Schwingungen besser wird.

Für Systeme mit verschiedenen Schwingungszahlen erhielt ich folgende Zahlen für die Empfindlichkeit:  $\alpha_1$  bedeutet die Verbreiterung des Spaltbildes um einen Scalenteil,  $\alpha_2$  den eben noch merklichen Strom ( $\frac{1}{10} \alpha_1$ ).

| $N$        | 100                 | 500                 | 1000                | 4000              |
|------------|---------------------|---------------------|---------------------|-------------------|
| $\alpha_1$ | $1,4 \cdot 10^{-8}$ | $8 \cdot 10^{-7}$   | $1,5 \cdot 10^{-6}$ | $6 \cdot 10^{-6}$ |
| $\alpha_2$ | $7 \cdot 10^{-10}$  | $1,5 \cdot 10^{-8}$ | $7,5 \cdot 10^{-8}$ | $8 \cdot 10^{-6}$ |

---

1) Vgl. den folgenden Artikel p. 453.

Für  $\alpha_2$  ist einfach  $\alpha_1/20$  gesetzt, weil es schwierig ist, eine sichere Zahlenangabe zu machen: bei höheren Schwingungszahlen ist im allgemeinen eine genauere Nulleinstellung möglich wegen besserer Dämpfung und geringerer Erschütterungsempfindlichkeit.

Bei  $N = 4000$  ist die mit dem Quadrat der Schwingungszahl abnehmende Empfindlichkeit schon so klein, dass man genaue Messungen kaum mehr damit machen kann.

Für schnellere Schwingungen wandte ich daher ein *Bellati-Giltay'sches Dynamometer*<sup>1)</sup> an, dessen Ausschlag in sehr weiten Grenzen unabhängig von der Schwingungszahl ist. Die Empfindlichkeit dieses Instrumentes, welche in der ihm von Giltay gegebenen Form schon ziemlich gross ist, kann man noch wesentlich vermehren, wenn man die Principien der neueren Galvanometer darauf anwendet, d. h. das System leicht und von geringem Trägheitsmoment wählt, den Wickelungsraum der von Maxwell angegebenen Form anpasst und ihn mit Draht von allmählich zunehmender Dicke bewickelt.

Das System des von mir benutzten Apparates bestand aus einem sehr dünnen, 5 cm langen Glasröhrchen, darauf war auf dem einen Ende der Spiegel von 3 mm Durchmesser und ca. 3 mg Gewicht (vgl. p. 442) mit Schellack aufgeklebt, an dem anderen Ende befand sich ein rundes Stück weichen Eisenblechs von ebenfalls 3 mm Durchmesser und 0,1 mm Dicke. Es wog ca. 6 mg. Das System hing an einem ca. 20 cm langen Quarzfaden und stellte sich von selbst nord-südlich ein bei einer Schwingungsdauer von ca. 3 Secunden. Mittels eines kleinen, in der Nähe des Instrumentes befindlichen Hilfsmagneten konnte der Erdmagnetismus verstärkt bez. geschwächt und damit die Schwingungsdauer zwischen 1 und 10 Secunden geändert werden. Gewöhnlich wurde mit 5 Secunden Schwingungsdauer gearbeitet. Durch kleine Verschiebungen des Hilfsmagneten konnte das System leicht in seine um  $45^\circ$  gegen die Axe des magnetischen Feldes geneigte Stellung gebracht und erhalten werden.

Zur Erzeugung des magnetischen Feldes kann ein *Rollenpaar* eines Du Bois-Rubens'schen oder Paschen'schen Galvanometers dienen; nur muss man darauf achten, dass keine grösseren

---

1) J. W. Giltay, Wied. Ann. 25. p. 325. 1885.



Das Trägheitsmoment  $K$  des Systems setzt sich zusammen aus dem des Spiegels und dem des Eisenblättchens. Beide sind rund und haben denselben Radius  $r$ . Ihre Massen seien  $m$  und  $m'$ . Daher das Trägheitsmoment beider zusammen  $= (m + m')r^2/4$ . Ferner ist das Volumen  $V = m'/s$ , wenn  $s$  das spezifische Gewicht des Eisens ist. Somit wird schliesslich:

$$J = \frac{r \pi}{2 G \cdot T} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot s}{\kappa'} \cdot \frac{m + m'}{m'}}$$

Hierin sind für unseren speciellen Fall folgende Zahlenwerte einzusetzen:

$$r = 0,15 \text{ cm}, \quad T = 5 \text{ sec}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2000}$$

(1 Scalenteil bei 1000 Scalenteilen Abstand zwischen Scala und Spiegel).

$$m = 3 \text{ mg}, \quad m' = 6 \text{ mg}, \quad s = 7,8.$$

$\kappa'$ , die scheinbare Susceptibilität, ist für eine runde Scheibe, deren Dicke klein ist gegen ihren Durchmesser:

$$1 + \pi^2 \kappa \cdot \frac{\text{Dicke}}{\text{Durchmesser.}}$$

Nehmen wir die wahre Susceptibilität zu 10 an, so ist

$$\kappa' = \frac{10}{1 + \pi^2 \cdot 10 \cdot \frac{0,1}{3}} = 2,33.^1)$$

Das Feld  $G$  berechnet sich nach Ayrton und Mather<sup>2)</sup> für einen 5 mm weiten Spielraum für das Eisenblättchen ( $\alpha$  Fig. 9) zu ca. 3000 bei 1 Ohm Widerstand ( $w$ ) und steigt proportional  $w^{3/4}$ , also für  $w = 800$  zu ca. 50000. Meine Rollen ergaben bei einer Messung mittels Localspule nur 32000. Es lag dies daran, dass die beiden Rollen nicht ganz nahe zusammengeschoben werden konnten, sondern für das System ein kleiner Zwischenraum von etwa 2 mm übrig bleiben musste ( $\beta$  Fig. 9), weil sonst das System bei kleinen Erschütterungen durch Luftzüge etc. leicht kleben blieb. Setzen wir  $G = 32000$  und die anderen Werte in unserem Ausdruck für  $J$  ein, so wird

1) Für  $\kappa = 20$  ist  $\kappa' = 2,60$ , mithin hängt die scheinbare Permeabilität und damit die Empfindlichkeit nur wenig von der Weichheit des Eisens ab,

2) W. Ayrton und F. Mather, Phil. Mag. 48. p. 349. 1898.



es noch für viel höhere sein. Nach den Versuchen von Bjerknes<sup>1)</sup> folgt der Magnetismus auch sehr schnellen Hertz'schen Schwingungen. In unserem Falle könnten die Wirbelströme in dem Eisenblättchen eine Schirmwirkung ausüben. Aus der Oberbeck'schen<sup>2)</sup> Theorie der Foucaultströme ergibt sich, dass für die Dicke des Eisenblättchens von 0,1 mm und die Suszeptibilität von  $\kappa' = 2,33$  eine Schwächung der magnetischen Induction um 1 Proc. erst bei einer Frequenz von ca. 100 000 eintreten würde. Man könnte jedoch das Eisenblättchen auch aus Eisenblechen von  $\frac{1}{10}$  Dicke zusammenkleben, dann würde die Schwächung von 1 Proc. erst bei einer Schwingungszahl von 10 Millionen eintreten. Ein solches System würde also auf ein magnetisches Feld, das 10 Millionen mal in der Secunde wechselt, mit derselben Empfindlichkeit reagiren, wie auf langsame Feldänderungen, d. h. eine mittlere Feldänderung von 0,01 C.G.S. noch merklich machen.

#### Schluss.

Im Vorstehenden ist die Erzeugung annähernd reiner verhältnismässig starker Sinusströme bis zu Frequenzen von 17 000 mittels der Wechselstromsirene beschrieben, ferner sind Methoden und Instrumente angegeben, um einerseits die Intensität solcher Ströme genau zu messen, andererseits empfindliche Nulleinstellungen in der Wheatstone'schen Brücke damit zu machen.

Die Ströme sollen, abgesehen von physiologischen und akustischen Zwecken, vor allem dazu dienen, die Aenderungen einiger elektro-magnetischen Grössen mit der Schwingungszahl zu untersuchen, z. B. der magnetischen Hysterese und des Energieverlustes im Dielektricum, ferner soll damit der Durchgang schneller Wechselströme durch Kabel, durch Gase etc. studirt werden. Ueber eine derartige Anwendung ist im nächststehenden Artikel berichtet.

Aachen, Physikal. Institut der Technischen Hochschule,  
December 1900.

---

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 48. p. 692. 1893.

2) A. Oberbeck, Wied. Ann. 21. p. 672. 1884.

(Eingegangen 20. December 1900.)

## 2. Die akustischen und elektrischen Constanten des Telephons; von Max Wien.

Die Grundbedingung für dietragung durch ein Telephon ist die der verschiedenen Töne, aus denen es setzt, dieselbe bleibt, dass also das Verhältnis geschwächt reproducirt werden kann.

Die Einwirkung der Leitung und des Aufnahmeapparats sollen hier nicht nur die Frage erörtert werden, — einerseits als elektromagnetischer, andererseits als akustischer Apparat betrachtet — sondern auch die Uebertragung von Tönen verschiedener Höhe vorhanden sind.

Der Ton des Telephons hängt von der Kraft her; die Kraft, welche die magnetische Induction in dem Eisenkern bewirkt, ist die Änderung der magnetischen Induction der Spule fließenden Wechselstroms, daher hier folgende Fragen in Bezug auf die verschiedenen Schwingungszahlen 1. bei gleicher elektromotorischer Kraft die Stromintensität, 2. bei gleicher Stromintensität die magnetische Induction, 3. bei gleicher magnetischer Induction die Amplitude der Platte.

Die Stromstärke hängt in bekannter Weise von dem Widerstand und der Selbstinduction ab, die Erscheinung wird aber dadurch wesentlich complicirter, dass der „wirksame“ Widerstand und das „wirksame“ Selbstpotential<sup>1)</sup> des Telephons in hohem Maasse von der Schwingungszahl abhängig sind, weil infolge der Foucaultströme im Eisenkern der Telephon-

1) Für einen Wechselstrom von gegebener Frequenz und Stärke kann eine Spule mit Eisenkern in ihrer Wirkung auf den Strom stets durch eine Spule ohne Eisenkern von passendem Widerstand ersetzt werden. Der „wirksame“ Widerstand und die „wirksame“ Selbstinduction der Spule mit Eisenkern ist gleich dem Widerstand und der Selbstinduction der ersetzenden Spule.



spule der Widerstand mit der Frequenz steigen, das Selbstpotential abnehmen muss. Ferner lässt sich von vornherein übersehen, dass die magnetische Induction mit der Schwingungszahl sinkt, weil die Foucaultströme auf den mittleren Teil des Eisenkernes eine Schirmwirkung ausüben. Schliesslich muss bei gleicher bewegender Kraft die Amplitude der Telephonplatte für ihre Eigentöne eine Anzahl von Maximis zeigen.

Die in der menschlichen Sprache vorkommenden Töne beginnen bei den tiefsten überhaupt hörbaren Schwingungszahlen, also etwa bei 16 in der Secunde, und gehen bei den charakteristischen Tönen mancher Vocale und vor allem bei den Zischlauten bis zu 10000 und darüber.<sup>1)</sup> Zwischen diesen Grenzen sollen die in Betracht kommenden akustischen und elektrischen Grössen bestimmt werden und zwar für folgende Telephone: 1. ein Bell'sches Telephon, 2. ein älteres Telephon von Siemens & Halske (Nr. 13306), 3. ein neueres Telephon von Siemens & Halske (Nr. 353968), 4. ein Dosentelephon, bezogen von Apel-Göttingen. wie es bei der Nernst'schen Methode zur Bestimmung der Dielektricitätsconstanten mit Vorteil gebraucht wird. Die Verständigung bei der Sprachübertragung war bei allen vier Telephonen nicht merklich verschieden. Die Vocale wurden rein wiedergegeben und auch ähnliche Worte wie „Pfirsich“ und „Vierzig“ wurden überall mit voller Sicherheit unterschieden. Das ältere Siemens'sche Telephon gab die Zischlaute nur sehr leise wieder. Die Klangfarbe hatte bei dem Apel'schen Telephon einen nasalen Charakter.

Die zur Untersuchung dienenden Ströme wurden durch die im vorstehenden Artikel beschriebene Wechselstromsirene

---

1) Vgl. L. Hermann, Pflüger's Archiv 53. p. 1. 1893 und 83. p. 1. 1900. Ueber die Grössenordnung der Schwingungszahlen, welche die charakteristischen Töne der Zischlaute besitzen, kann man in folgender Weise einen Anhalt bekommen: Eine empfindliche Flamme, die bei einer Ausströmungsöffnung von 1 mm Weite unter dem hohen Gasdrucke von 26 cm Wasser functionirt, reagirt nicht merklich auf hohe gesungene Töne, wohl aber sehr gut auf Zischlaute. Mit der Edelmann'schen Galtonpfeife untersucht, zeigte es sich, dass erst Töne mit über 5000 Schwingungen die Flamme stark beeinflussen, am empfindlichsten war sie für Töne, die an der Grenze der Hörbarkeit und darüber hinaus liegen, also etwa 50000 Schwingungen machen.



Wir sehen, dass der wirksame Widerstand, entsprechend dem grösseren Energieverlust durch Wirbelströme, mit wachsender Schwingungszahl stark ansteigt, bei dem Telephon Siemens II sogar den 13fachen Wert des wahren Widerstandes ( $N=0$ ) erreicht. Auf der anderen Seite nimmt das wirksame Selbstpotential ab, am stärksten bei dem Telephon Siemens I, wo es etwa auf den fünften Teil des Wertes für die Schwingungszahl 256 sinkt. Die Selbstinduction für  $N=256$  ist noch wenig von den Wirbelströmen beeinflusst, wie Vergleichsmessungen mit  $N=128$  zeigten. Der Unterschied zwischen den Werten bei  $N=8000$  und  $N=16000$  ist verhältnismässig gering: es nehmen merklich nur noch die äussersten Schichten des Eisens an der Magnetisirung teil, und die Anzahl der Kraftlinien ist nicht sehr viel grösser als wenn überhaupt kein Eisen vorhanden wäre.

Indem wir mit Helmholtz<sup>1)</sup> annehmen, dass die elektromotorische Kraft in dem Telephonstromkreise proportional der Schwingungszahl wächst, so ist die Stromstärke proportional  $n/\sqrt{W'^2 + n^2 L'^2}$ , worin  $n = 2\pi N$  die Schwingungszahl in  $2\pi$  Secunden bedeutet. Wenn  $L'$  gross gegen  $W'$  ist, so ist der Ausdruck merklich unabhängig von  $n$ , vorausgesetzt, dass  $W'$  und  $L'$  nicht von der Schwingungszahl abhängen. Wie wir soeben gesehen haben, ist dies jedoch in hohem Maasse der Fall:  $W'$  steigt mit der Frequenz,  $L'$  sinkt. Letzteres ist bei hohen Schwingungszahlen von grösserem Einfluss, sodass z. B. für Telephon Siemens II der Ausdruck  $n/\sqrt{W'^2 + n^2 L'^2}$  für  $N=16000$  3,4 mal so gross ist, wie für  $N=256$ , die Intensität des entsprechenden Tones wäre hiernach  $(3,4)^2 = 11,5$  mal grösser. Auf der anderen Seite sinkt die magnetische Induction mit der Schwingungszahl proportional  $L'$  und damit die Amplitude der Platte und die Intensität der höheren Töne. Bei dem Telephon Siemens II wird aus diesem Grunde die Intensität des Tones  $N=16000$  mehr als 25 mal kleiner sein wie die des Tones 256 bei gleicher Intensität des Wechselstromes.

Es machen sich hier offenbar zwei entgegengesetzte Einflüsse geltend; ob sie sich vielleicht einmal in ihrer Wirkung

1) H. v. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. 1. p. 465.



Offenbar liegen sämtliche Eigentöne bei den Siemens'schen Telephonen etwas tiefer, als bei den beiden anderen. Eine auffallende Erscheinung ist, dass mehrfach bei den höheren Eigentönen statt eines ausgesprochenen Maximums 2—3 Maxima von ziemlich gleicher Stärke dicht beieinander auftreten. Besonders ausgeprägt war dies bei den Eigentönen 5000 bez. 400 der beiden Siemens'schen Telephone.

Eine andere Methode zur Untersuchung der Lage der Eigentöne und ihres Einflusses auf die Intensität der durch das Telephon reproducirten Töne besteht in der Messung der schwächsten Ströme, die einen noch gerade hörbaren Ton in dem Telephon erzeugen. Derartige Untersuchungen sind schon mehrfach angestellt und dabei für die eben noch merklichen Stromstärken sehr verschiedene, zum Teil ausserordentlich niedrige Werte erzielt.<sup>1)</sup> Die Differenzen in den Resultaten dürften hauptsächlich darin ihren Grund haben, dass meistens statt des einfachen Sinusstromes der Wechselstrom eines Inductiums mit spitzen Oeffnungsstromstössen verwandt wurde. Diese Stromstösse werden im Hörtelephon nun noch gehört<sup>2)</sup>, nun auch die mittlere Intensität des ganzen Wechselstromes sehr gering ist. Ein Analogon dazu würde etwa in den Aufzeichnungen in eine Phonographenwalze zu finden sein, die weit von dem Schreibstift entfernt ist, sodass nur die ersten Excursionen eingekrazt werden.

Lord Rayleigh<sup>3)</sup> hat mit einem Sinusinductor und für

1) Vgl. hierüber Lord Rayleigh, Phil. Mag. 38. p. 294. 1894.

2) Vielfach ist die Ansicht verbreitet und ich habe dieselbe ebenfalls vertreten, dass das Hörtelephon besonders empfindlich für ganz hohe Töne sei, eine Ansicht, die hauptsächlich darauf begründet war, dass bei

Widerstandsmessung zersetzbarer Leiter nach der F. Kohlrausch'schen Methode auch bei verhältnismässig starker Polarisirung noch ein gutes Minimum zu erzielen ist und die Lage desselben mit dem Minimum von Tönen sehr hoher Wechselzahl übereinstimmt. Das Hörtelephon ist jedoch, wie aus den weiter unten mitgetheilten Zahlen hervorgeht, für Töne mit über 10000 Schwingungen in der Secunde sehr unempfindlich:

Einstellung erfolgt in Wirklichkeit auf das Minimum der genannten Stromstösse, die sehr schnell verlaufen und sich daher elektrisch sehr schnelle Wechselströme verhalten, während sie akustisch das genannte charakteristische „Telephongeräusch“ erzeugen, das unter Umständen die musikalischen Töne des Telephonklanges überdeckt.

3) Lord Rayleigh, l. c.

höhere Frequenzen mit den gearbeitet, welche beim Ansch in zwischen den Zinken bei Er erreichte auch hiermit n die Beobachtung wegen der s schwingung schwierig wurde. mit 70 Ohm Widerstand wa

|                                     |      |     |     |
|-------------------------------------|------|-----|-----|
| $N$                                 | 128  | 192 | 256 |
| Strom in }<br>10 <sup>-8</sup> Amp. | 2800 | 250 | 88  |

Dieselben sind mit meinen qualitativ in guter Ueberein

Um die Empfindlichkeit (Tonhöhen festzustellen, wurde in ein entferntes, möglichst durch geeignete Abzweigung d Ton und die verschiedenen Te sind in der folgenden Tabelle auf mein rechtes Ohr und ge an, welche einen Ton herv Schliessen noch mit Sicherheit wahrnehmen konnte.

Tabelle III.  
Empfindlichkeit verschiedener Telephone.

| $N$   | III                            | Apel                    | Siemens I               | Siemens II              |
|-------|--------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 64    | 190000 . 10 <sup>-8</sup> Amp. | 5000 . 10 <sup>-8</sup> | 1800 . 10 <sup>-8</sup> | 1200 . 10 <sup>-8</sup> |
| 128   | 15000                          | 510                     | 220                     | 150                     |
| 256   | 1050                           | 40                      | 26                      | 18,5                    |
| 512   | 150                            | 10                      | 1,7                     | 2,7                     |
| 720   | —                              | —                       | 1,5                     | 0,8                     |
| 1024  | 18                             | 3,5                     | 3,0                     | 1,85                    |
| 1800  | 80                             | 2,8                     | 6,0                     | 2,4                     |
| 2090  | 130                            | 3,5                     | 0,8                     | 3,0                     |
| 2400  | —                              | 5,0                     | 2,0                     | 1,0                     |
| 2800  | 70                             | —                       | —                       | —                       |
| 4000  | 230                            | 70                      | 50                      | 30                      |
| 8000  | 2500                           | 170                     | 700                     | 100                     |
| 16000 | 12000                          | 1000                    | 2200                    | 1700                    |

Das Bell'sche Telephon hat durchweg eine geringere Empfindlichkeit, wie die anderen drei Instrumente, entsprechend seinem geringeren Widerstand (vgl. Tab. 1,  $N=0$ ). Alle vier Telephone zeigen eine besonders grosse Empfindlichkeit für die Ströme zwischen den Schwingungszahlen 500 und 3000; sowohl nach der Tiefe wie nach der Höhe zu nimmt sie schnell ab, sodass z. B. bei dem Bell'schen Telephon für  $N=64$  eine mehr als 10000fache Stromintensität oder eine mehr als 100 Millionen mal so grosse Stromenergie zur Hervorbringung eines eben merklichen Tones notwendig ist, wie für  $N=1024$ .

Dieser steile Abfall der Empfindlichkeit für hohe und tiefe Töne kann nicht etwa allein durch die akustischen Eigenschaften des Telephons, die Eigentöne der Platte erklärt werden: zum weitaus grössten Teil ist er durch die verschiedene Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für Töne verschiedener Höhe bedingt. Auf die Schlüsse, die man hierauf aus den Versuchen ziehen kann, hoffe ich anderer Stelle eingehen zu können.

Die fettgedruckten Zahlen der Tab. III, welche die Maxima der Empfindlichkeit für das betreffende Telephon angeben, fallen im allgemeinen mit den oben direct bestimmten Eigentönen der Telephonplatte zusammen. Am deutlichsten zeigt sich dies bei dem Bell'schen Telephon, das auch die geringste Dämpfung besitzt. Bei den beiden Telephonen von Siemens und Halske zeichnen sich die Eigentöne ebenfalls durch besonders geringe Stromintensitäten aus, bei dem stark gedämpften Apel'schen Telephon liegt jedoch das Maximum der Empfindlichkeit  $N=1500$  zwischen zwei Eigentönen ( $N=1060$  und  $N=2500$ ).

Die wichtigsten charakteristischen Töne der menschlichen Sprache fallen zwischen die Schwingungszahlen 500 und 3000, wo alle vier Telephone die grösste Empfindlichkeit zeigen. Dieser Umstand mag viel zur Deutlichkeit der Sprachübertragung beitragen. Auf der anderen Seite sind die Unterschiede in der Empfindlichkeit für verhältnismässig kleine Differenzen in den Schwingungszahlen gerade in diesem Gebiete sehr gross, weil die wichtigsten Eigentöne der Platte in dasselbe fallen. Die relative Intensität der höheren Töne

(Eingegangen 20. December 1900.)

---



### 3. *Zur Theorie der Niederschlagsbildung an Gebirgen; von F. Pockels.* ✓

Es ist ein längst bekannter Satz der Klimatologie, dass die der vorherrschenden Windrichtung zugewandte Seite eines Gebirges im allgemeinen eine erhöhte Niederschlagsmenge im Vergleich zur vorgelagerten Ebene, und um so mehr zur entgegengesetzten Seite des Gebirgszuges, besitzt. Auch über die Erklärung dieser Erscheinung besteht kein Zweifel, seitdem man in der adiabatischen Abkühlung aufsteigender Luftmassen die wichtigste Ursache der Condensation des atmosphärischen Wasserdampfes erkannt hat; denn der gegen eine Boden-erhebung treffende Luftstrom muss beim Ueberschreiten derselben notwendig eine Hebung erfahren. Es ist aber, soweit dem Verf. bekannt, noch nicht versucht worden, den Vorgang quantitativ zu verfolgen, ausser etwa für die dem Boden unmittelbar anliegende Luftschicht, deren Hebung, als derjenigen des Bodens selbst gleich, direct bekannt ist. Eine solche quantitative Behandlung soll im Folgenden versucht werden. Wenngleich dieselbe nur unter speciellen Voraussetzungen möglich ist, welche in der Natur höchstens annäherungsweise erfüllt sein werden, so dürfte sie immerhin einen brauchbaren Anhalt bieten zur Beurteilung des rein mechanischen Einflusses der Bodengestaltung auf die Niederschlagsbildung.

#### 1.

Wir müssen, um die für die Condensation maassgebende verticale Geschwindigkeitscomponente des Luftstromes zu finden, zunächst die hydrodynamische Aufgabe der Strömung der Luft über einen starren Boden von gegebener Gestalt lösen. Hierbei müssen wir eine Reihe vereinfachender Annahmen machen; es sollen die folgenden sein.

1. Die Strömung soll stationär sein; 2. sie soll wirbelfrei und continuirlich sein; 3. sie erfolge überall parallel zu einer bestimmten Verticalebene und sei somit ausser von der verticalen Coordinate ( $y$ ) nur von *einer* horizontalen ( $x$ ) abhängig;

Niveau ausgeschlossen werden) sehr viel langsamer variirt als in verticaler, so kann man  $\epsilon$  als Function von  $y$  allein ansehen und erhält für  $\varphi$  die Differentialgleichung

$$(1) \quad \epsilon \Delta \varphi = - \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Das Gesetz für die Abnahme der Dichte mit der Höhe wird strenggenommen in jedem besonderen Falle ein verschiedenes sein, da die dasselbe mitbestimmende verticale Temperaturabnahme in einem aufsteigenden Luftstrom von der Condensation abhängt. Es ist aber, wie es ja auch gewöhnlich bei barometrischen Höhenmessungen geschieht, als gute Annäherung statthaft, das für constante Temperatur gültige Gesetz der Luftdruckabnahme zu Grunde zu legen, welches bekanntlich lautet:

$$\log \text{nat} \frac{p_0}{p} = q \cdot y,$$

wo  $q$  eine Constante ist, welche, wenn die Höhendifferenz  $y$  in Metern ausgedrückt wird, nahezu den Wert  $1/8000$  hat. Dann gilt auch:

$$\log \frac{\epsilon_0}{\epsilon} = q \cdot y,$$

und folglich

$$-\frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = q,$$

wodurch die Differentialgleichung für  $\varphi$  diese wird:

$$(2) \quad \Delta \varphi = q \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Eine den Annahmen 5. und 6. genügende Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$(3) \quad \varphi = a(x - b \cos m x \cdot e^{-ny}),$$

wobei zwischen den Constanten  $m$  und  $n$  die Relation besteht:

$$(4) \quad \begin{cases} m^2 - n^2 = q \cdot n; \\ n = -\frac{q}{2} + r, \text{ wo } r = \sqrt{m^2 + q^2/4}. \end{cases}$$

Um zu erfahren, welchem Bodenprofil die durch dieses Geschwindigkeitspotential bestimmte Strömung entspricht, suchen wir die Strömungslinien auf; denn eine solche muss ja mit der Profilvercurve zusammenfallen. Die Differentialgleichung der Strömungslinien lautet

$$dy : dx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a b n \cos m x e^{-ny} : a(1 + b m \sin m x e^{-ny}).$$

Ihre Integration ergibt:

$$(5) \quad e^{-ny} \cdot \sin m x = -\frac{m}{b q n} + B e^{qy},$$

wobei  $B$  den Parameter der Strömungslinien bedeutet.

Setzt man fest, dass die Bodenprofilcurve durch den Punkt  $x = 0, y = 0$  geht, so wird speciell für diese  $B = (m / b q n)$ , und ihre Gleichung heisst, wenn ihre Ordinate mit  $\eta$  bezeichnet wird:

$$b \frac{q n}{m} \sin m x e^{-n\eta} = e^{q\eta} - 1$$

oder

$$b \frac{n}{m} \sin m x e^{-r\eta} = \frac{e^{\frac{q}{2}\eta} - e^{-\frac{q}{2}\eta}}{q}.$$

mit der Höhe nur langsam abnehmende) horizontale Geschwindigkeit ergibt, auch auf den praktisch besonders interessanten Fall anwendbar sein, dass sich nur *ein einzelner* Bergrücken über einer ausgedehnten *Ebene* erhebt und von einem gleichförmigen horizontalen Luftstrome senkrecht getroffen wird. Inwieweit dies zutrifft, wird in jedem speciellen Falle festzustellen sein.

Die unserer Lösung entsprechenden horizontalen und vertical aufwärts gerichteten Geschwindigkeitscomponenten sind:

$$(6) \quad u = a (1 + b m \sin m x e^{-ny})$$

$$(7) \quad v = a b n \cos m x e^{-ny}.$$

Es wäre nun, um in der Natur wirklich vorliegende Fälle behandeln zu können, erwünscht, die Lösung einer willkürlich gegebenen Bodengestalt anpassen zu können. Der Gedanke liegt nahe, dies durch Superposition einer Reihe von Ge-

schwindigkeitspotentialen der Form (3) mit verschiedenen Constanten  $m$  und  $b$  zu versuchen, also zu setzen

$$(8) \quad \varphi = \sum \varphi_h = a \left\{ x - \sum_h b_h \cos m_h x e^{-n_h y} \right\};$$

allein man findet, dass dieser Lösung nur dann auch eine Superposition der Profilverben entspricht, d. h. nur dann auch

$$(9) \quad \eta = \sum \eta_h = \sum b_h \frac{n_h}{m_h} \sin m_h x e^{-r_h \eta}$$

wird, wenn man die Exponentialfunction  $e^{-n_h \eta}$  und  $e^{-r_h \eta} = 1$  setzen kann. Dann geht zugleich  $\eta$  in die einfache trigonometrische Reihe

$$(9') \quad \eta = \sum_h b_h \frac{n_h}{m_h} \sin m_h x$$

über, und man könnte also, indem man  $m_h = h \cdot m_1$  nimmt, im Intervall  $0 < x < (\lambda / 2)$  eine willkürliche Function  $\eta = f(x)$  durch jene Reihe darstellen. Allein die Bedingung, dass  $e^{\pm h m \eta}$  noch für beliebig grosses  $h$  gleich Eins zu setzen sei, wird bei *beliebiger* Gestalt der darzustellenden Profilverbe auch dann nicht erfüllt sein, wenn deren Maximalhöhe gegen die „Wellenlänge“  $\lambda$  sehr klein vorausgesetzt wird. Man wird sich demnach auf eine *annähernde* Darstellung der gewünschten Profilverbe durch eine *endliche* Anzahl von Reihengliedern beschränken müssen. Insbesondere wird man auf dem angegebenen Wege niemals die strenge Lösung für ein Bodenprofil mit *Ecken* herstellen können. Indessen haben die fortzulassenden höheren Reihenglieder um so geringeren Einfluss auf die verticale Geschwindigkeit in grösseren Höhen und somit auf das die Niederschlagsmenge betreffende Resultat, je grösser ihre Ordnungszahl  $h$  ist.

## 2.

Wir wollen als erstes Beispiel eine Profilvergestalt wählen, welche möglichst ebenen, breiten Thalböden und plateauartigen Bergrücken entspricht, weil man dann am Bergabhänge nahe dieselben Verhältnisse zu erwarten hat, wie wenn derselbe von einem gleichförmigen horizontalen Luftstrome getroffen würde.

Eine derartige Profilverbe, welche im Intervall

$$-\frac{\lambda}{12} < x < +\frac{\lambda}{12}$$

dass der Anstieg sich wesentlich auf das Intervall

$$-\frac{\lambda}{12} < x < +\frac{\lambda}{12}$$

beschränkt, wo er auch ziemlich gleichförmig ist, ferner dass der Thalboden in der Mitte wieder ein wenig gehoben und das Bergplateau um ebensoviel eingesenkt ist. Die Höhendifferenz der Thal- und Bergmitte, welche nach den angenommenen Zahlwerten 900 m beträgt, ist daher nicht die absolut grösste, bleibt aber nur um ca. 18 m hinter letzterer zurück.

Die betrachtete Profilvercurve entspricht dem durch obige Coefficienten  $b_n$  bestimmten Geschwindigkeitspotential

$$(11) \quad \left\{ \varphi = a \{ x - b_1 \cos(m_1 x) e^{-n_1 y} - b_3 \cos(3 m_1 x) e^{-n_3 y} - b_5 \cos(5 m_1 x) e^{-n_5 y} \}, \right.$$

allerdings nach dem oben erörterten nur annähernd, doch überzeugt man sich, dass im vorliegenden Beispiel die Abweichungen in der Fig. 1 kaum zum Ausdruck kommen würden.

Aus vorstehendem  $\varphi$  ergeben sich die Componenten der Strömungsgeschwindigkeit:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} u &= a \{ 1 + \sum b_h m_h e^{-n_h y} \sin m_h x \} \\ &= a \left\{ 1 + \frac{2\pi}{\lambda} (b_1 e^{-n_1 y} \sin m_1 x + 3 b_3 e^{-n_3 y} \sin 3 m_1 x \right. \\ &\quad \left. + 5 b_5 e^{-n_5 y} \sin 5 m_1 x) \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(13) \left\{ \begin{aligned} v &= a \cdot \sum b_h n_h e^{-n_h y} \cos m_h x \\ &= a \cdot 0,1152 \cdot \left\{ \frac{1}{2} e^{-n_1 y} \cos m_1 x + \frac{1}{3} e^{-n_3 y} \cos 3 m_1 x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} e^{-n_5 y} \cos 5 m_1 x \right\}. \end{aligned} \right.$$

Für  $x = 0$ , d. h. über der Mitte des Bergabhanges, ist  $u$  in allen Höhen constant gleich  $a$ , über dem Thal ( $x < 0$ ) kleiner, über dem Berge grösser;  $a$  hat auch die Bedeutung der *mittleren* horizontalen Geschwindigkeit in irgend einem Höhen-niveau.

Für verschiedene Höhen  $H$  über der Thalmitte findet man:

|                     |         |          |          |          |
|---------------------|---------|----------|----------|----------|
| $H = 450 + y:$      | 0       | 450      | 2000     | 5000     |
| $\frac{u - a}{a} :$ | - 0,068 | - 0,0676 | - 0,0675 | - 0,0646 |

Bis zur Höhe von 5000 m ist dort also die horizontale Geschwindigkeit merklich constant, die verticale Null; somit würde nach dem p. 462 Gesagten unsere Lösung auch für den Fall gelten, dass sich das Profil von  $x = -(\lambda/4)$  an nach der negativen Seite unbegrenzt als horizontale Gerade fortsetzte, und darüber ein rein horizontaler Luftstrom flosse, dessen Geschwindigkeit bis zur Höhe von 5000 m merklich constant ( $0,93 a$ ) ist und in noch höheren Schichten allmählich bis  $a$  wächst.

Ueber dem Berge (bei  $x = +\lambda/4$ ) sind die Geschwindigkeiten  $u$  nahe um ebensoviel grösser als  $a$ , als sie über dem Thale kleiner sind.

Die Verteilung der verticalen Geschwindigkeitscomponente, welche für die Condensation maassgebend ist, ist eine complicirtere; um eine Vorstellung von ihr zu geben, seien die Werte von  $v/a$  für verschiedene Werte der  $x$ - und  $y$ -Coordinate angegeben:





Dies wäre zugleich die aus jener Wolkenschicht auf die Einheit der horizontalen Grundfläche ausfallende Niederschlagsmenge, falls das Condensationsproduct einfach vertical niederfiele, ohne durch den horizontalen Luftstrom fortgetragen zu werden. Diese Annahme wollen wir machen, da es bisher an Anhaltspunkten fehlt, um die horizontale Fortführung der fallenden Niederschlagsteilchen in Rechnung setzen zu können. Es ist jedoch vorauszusehen, dass dieselbe besonders für die langsam fallenden Wasser- oder Eisteilchen in den höheren Wolkenschichten von Belang sein wird, dass dagegen die grösseren Tropfen, die das in den unteren Wolkenschichten condensirte Wasser mit sich nehmen, nur in verhältnismässig geringer horizontaler Entfernung niederfallen. Nun tragen aber, wie die numerische Rechnung zeigt, die unteren Wolkenschichten relativ viel mehr zur Condensation bei, als die höheren; es wird daher der Einfluss der horizontalen Fortführung, wenigstens bei mässiger Windgeschwindigkeit, nicht allzu gross sein. Dieser Einfluss betrifft übrigens nicht die Gesamtniederschlagsmenge, welche der Bergzug veranlasst, sondern nur ihre *Verteilung* über den Bergabhang, und besteht in einer Verschiebung des Maximums des Niederschlages gegen den Berggipfel hin. In diesem Sinne ist also eine Abweichung der wirklichen Niederschlagsverteilung von derjenigen zu erwarten, welche sich theoretisch durch Berechnung von  $W$  als Function von  $x$  nach Formel (14) ergibt. Diese Abweichung wird unter sonst gleichen Umständen bei *Schneefall* bedeutend grösser sein, wie bei als Regen fallendem Niederschlag.

Was nun die obere Grenze  $y'$  betrifft, welche für die Integration in (14) zu nehmen ist, um die gesamte auf die Flächeneinheit fallende Niederschlagsmenge zu erhalten, so wird dafür diejenige Höhe zu setzen sein, in welcher die Condensation im aufsteigenden Luftstrom thatsächlich aufhört. Theoretisch würde, wenn bis zu beliebigen Höhen von vornherein adiabatisches Gleichgewicht herrschte, auch die durch die Bodenerhebung veranlasste Condensation sich unendlich hoch bez. bis zur Grenze der Atmosphäre erstrecken, da die verticale Geschwindigkeitscomponente nur asymptotisch gegen Null convergirt. Allein praktisch gilt für sehr hohe Schichten wahrscheinlich nicht mehr unsere Lösung des Strömungs-

problems und sicher nicht die Voraussetzung des adiabatischen Gleichgewichtes; und selbst wenn letzteres der Fall wäre, also wenn der aufsteigende Strom Luftmassen von der Erdoberfläche bis zu beliebigen Höhen hinaufführte, würde doch infolge der zunehmenden Schwere der vom aufsteigenden Strome getragenen Niederschlagspartikeln einerseits und der zunehmenden Sonnenstrahlung andererseits sich eine *obere Wolkgrenze* ausbilden.<sup>1)</sup> Wir werden demnach eine solche obere Wolkgrenze in bestimmter — und zwar der Einfachheit halber überall gleicher — Höhe als gegeben annehmen; der ihr entsprechende Wert von  $y'$  ist die obere Grenze des Integrales in (14). Uebrigens hat die hierfür angenommene Höhe, sobald sie nur überhaupt beträchtlich ist, d. h. mehrere Tausend Meter beträgt, nur verhältnismässig geringen Einfluss auf den Wert von  $W$ , da sowohl  $-F'(y)$  als  $v \cdot \varepsilon$  mit der Höhe schnell abnehmen.

Für die numerische Berechnung von  $W$  ist es zunächst vorteilhaft, den Ausdruck (14) durch partielle Integration auf die Form zu bringen:

$$(14a) \quad W(x) = \left[ v \varepsilon \cdot F(y) \right]_{y'}^{y_0} + \int_{y_0}^{y'} F(y) \frac{\partial \varepsilon r}{\partial y} dy.$$

Hierin ist  $v$  als Function von  $y$  und  $x$  durch Gleichung (13) gegeben.  $F(y)$  — der Sättigungswert der specifischen Feuchtigkeit in der Höhe  $y$  —, sowie die zur Berechnung von  $\varepsilon$  erforderlichen entsprechenden Werte von Druck und Temperatur, sind am bequemsten mit Hülfe der von H. Hertz<sup>2)</sup> gegebenen graphischen Darstellung für die adiabatische Zustandsänderung feuchter Luft zu ermitteln, da ein einfacher analytischer Ausdruck für diese Grössen nicht aufzustellen ist. Bei der Benutzung der Hertz'schen Tafel ist zu beachten, dass  $y$  nicht die absolute Höhe, sondern diejenige über der  $x$ -Axe unseres Coordinatensystems bedeutet, also, um die Meereshöhe zu erhalten, noch um den Wert  $-\eta_{(x)} = -z_4$  und die Meereshöhe der Thalsole zu vermehren ist. Das Integral

1) Vgl. W. v. Bezold, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1888. p. 518; 1891. p. 303.

2) H. Hertz, Meteorol. Zeitschr. 1. p. 421—431. 1884.

in (14a) kann dann mit hinreichender Genauigkeit in der Weise ausgewertet werden, dass man das Intervall von  $y_0$  bis  $y'$  in Teilintervalle  $y_0 \dots y_1, y_1 \dots y_2 \dots y_{h-1} \dots y_h$  (wo  $y_h = y'$ ) zerlegt und für jedes derselben einen Mittelwert  $F'_{m_k}$  einführt, wodurch man erhält:

$$(15) \quad \int_{y_0}^{y_h} F'(y) \frac{\partial (\varepsilon v)}{\partial y} dy = \sum_k^h F'_{m_k} [(\varepsilon v)_k - (\varepsilon v)_{k-1}].$$

Um nun die Berechnung von  $W$  für ein specielles Beispiel durchzuführen, wollen wir annehmen, dass der Luftstrom, welcher den Berg von der in Fig. 1 dargestellten Profilgestalt trifft, am Thalboden den Druck 760 mm, die Temperatur  $20^\circ$  und die spezifische Feuchtigkeit 9,0 besitze. Daraus folgt nach unserer Voraussetzung adiabatischen Gleichgewichtes, dass die untere Wolkengrenze in der Höhe von 950 m über der Thalsole liegt, also bei  $y_0 = 500$ , d. i. 50 m über der Bergmitte; die spezifische Feuchtigkeit ist dort  $F'(y) = 9,0$ , die Temperatur  $11^\circ$ . Wir wollen ferner die obere Wolkengrenze in der Höhe von rund 5000 m ( $y' = 4530$ ) annehmen, wo die Temperatur auf  $-13,6^\circ$ , die spezifische Feuchtigkeit auf  $F'(y) = 2,5$  gesunken ist. Die Temperatur  $0^\circ$  ist in der Höhe von 3000 m erreicht. Die Benutzung der Hertz'schen Tafel setzt voraus, dass bei Temperaturen unter  $0^\circ$  das Condensationsproduct Eis ist; ob dies der Wirklichkeit entspricht, ist für mässig tiefe Temperaturen mindestens fraglich, doch würde die Annahme, dass sich überkaltetes Wasser ausscheidet, das Resultat nicht viel ändern. Da dem vorausgesetzten stationären Zustand entsprechend anzunehmen ist, dass alles condensirte Wasser gleich ausfällt, so kommt für unsere Berechnung das Hertz'sche „Hagelstadium“, in dem das mitgeführte Wasser gefrieren würde, in Fortfall.<sup>1)</sup> — Für die Berechnung des Integrales nach Formel (15) wurde die Wolke in vier Schichten zerlegt, deren Zwischengrenzen bei  $y_1 = 1530$ ,  $y_2 = 2440$ ,  $y_3 = 3460$  m liegen; für diese Höhen ist  $\varepsilon = 1,00, 0,912, 0,816$  und bez.  $F'(y) = 6,9, 5,35, 3,8$ .

1) Auf die Condensationsadiabate hat es keinen hier in Betracht kommenden Einfluss, ob man — wie bei Construction der Hertz'schen Tafel — alles condensirte Wasser als mitgeführt oder als gleich ausfallend annimmt.

Fig. 1.

bildung annahmen, indem wir die herzuströmende Luft in der ganzen 4000 m mächtigen Schicht zwischen  $y_0$  und  $y'$  als bereits gerade gesättigt voraussetzten.

Die Vergleichung der Niederschlagscurve mit der Profilvergleichung in Fig. 1 zeigt, dass zwar das Maximum des Niederschlages mit demjenigen der Steilheit des Bergabhanges zusammenfällt, dass aber die Niederschlagshöhe von dort nach der

Thalebene und dem Bergplateau hin langsamer abnimmt, als die Neigung der Erdoberfläche; so beträgt z. B. letztere (gegeben durch  $\partial \eta / \partial x$ ) an den Stellen  $x = \pm \lambda/12$  nur noch  $1/20$  von der maximalen, der Niederschlag aber dort noch mehr als  $1/5$  seines Maximalwertes. Die niederschlagenerzeugende Wirkung eines Bergzuges macht sich also unter den hier vorausgesetzten Verhältnissen schon bei Annäherung an den Fuss desselben in der vorliegenden *Ebene* bemerklich, was mit der Erfahrung übereinstimmt.<sup>1)</sup> Dass in Wirklichkeit das Maximum der Niederschläge mehr nach dem Kamm der Gebirge verschoben erscheint, erklärt sich wohl zum Teil, wie oben schon erörtert, aus der horizontalen Fortführung der Condensationsproducte in den Wolken, zum Teil aber wohl auch aus der Abweichung der wirklichen Temperatur- und Feuchtigkeitsverteilung von der hier vorausgesetzten (vgl. Abschnitt 4).

Von Interesse ist noch die Bestimmung der *gesamten* durch den Bergzug veranlassten Niederschlagsmenge. Diese wird erhalten, indem man das durch Gleichung (14) als Function von  $x$  bestimmte  $W$  von  $x = -\lambda/4$  bis  $+\lambda/4$  integrirt, sie ist also

$$(16) \quad G = \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} W(x) dx = - \int_{y_0}^{y'} \varepsilon F'(y) \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} v dx,$$

darin wird nach (13)

$$\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} v dx = a \cdot 1100 \left\{ e^{-n_1 y} - \frac{2}{3} e^{-n_2 y} + \frac{1}{35} e^{-n_3 y} \right\}.$$

Man findet für unser Beispiel  $G = 5100 a$  g/sec auf einem Streifen von 1 m Breite und ca. 22 km Länge.

Hieraus folgt die *mittlere* Niederschlagshöhe für den ganzen Bergabhang:

$$W_m = 0,833 \cdot a \text{ mm pro Stunde.}$$

### 3.

In dem behandelten Beispiel lag die untere Wolkengrenze höher als der Berggipfel. Ist das Umgekehrte der Fall, so muss für denjenigen Teil des Bergabhanges, welcher in die

1) Vgl. Hann, *Klimatologie*, 2. Aufl., I. Bd., p. 295; ferner Assmann, *Einfluss der Gebirge auf das Klima von Mitteleuropa* p. 373. 1886.

Fig. 2.

betrage 750 mm, die Temperatur  $23^{\circ}$ , die spezifische Feuchtigkeit 10 g. Dann findet man nach der Hertz'schen Tafel die untere Wolkengrenze in der Meereshöhe 1220 m, das ist bei  $y = -375$ . Die obere Wolkengrenze werde bei  $y' = 2400$ ,

also in 4000 m Meereshöhe vorausgesetzt. Dann ergibt sich für den unterhalb der Wolke liegenden Teil des Bergabhanges, welcher sich auf die negativen Werte der  $x$ -Coordinate bis zu etwa  $-1,35$  km beschränkt, da nach (7)

$$v = C a m \cos m x e^{-n y}$$

wird,

$$W = - \int_{y_0}^{y'} \varepsilon v F' dy = - a C m \cos m x \int_{y_0}^{y'} \varepsilon F'(y) e^{-n y} dy \\ = a \cos m x \cdot 1,09.$$

Die Niederschlagshöhe wird hier also durch eine einfache Cosinuslinie dargestellt und entspricht im wesentlichen der Neigung des Bergabhanges, welche sich aus (5') zu

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{C m \cos(m x) e^{-r\eta}}{1 + C r \sin(m x) e^{-r\eta}}$$

berechnet. Für das oberhalb der Wolkengrenze  $y_0$  liegende Gebiet ist  $W(x)$  nicht durch eine einfache Function von  $x$  darstellbar. Man findet die in Millimeter pro Stunde ausgedrückte Niederschlagshöhe für die horizontale Geschwindigkeit  $a = 1$ :

|         |          |        |        |        |        |                        |
|---------|----------|--------|--------|--------|--------|------------------------|
| bei $x$ | $= -6$   | $-5$   | $-4$   | $-3$   | $-2$   | } unterhalb der Wolke, |
| $W'$    | $= 0$    | $1,01$ | $1,96$ | $2,78$ | $3,40$ |                        |
| bei $x$ | $= -1$   | $0$    | $+2$   | $+4$   | $+6$   | } in der Wolke.        |
| $W'$    | $= 3,50$ | $2,94$ | $1,95$ | $0,88$ | $0$    |                        |

Die Niederschlagsverteilung ist hiernach in Fig. 2 durch die gestrichelte Curve dargestellt. Die punktirte Curve veranschaulicht den symmetrischen Verlauf, welcher gelten würde, wenn der Berg nicht in die Wolke eintauchte.

Das Maximum des Niederschlages läge dann bei  $x=0$  und betrüge 3,93, während es so schon bei  $x = -6,3$  mit einem Betrage von ca. 3,68 erreicht wird.

Die Gesamtniederschlagsmenge ergibt sich nach der Formel

$$G = - a C \sin m x \int_{y_0}^{y'} \varepsilon F'(y) e^{-n y} dy$$

annähernd gleich 22730; sie verteilt sich auf einen horizontalen Streifen von 12000 m Länge, würde also bei gleichmässiger Verteilung für  $a = 1$  durchschnittlich 1,9 mm betragen.

horizontalen Luftstrom eine Wirbelbewegung vorhanden, welche sich streng genommen nicht stetig in die oben vorausgesetzte Potentialbewegung fortsetzen kann.

4.

Die bisher von uns gemachte Voraussetzung, dass die Temperaturverteilung in dem gegen das Gebirge treffenden Luftstrome bereits dem indifferenten Gleichgewicht entspreche, d. h. dieselbe sei, welche sich bei adiabatischer Zustandsänderung in einem aufsteigenden Luftstrome herstellt, ist in Wirklichkeit im allgemeinen nicht erfüllt. Ueber die wirklichen Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse in der freien Atmosphäre bis zu Höhen von 8000 m haben neuerdings die Berliner wissenschaftlichen Luftfahrten sicheren Aufschluss gegeben. Die mittleren Werte von Temperatur und Feuchtigkeit in von 500 zu 500 m fortschreitenden Höhenniveaus, welche Hr. v. Bezold aus den Beobachtungen der Herren



Berson und Süring abgeleitet hat<sup>1)</sup>, lassen erkennen, dass die mittlere verticale Temperaturabnahme langsamer ist, als die adiabatische, und der Sättigungswert der Feuchtigkeit im Durchschnitt nicht erreicht ist. In einem horizontalen Luftstrom, in welchem diese durchschnittlichen Verhältnisse herrschen, würde also die Luft nirgends gesättigt, und somit unsere frühere Voraussetzung einer constanten unteren Wolkgrenze nicht zulässig sein. Auch ist dann für die Condensation, welche an irgend einer Stelle des über dem Bergabhänge aufwärts fließenden Luftstromes stattfindet, nicht mehr allein die *verticale* Strömungscomponente maassgebend, wie es bei Aufstellung der Formel (14) vorausgesetzt war. Wir hätten vielmehr zur Berechnung von  $W$  zu berücksichtigen, dass die in einem Raumelement beim stationären Zustand condensirte Wassermenge gleich ist dem Ueberschuss der einströmenden über die gleichzeitig ausströmende Wasserdampfmenge; dieser Ueberschuss ist für 1 cbm und 1 Secunde

$$- \left( \frac{\partial (\varepsilon u F)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon v F)}{\partial y} \right),$$

oder, da zufolge der Continuitätsbedingung sehr annähernd

$$\frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon v}{\partial y} = 0$$

ist<sup>2)</sup>,

$$- \varepsilon \left( u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \right),$$

und somit

$$(17) \quad W = - \int_{y^0}^{y'} \varepsilon \left( u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \right) dy,$$

worin  $y^0$  und  $y'$  die Wolkgrenzen über der betrachteten Stelle bezeichnen. Die Auswertung des Integrales verlangt jetzt ausser der vollständigen Kenntnis der Strömung noch die Ermittlung des *Wolkengebietes*, d. h. desjenigen Raumes, in welchem

1) W. v. Bezold, Theoretische Betrachtungen über die Ergebnisse der wissenschaftlichen Luftfahrten des deutschen Vereins zur Förderung der Luftschiffahrt zu Berlin p. 18—21. Braunschweig, 1900.

2) Insofern nämlich die Menge des in der Volumeneinheit condensirten Wasserdampfes gegen die Gesamtmenge der hindurchströmenden *feuchten Luft* verschwindend klein ist.



In gleicher Annäherung wie früher kann die rechte Seite gleich  $\eta$  gesetzt werden; also nimmt die Gleichung die Form an:

$$(18) \quad \eta = b \frac{n}{m} \sin m x e^{-r \eta} \cdot e^{-n y_0},$$

welche sich von der Gleichung (5') der Boden-Profilcurve nur durch den für jede Strömungslinie constanten Factor  $e^{-n y_0}$  unterscheidet, der bewirkt, dass die Amplitude der Wellenlinien nach oben beständig abnimmt.

Sollen nun die Strömungslinien durch bestimmte Punkte  $y_h$  der Verticalen  $x = -\lambda/4$  gelegt werden, so hat man den zu  $x = -\lambda/4$  gehörigen Wert  $\eta'$  aus der transcendenten Gleichung

$$(19) \quad \eta' = -b \frac{n}{m} e^{-r \eta'} \cdot e^{-n(y_h' - \eta')}$$

zu berechnen, und dann in (18)  $y_h^0 = y_h' - \eta'$  einzusetzen.

Hiernach wurden die vier Strömungslinien berechnet, deren Anfangspunkte (d. h. tiefste Punkte) in den Meereshöhen 1000,

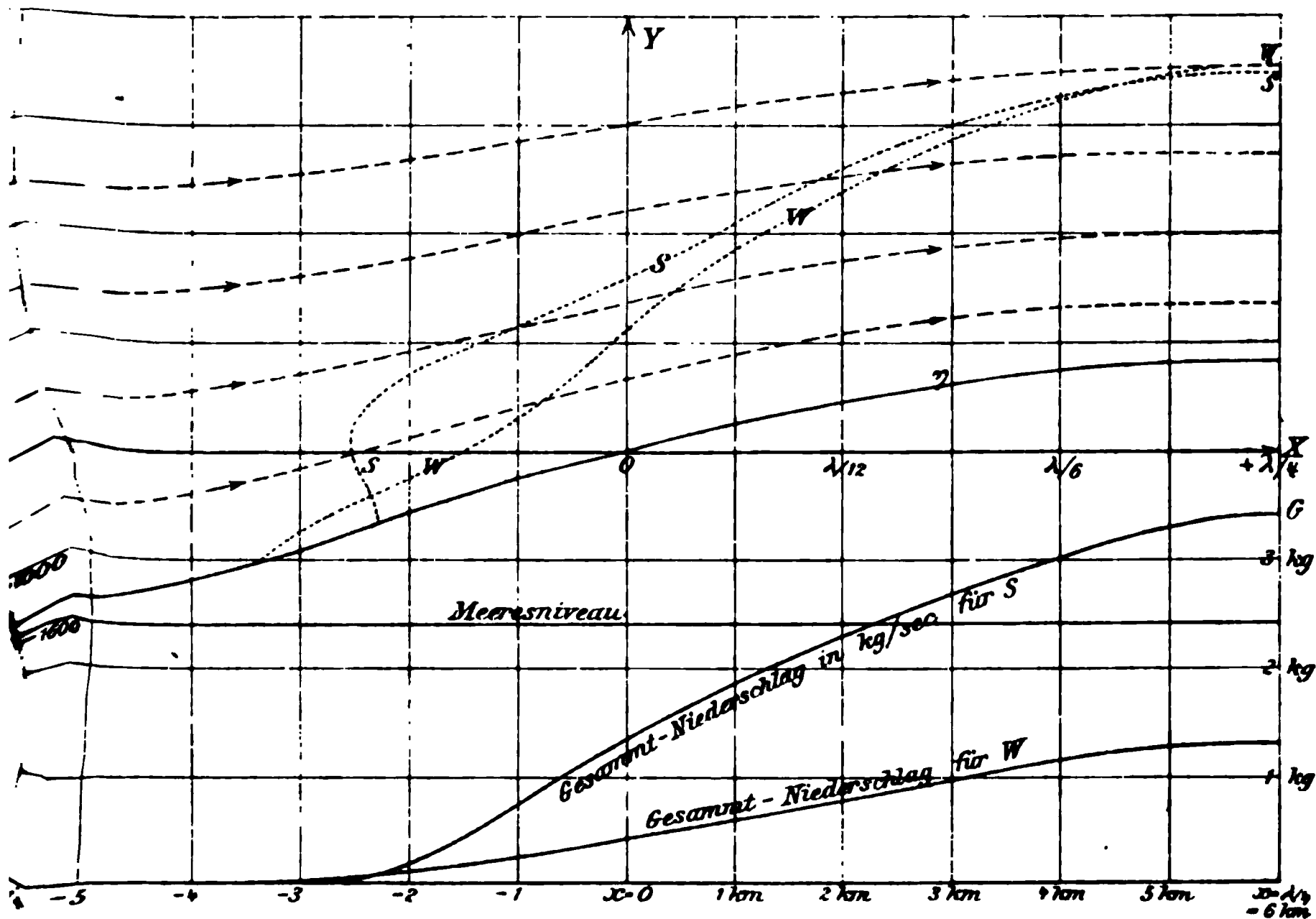


Fig. 3.

2000, 3000 und 4000 m liegen, und welche in Fig. 3 als Curve I, II, III, IV eingezeichnet sind. Ihre höchsten Punkte liegen in den Höhen 2940, 3610, 4333, 5100 m.



schneidet, ferner  $u'$  die (horizontale) Strömungsgeschwindigkeit und  $\epsilon'$  die Luftdichte in der Höhe  $h$  über der Thalsole (also bei  $x = -\lambda/4$ ), so ist die gesamte pro Secunde über dem vom Beginn der Wolke bis zu  $x$  reichenden Grundflächenstreifen von 1 m Breite condensirte Menge in Grammen:

$$(20) \quad G_x = \int_0^H \epsilon' u' g_x(h) dh.$$

Denn durch einen Streifen der Verticalebene  $x = -\lambda/4$  von der Breite 1 und der Höhe  $dh$  fliesst in der Secunde die Luftmenge  $\epsilon u$  kg; eine gleich grosse Luftmenge muss aber in der Secunde durch die Verticale von der Abscisse  $x$  austreten, und da der Zustand stationär ist, verhält es sich also ebenso, als ob jene Luftmenge  $\epsilon u$  sich in 1 Sec. längs der betreffenden Strömungslinie von  $-\lambda/4$  bis  $x$  bewegt hätte; hierbei ist aber nach der Definition von  $g$  die Wassermenge  $\epsilon u g_x(h)$  ausgeschieden worden. — Hat man nach Formel (20)  $G$  als Function von  $x$  berechnet, so giebt endlich

$$(21) \quad W = \frac{\partial G}{\partial x}$$

die an der Stelle  $x$  pro Quadratmeter Grundfläche in 1 Sec. ausgeschiedene Wassermenge in Grammen; und auf diesem Wege dürfte die Bestimmung von  $W$  praktisch bequemer auszuführen sein, als durch directe Berechnung nach Formel (17). — Bei Voraussetzung der durchschnittlichen Verhältnisse für den Sommer findet man im obigen Beispiel für  $a = 1$ , wenn man das Integral (20) näherungsweise als Summe über die zwischen den einzelnen construirten Stromcurven gelegenen Intervalle berechnet,

$$G_{x=0} = 1352, \quad G_{x=+\lambda/8} = 2680, \quad G_{x=\lambda/4} = 3460 \text{ g.}$$

Die letztere Zahl bedeutet die *gesamte* in 1 Sec. an dem der Windrichtung zugewandten Bergabhänge auf einem Streifen von 1 m Breite fallende Niederschlagsmenge. Der Niederschlag beginnt zufolge dem in Fig. 3 ersichtlichen Verlauf der Curve  $SS$  erst etwa bei  $x = -0,108\lambda$ , verteilt sich also auf einen Grundflächenstreifen von  $0,358\lambda = 8600$  m Länge; daraus berechnet sich die *durchschnittliche* Niederschlagshöhe pro Stunde:

$$\frac{3,6 \cdot 3460}{8600} = 1,45 \text{ mm.}$$













Folge von Stromschluss und -öffnung bleibt dann der Anker entweder ganz still stehen, aber oft dreht er sich auch um  $+1^\circ$  bis  $+5^\circ$  (rechts herum) im Gegensatz zu der Nadel, welche ja stark links abgelenkt wird. Wiederholte Stromschwankungen lassen den Anker meist ganz unbeeinflusst, und nur selten beobachtet man eine sehr langsame, continuirliche Rechtsdrehung. Alle Bewegungen des Inductors geschehen in diesen Versuchen äusserst langsam, daher der Inductor meist nur wenig über die Stellungen, in denen er nach Stromschluss bez. Öffnung schliesslich stehen bleibt, pendelnd hinauskommt. Wenn er z. B. bei Stromschluss und Andauer des Stromes um  $-60^\circ$  abgelenkt stehen bleibt, so erreicht er diese Stellung erst durch eine linksseitige Drehung von  $-70^\circ$  und Rückwärtsbewegung von  $+10^\circ$ , und ebenso erreicht er seine Ausgangsstellung bei Stromöffnung durch eine Rechtsdrehung um  $-70^\circ$  und Rückwärtspendeln von  $-10^\circ$ . Der Effect einer oder mehrerer rascher Stromschwankungen ist aber im allgemeinen  $= 0$ , d. h. der Anker kommt nicht von der Stelle, bleibt still stehen, während im Gegensatz hierzu die Nadel abgelenkt wird bez. abgelenkt bleibt. Im erdmagnetischen Felde erfolgen weder beim Stromschluss noch beim Öffnen irgend welche nennenswerte Bewegungen des Ankers.

*Versuch 2:* Wirkungen eines Stromes mit etwas höherer elektromotorischer Kraft und Intensität. Durch die Wicklung 1 wird ein Strom eines Accumulators geschickt. Dann ist

$$J = \frac{E}{W_i + W_e} = \frac{6}{0,6 + 28,0} = 0,21.$$

Entsprechend sind  $320 \times 0,21 = 67,2$  Ampèrewindungen wirksam.

a) Die Nadel wird im erdmagnetischen Felde ähnlich beeinflusst wie im Versuch 1. Die Ablenkung beim Stromschluss erfolgt nur etwas rascher und beträgt im Felde des Stabmagneten  $-77^\circ$ . Bei Stromöffnung kehrt sie in die Ruhelage aus Versuch 1 zurück.

b) Die Marke des Inductors dreht sich im Felde der Stabmagneten beim Schliessen und Andauer des Stromes links um sehr langsam durchschnittlich um  $-10^\circ$ ; bei Stromöffnung erfolgt eine ziemlich rasche Rechtsdrehung um durchschnittlich  $+47^\circ$  (auch hier schiesst der Inductor zunächst



Augenblicke, in dem die maximale Rechtsdrehung gemacht ist, dann kommt der Inductor schon durch 5 Stromschlüsse einmal im Kreise herum.

*Versuch 4:* Wirkung eines Stromes von noch höherer elektromotorischer Kraft und noch grösserer Intensität: Geht der Accumulatorstrom durch Wicklung Nr. 3, dann ist

$$J = 0,6 + 0,133^6 = 8;$$

also sind  $8 \times 35 = 280$  Ampèrewindungen wirksam.

a) Die Nadel erleidet bei Stromschluss eine enorm rasche Ablenkung um  $-90^\circ$  und bleibt nach länger andauernden, zitternden Pendelbewegungen während des Stromschlusses um  $-90^\circ$  abgelenkt stehen (im Felde des Stabmagneten um  $-85^\circ$ ). Unter Einwirkung rasch folgender Stromschwankungen bleibt auch hier die Nadel in starker Ablenkung nach links still stehen.

b) Der Inductor wird im Felde des Stabmagneten bei Stromschluss und Andauer des Stromes langsam um durchschnittlich  $-3,5^\circ$  gedreht; bei Stromöffnung erfolgt rasche und ausgiebige Rechtsdrehung um durchschnittlich  $+65^\circ$  (der maximale Ausschlag beträgt oft bis  $100^\circ$ , und durch Zurückpendeln geht er auf  $65^\circ$  zurück). Im erdmagnetischen Felde kommt der Inductor kaum von der Stelle. Der Strom eines stark entladene Accumulators dreht den Anker merkwürdigerweise schon beim Schliessen und während des Fliessens des Stromes rechts herum um  $+15^\circ$  und beim Oeffnen weiter in derselben Richtung um  $+35^\circ$  (zusammen also durch Schliessen und Oeffnen um  $+50^\circ$ ).

*Versuch 5a:* Wenn wir den Strom des Flaschenelementes durch Drahtwicklung Nr. 2 gehen lassen, dann sind  $98 (= 140 \times 0,7)$  Ampèrewindungen wirksam, und der Inductor macht Drehungen um  $-8^\circ$  (beim Stromschluss) und um  $+52^\circ$  (bei Stromöffnung), während die Nadel nur die bekannte negative Ablenkung zeigt, bez. in ihre Ruhelage zurückkehrt. 6—7 Stromschwankungen können eine Umdrehung bewirken.

*Versuch 5b:* Geht der Accumulatorstrom durch Wicklung Nr. 2, dann sind die Drehungen  $= -3^\circ$  und  $+63^\circ$ , wobei  $322 (= 2,3 \times 140)$  Ampèrewindungen in Betracht kommen.





















die Drehbewegung des Ankers giebt es günstige und ungünstige Bedingungen, die sich annähernd mit den unter Versuch 15 aufgezählten decken. Und mit Umkehr der Richtung der Wechselströme wird auch die Drehrichtung des Inductors umgekehrt.

*Versuch 17:* Wenn man in Versuch 15 die Nadel, statt sie in das Innere der Drahtwicklung zu bringen, seitlich davon in der Höhe des Innenraumes hält, so rotirt sie ebenfalls rechts herum, aber langsamer; und hält man sie über oder unter die Drahtwicklung, dann rotirt sie in entgegengesetzter Richtung, also links herum, und langsamer als die gleichzeitig im Innern rechts rotirende Nadel. Dasselbe gilt vom Inductor.

In den Versuchen 18 und 19 kommt der Secundärstrom eines Inductionsapparates zur Verwendung; es ist die Secundärrolle eines Inductoriums so mit der Drahtwicklung Nr. 1 verbunden, dass in letzterer der beim Schliessen des Hauptstromes entstehende Inductionsstrom abwärts, der bei Stromöffnung entstehende Inductionsstrom nach aufwärts fliesst.

*Versuch 18:* Beim Schliessen des primären Stromes wird die Nadel im erdmagnetischen Felde um + wenige Grade nach rechts abgelenkt und kehrt, da die Stromdauer eine kurze ist, sofort um — ebensoviel Grade in die Ruhelage zurück. Dieser positive Ausschlag ist bekanntlich ein Beweis dafür, dass ein Strom in der Richtung von oben nach unten die Wicklung durchflossen hat. Beim Oeffnen des Primärstromes erfolgt in schwächerem Grade eine gerade entgegengesetzte Ablenkung der Nadel, woraus wir schliessen, dass ein Strom in der Richtung nach oben geflossen ist. Oeffnet man aber den Hauptstrom in dem Augenblicke, wo die Nadel unter Einwirkung des Schlussinductionsstromes nach rechts abgelenkt ist, dann kann die Nadel durch einen starken Oeffnungsinductionsstrom ummagnetisirt werden, und dann dreht sie sich unter Einfluss der Erde so weit weiter rechts herum, dass gerade  $\frac{1}{2}$  Umdrehung vollendet wird. Folgen nun neue Inductionsströme, so wiederholt sich der Vorgang: Die Nadel kommt also in Rechtsrotation, deren Geschwindigkeit wieder durch Verstärken des erdmagnetischen Feldes sehr beträchtlich erhöht werden kann. Sind die Inductinsströme zu schwach oder das magnetische Feld gleich von Anfang an zu stark, dann bleibt die Nadel in ihrer Ausgangsstellung still stehen





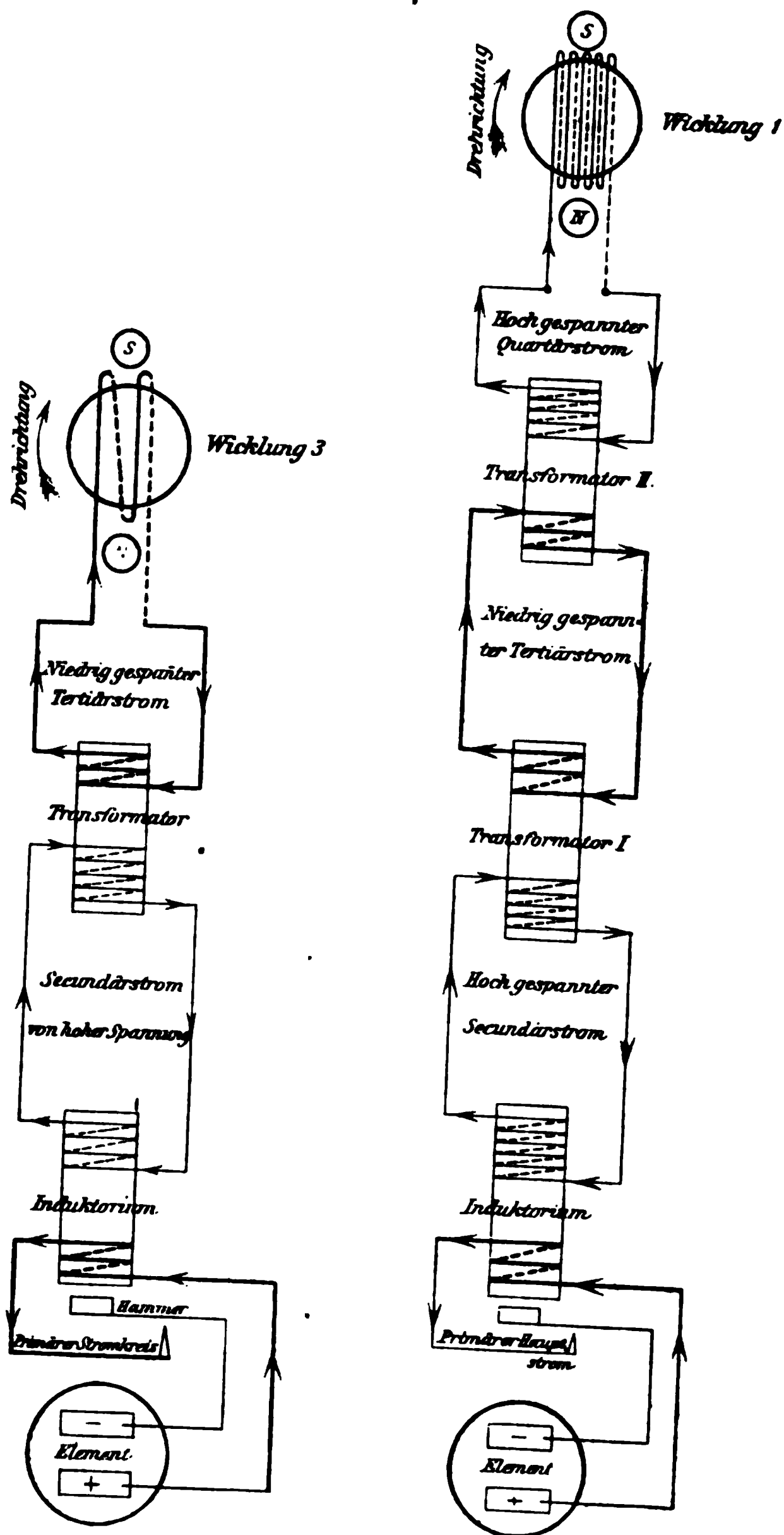


Fig. 5.











aus dieser Betrachtungen —, welches die Nadel in die Nordrichtung zu zwingen sucht und auf den Anker so wirkt, als auch er in der Nord-Südrichtung eine magnetische Axe anzeigt. Zweitens wirkt auf Nadel und Anker vorübergehendes Stromfeld, und zwar in der West-Ostrichtung. Die magnetischen Kräfte, welche in einem bestimmten Raume wirken, B. in der horizontalen Mittelebene des Galvanoskopes, in der sich die Nadel oder der Inductor befinden, kann man sich auf verhältnismässig einfache Weise bildlich darstellen, um eine Vorstellung von der Richtung und Dichtigkeit der Magnetkraftlinien zu gewinnen. Zu Fig. 7 sind diese Kraftlinien, nicht in unbegrenzter Zahl, sondern nur in einem passenden Verhältniss gezeichnet: Die magnetische Axe des constanten Feldes verläuft also in der Zeichnung senkrecht, die des Stromfeldes horizontal, die des combinirten Magnetstromfeldes S-förmig oder vielmehr S-förmig. Diese S-Form ist natürlich verschieden stark ausgeprägt zu denken je nach dem Verhältniss der Stärke des Magnetfeldes zu der des Stromfeldes, und wenn der Strom in entgegengesetzter Richtung fliessen würde, so würde diese Linie das Spiegelbild eines S darstellen.

Wenn der Strom geschlossen wird, dann dreht sich die magnetische Axe des constanten magnetischen Feldes, die in der Ausgangsstellung durch die gerade Linie  $N_1 S_1$  gekennzeichnet ist, links herum und bekommt einen S-förmigen Verlauf; und gleichzeitig nimmt die Zahl der Kraftlinien beträchtlich zu. Der umgekehrte Vorgang findet bei der Stromöffnung statt. Die Magnetnadel, welche gewöhnlich in der Richtung der grossen Axe magnetisch ist, stellt sich in einem magnetischen Felde immer so ein, dass ihre magnetische Axe mit der Axe dieses Feldes möglichst zusammenfällt: um also im Gleichgewicht zu sein, folgt sie in den Versuchen 1—5 den Bewegungen des magnetischen Feldes durch die bekannte Ablenkung nach links beim Schliessen des Stromes und rechtzeitige Rückkehr in die Ruhelage bei Stromöffnung. Da der Eigenmagnetismus der Nadel hierbei nicht wesentlich geändert wird, so zeigt uns die Ablenkung der Nadel gewissermaassen den Verlauf der magnetischen Axe des auf sie wirkenden Feldes an, und wir bekommen aus dem Grade der Ablenkung einen Ueberblick über das Verhältniss der Stärke des Strom-

Fig. 7.

Der Inductor aus weichem Eisen wird nun in diesen Fällen anders beeinflusst als die Nadel. Ist er frisch ausgeglüht, so zeigt er zunächst keinen Eigenmagnetismus; in das Feld des Stabmagneten gebracht erhält er bei  $N_1$  und  $S_1$











Bisher hatten wir den Anker bald unter Einfluss des constanten Feldes des permanenten Magneten mit der Axe  $N_1 S_1$ , bald unter Einfluss des combinirten Magnetstromfeldes mit der **S**-förmig gekrümmten Axe gesehen und gefunden, dass diesen Bewegungen der Axe bald der Inductor im ganzen, bald nur seine Molecüle folgen. Lassen wir nun durch den Draht des Galvanoskopes einen Wechselstrom gehen, dann würden die Axen der hierbei in Betracht kommenden Felder bald **S**-förmig, bald vertical, bald umgekehrt **S**-förmig verlaufen. Hat dieser Wechselstrom in der einen Richtung eine höhere elektromotorische Kraft als in der anderen, dann werden sich die Erscheinungen des Versuches 1 (bez. 6) mit denen der folgenden Versuche combiniren. In Versuch 13 kommt beim Schliessen des Elementenstromes zunächst das verhältnismässig schwache Magnetstromfeld zu stande, welches das Spiegelbild des Feldes in Versuch 1 darstellt, und dessen Axe etwa von  $S$  über  $N_5$   $MS_5$  nach  $N$  (diese Linie ist in Fig. 7 nicht ausgezeichnet worden) verlaufen würde. In diesem Felde dreht sich nun der Inductor einfach rechts herum; die Lage seiner magnetischen Axe zur Marke bleibt annähernd erhalten. Beim Oeffnen des Elementenstromes würde er sich um ebensoviel Grade wieder links herum drehen. Wird aber der Accumulatorstrom geschlossen gleich nach Ausschalten des Elementenstromes, dann kommt das verhältnismässig starke Magnetstromfeld des Versuches 2 mit der **S**-förmigen Axe zu stande, welches ja den Inductor in toto nur sehr wenig links herum dreht, dagegen aber die Molecüle im Innern des Eisens sehr stark beeinflusst, die magnetische Axe im Eisen also sehr stark gegen die Marke verschiebt. Dass auch hier eine geringe Tendenz des Inductors zur Linksdrehung vorhanden ist, habe ich in dem Versuche erwähnt. Aber diese Linksdrehung fällt aus, wenn die Dauer des Schliessens des Accumulatorstromes eine kurze ist. Wir sehen daher, wenn die Oeffnung des Accumulatorstromes dem Schliessen desselben rasch folgt, wiederum nur eine Rechtsdrehung des Inductors zu stande kommen.

Einen Wechselstrom von dieser Beschaffenheit bekommen wir aber sehr leicht auch aus einem Element, wenn wir nämlich im Nebenschluss zu der Wicklung des Galvanoskopes eine



## 5. *Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen;* *von Albert Einstein.*

Bezeichnen wir mit  $\gamma$  diejenige Menge mechanischer Arbeit, welche wir der Flüssigkeit zuführen müssen, um die freie Oberfläche um die Einheit zu vergrössern, so ist  $\gamma$  nicht etwa die gesamte Energiezunahme des Systems, wie folgender Kreisprocess lehrt. Sei eine bestimmte Flüssigkeitsmenge vorliegend von der (absoluten) Temperatur  $T_1$  und der Oberfläche  $O_1$ . Wir vermehren nun isothermisch die Oberfläche  $O_1$  auf  $O_2$ , erhöhen die Temperatur auf  $T_2$  (bei constanter Oberfläche), vermindern dann die Oberfläche auf  $O_1$  und kühlen dann die Flüssigkeit wieder auf  $T_1$  ab. Nimmt man nun an, dass dem Körper ausser der ihm vermöge seiner specifischen Wärme zukommenden keine andere Wärmemenge zugeführt wird, so ist bei dem Kreisprocess die Summe der dem Körper zugeführten Wärme gleich der Summe der ihm entnommenen. Es muss also nach dem Princip von der Erhaltung der Energie auch die Summe der zugeführten mechanischen Arbeiten gleich Null sein.

Es gilt also die Gleichung:

$$(O_2 - O_1)\gamma_1 - (O_2 - O_1)\gamma_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

Dies widerspricht aber der Erfahrung.

Es bleibt also nichts anderes übrig als anzunehmen, dass mit der Aenderung der Oberfläche auch ein Austausch der Wärme verbunden sei, und dass der Oberfläche eine eigene specifische Wärme zukomme. Bezeichnen wir also mit  $U$  die Energie, mit  $S$  die Entropie der Oberflächeneinheit der Flüssigkeit, mit  $s$  die specifische Wärme der Oberfläche, mit  $w_0$  die zur Bildung der Oberflächeneinheit erforderliche Wärme in mechanischem Maass, so sind die Grössen:

$$dU = s \cdot O \cdot dT + \{\gamma + w_0\} dO$$

und

$$dS = \frac{s \cdot O \cdot dT}{T} + \frac{w_0}{T} dO$$

vollständige Differentiale. Es gelten also die Gleichungen:

also: Der Oberflächenspannung als solcher ist kein Wärmeinhalt beizuschreiben, sondern die Energie der Oberfläche ist potentieller Natur. Man sieht schon jetzt, dass

$$\gamma = T \frac{d\gamma}{dT}$$

eine zu stöchiometrischen Untersuchungen sich geeignetere Grösse ist, als das bisher benutzte  $\gamma$  bei Siedetemperatur. Die Thatsache, dass die zur Bildung der Flächeneinheit erforderliche Energie kaum mit der Temperatur variirt, lehrt uns aber auch, dass die Configuration der Moleküle in der Oberflächenschicht mit der Temperatur nicht variiren wird (abgesehen von Änderungen von der Grössenordnung der thermischen Ausdehnung).

Um nun für die Grösse

$$\gamma = T \frac{d\gamma}{dT}$$

eine stöchiometrische Beziehung aufzufinden, ging ich von den einfachsten Annahmen über die Natur der molecularen An-



ziehungskräfte aus, und prüfte deren Consequenzen auf ihre Uebereinstimmung mit dem Experiment hin. Ich liess mich dabei von der Analogie der Gravitationskräfte leiten.

Sei also das relative Potential zweier Molecüle von der Form:

$$P = P_{\infty} - c_1 \cdot c_2 \cdot \varphi(r),$$

wobei  $c$  eine für das betreffende Molecül charakteristische Constante ist,  $\varphi(r)$  aber eine vom Wesen der Molecüle unabhängige Function ihrer Entfernung. Wir nehmen ferner an, dass

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n c_{\alpha} c_{\beta} \varphi(r_{\alpha, \beta})$$

der entsprechende Ausdruck für  $n$  Molecüle sei. Sind speciell alle Molecüle gleich beschaffen, so geht dieser Ausdruck in

$$\frac{1}{2} c^2 \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \varphi(r_{\alpha, \beta})$$

über. Wir machen ferner noch die Annahme, dass das Potential der Molecularkräfte ebenso gross sei, wie wenn die Materie homogen im Raume verteilt wäre; es ist dies allerdings eine Annahme, von der wir nur angenähert die Richtigkeit erwarten dürfen. Mit ihrer Hülfe verwandelt sich der obige Ausdruck in:

$$P = P_{\infty} - \frac{1}{2} c^2 N^2 \iint d\tau \cdot d\tau' \varphi(r_{d\tau, d\tau'}),$$

wobei  $N$  die Anzahl der Molecüle in der Volumeneinheit ist. Ist das Molecül unserer Flüssigkeit aus mehreren Atomen zusammengesetzt, so soll analog wie bei den Gravitationskräften  $c = \sum c_{\alpha}$  gesetzt werden können, wobei die  $c_{\alpha}$  den Atomen der Elemente charakteristische Zahlen bedeuten. Setzt man noch  $1/N = v$ , wobei  $v$  das Molecularvolum bedeutet, so erhält man die endgültige Formel:

$$P = P_{\infty} - \frac{1}{2} \frac{(\sum c_{\alpha})^2}{v^2} \iint d\tau \cdot d\tau' \varphi(r_{d\tau, d\tau'}).$$

Setzen wir nun noch voraus, dass die Dichte der Flüssigkeit bis zu deren Oberfläche constant ist, was ja durch die Thatsache wahrscheinlich gemacht wird, dass die Energie der Oberfläche von der Temperatur unabhängig ist, so sind wir nun im stande die potentielle Energie der Volumeneinheit im

Inneren der Flüssigkeit und die der Oberflächeneinheit zu berechnen.

Setzen wir nämlich

$$\frac{1}{2} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=-\infty}^{+\infty} dx dy dz \cdot \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = K,$$

so ist die potentielle Energie der Volumeneinheit

$$P = P_{\infty} - K \frac{(\sum c_a)^2}{v^2}.$$

Denken wir uns eine Flüssigkeit vom Volumen  $V$  und von der Oberfläche  $S$ , so erhalten wir durch Integration

$$P = P_{\infty} - K \frac{(\sum c_a)^2}{v^2} \cdot V - K' \frac{(\sum c_a)^2}{v^2} \cdot O,$$

wobei die Constante  $K'$  bedeutet:

$$\int_{x'=0}^{x'=1} \int_{y'=0}^{y'=1} \int_{z'=0}^{z'=0} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{z=0}^{z=\infty} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz' \cdot \varphi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Da über  $\varphi$  nichts bekannt ist, bekommen wir natürlich keine Beziehung zwischen  $K$  und  $K'$ .

Dabei ist zunächst im Auge zu behalten, dass wir nicht wissen können, ob das Flüssigkeitsmolecül nicht die  $n$ -fache Masse des Gasmolecüles besitzt, doch folgt aus unserer Herleitung, dass dadurch unser Ausdruck der potentiellen Energie der Flüssigkeit nicht geändert wird. Für die potentielle Energie der Oberfläche bekommen wir, auf Grund der eben gemachten Annahme, den Ausdruck:

$$P = K' \frac{(\sum c_a)^2}{v^2} = \gamma - T \frac{d\gamma}{dT},$$

oder

$$\sum c_a = v \cdot \sqrt{\gamma - T \frac{d\gamma}{dT} \cdot \frac{1}{\sqrt{K'}}}.$$

Da die rechts stehende Grösse für Siedetemperatur für viele Stoffe aus den Beobachtungen von R. Schiff berechenbar ist, so bekommen wir reichlichen Stoff zur Bestimmung der Grössen  $c_a$ . Ich entnahm das gesamte Material dem Buch

Allgemeine Chemie von W. Ostwald. Ich gebe hier zu-  
das Material an, mittels dessen ich das  $c_a$  für C, H, O  
der Methode der kleinsten Quadrate berechnete. In der  
c<sub>a</sub><sub>ber.</sub> überschriebenen Columne sind die  $\sum c_a$  angegeben,  
e mit Hülfe der so gewonnenen  $c_a$  aus den chemischen  
In sich ergeben. Isomere Verbindungen wurden zu einem  
vereinigt, weil die ihnen zugehörigen Werte der linken  
nur unbedeutend voneinander abwichen. Die Einheit  
willkürlich gewählt, weil, da  $K'$  unbekannt ist, eine ab-  
Bestimmung der  $c_a$  nicht möglich ist.

ch fand:

$$c_H = -1,6, \quad c_C = 55,0, \quad c_O = 46,8.$$

|   | $\sum c_a$ | $\sum c_{a_{ber.}}$ | Name der Verbindung            |
|---|------------|---------------------|--------------------------------|
|   | 510        | 524                 | Citronenterpen                 |
|   | 140        | 145                 | Ameisensäure                   |
|   | 193        | 197                 | Essigsäure                     |
|   | 250        | 249                 | Propionsäure                   |
|   | 309        | 301                 | Buttersäure und Isobuttersäure |
|   | 365        | 352                 | Valeriansäure                  |
|   | 350        | 350                 | Acetanhydrid                   |
|   | 505        | 501                 | Aethyloxalat                   |
|   | 494        | 520                 | Methylbenzoat                  |
|   | 553        | 562                 | Aethylbenzoat                  |
|   | 471        | 454                 | Acetessigäther                 |
|   | 422        | 419                 | Anisol                         |
|   | 479        | 470                 | Phenetol und Methylcresolat    |
|   | 519        | 517                 | Dimethylresorcin               |
|   | 345        | 362                 | Furfurol                       |
|   | 348        | 305                 | Valeraldehyd                   |
| O | 587        | 574                 | Carvol                         |

Man sieht, dass die Abweichungen in fast allen Fällen die  
chsfehler wohl kaum übersteigen und keinerlei Gesetz-  
zkeit zeigen.

Hierauf berechnete ich gesondert die Werte für Cl, Br  
, welchen Bestimmungen natürlich eine geringere Sicher-  
ukommt, und fand:

$$c_{Cl} = 60, \quad c_{Br} = 152, \quad c_J = 198.$$

ch lasse nun in gleicher Weise wie oben das Material  
l:

| Formel                             | $\sum c_a$ | $\sum c_{a_{\text{ber.}}}$ | Name der Verbindung |
|------------------------------------|------------|----------------------------|---------------------|
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$    | 385        | 379                        | Chlorbenzol         |
| $\text{C}_7\text{H}_7\text{Cl}$    | 438        | 434                        | Chlortoluol         |
| $\text{C}_7\text{H}_7\text{Cl}$    | 450        | 434                        | Benzylchlorid       |
| $\text{C}_3\text{H}_5\text{OCl}$   | 270        | 270                        | Epichlorhydrin      |
| $\text{C}_2\text{OHCl}_2$          | 358        | 335                        | Chloral             |
| $\text{C}_7\text{H}_5\text{OCl}$   | 462        | 484                        | Benzoylchlorid      |
| $\text{C}_7\text{H}_6\text{Cl}_2$  | 492        | 495                        | Benzylidenchlorid   |
| $\text{Br}_2$                      | 217        | 304                        | Brom                |
| $\text{C}_2\text{H}_5\text{Br}$    | 251        | 254                        | Aethylbromid        |
| $\text{C}_3\text{H}_7\text{Br}$    | 311        | 306                        | Propylbromid        |
| $\text{C}_3\text{H}_7\text{Br}$    | 311        | 306                        | Isopropylbromid     |
| $\text{C}_3\text{H}_5\text{Br}$    | 302        | 309                        | Allylbromid         |
| $\text{C}_4\text{H}_9\text{Br}$    | 353        | 354                        | Isobutylbromid      |
| $\text{C}_5\text{H}_{11}\text{Br}$ | 425        | 410                        | Isoamylbromid       |
| $\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$    | 411        | 474                        | Brombenzol          |
| $\text{C}_7\text{H}_7\text{Br}$    | 421        | 526                        | o-Bromtoluol        |
| $\text{C}_2\text{H}_4\text{Br}_2$  | 345        | 409                        | Aethylenbromid      |
| $\text{C}_3\text{H}_6\text{Br}_2$  | 395        | 461                        | Propylenbromid      |
| $\text{C}_2\text{H}_5\text{J}$     | 288        | 300                        | Aethyljodid         |
| $\text{C}_3\text{H}_7\text{J}$     | 343        | 352                        | Propyljodid         |
| $\text{C}_3\text{H}_7\text{J}$     | 357        | 352                        | Isopropyljodid      |
| $\text{C}_3\text{H}_5\text{J}$     | 338        | 355                        | Allyljodid          |
| $\text{C}_4\text{H}_9\text{J}$     | 428        | 403                        | Isobutyljodid       |
| $\text{C}_5\text{H}_{11}\text{J}$  | 464        | 455                        | Isoamyljodid        |

Es scheint mir, dass grössere Abweichungen von unserer Theorie bei solchen Stoffen eintreten, welche verhältnismässig grosse Molecularmaasse und kleines Molecularvolum haben.

Wir haben aus unseren Annahmen gefunden, dass die potentielle Energie der Volumeneinheit den Ausdruck besitzt:

$$P = P_x - K \left( \sum \frac{c_a}{r^2} \right)^2,$$

dabei bedeutet  $K$  eine bestimmte Grösse, welche wir aber nicht berechnen können, da es überhaupt erst durch die Wahl der  $c_a$  vollkommen definiert wird. Wir können daher  $K = 1$  setzen und gewinnen so eine Definition für die absoluten Werte der  $c_a$ . Berücksichtigen wir dies von nun an, so erhalten wir für die Grösse des Potentials, welche dem Aequivalent (Molekül) zukommt, den Ausdruck:

$$P = P_x - K \left( \sum \frac{c_a}{r} \right)^2,$$

wobei natürlich  $P_\infty$  eine andere Constante bedeutet. Nun könnten wir aber das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung der Differenz  $D_m J - A v_d$  gleich setzen — wobei  $D_m$  die moleculare Verdampfungswärme (Dampfwärme  $\times$  Molecularmasse),  $J$  das mechanische Aequivalent der Calorie,  $A$  den Atmosphärendruck in absolutem Maass und  $v_d$  das Molecularvolum des Dampfes ist —, wenn die potentielle Energie des Dampfes Null wäre und wenn für Siedetemperatur der Inhalt an kinetischer Energie beim Uebergang vom flüssigen in den Gaszustand ungeändert bliebe. Die erste dieser Annahmen scheint mir unbedenklich. Da wir aber zu der letzteren Annahme keinen Grund haben, aber auch keine Möglichkeit die fragliche Grösse abzuschätzen, so bleibt uns nichts anderes übrig, als die obige Grösse selbst zur Rechnung zu benutzen.

In die erste Spalte der folgenden Tabelle habe ich die Grössen  $\sqrt{D'_m \cdot v}$  im Wärmemaass eingetragen, wobei  $D'_m$  die um die äussere Verdampfungsarbeit (in Wärmemaass) verminderte Verdampfungswärme bedeutet. In die zweite setze ich die Grössen  $\sum c_a$ , wie sie aus den Capillaritätsversuchen ermittelt sind; in der dritten finden sich die Quotienten beider Werte. Isomere Verbindungen sind wieder zu einer Zeile vereinigt.

| Name der Verbindung | Formel            | $\sqrt{D'_m \cdot v}$ | $\sum c_{a\text{ber.}}$ | Quotient |
|---------------------|-------------------|-----------------------|-------------------------|----------|
| Isobutylpropionat   | $C_7H_{14}O_2$    | 1157                  | 456                     | 2,54     |
| Isoamilacetat       | „                 |                       |                         |          |
| Propylacetat        | „                 |                       |                         |          |
| Isobutylisobutytrat | $C_8H_{16}O_2$    | 1257                  | 510                     | 2,47     |
| Propylvalerat       | „                 |                       |                         |          |
| Isobutylbutytrat    | „                 |                       |                         |          |
| Isoamylpropionat    | „                 |                       |                         |          |
| Isoamylisobutytrat  | $C_9H_{18}O_2$    | 1367                  | 559                     | 2,45     |
| Isobutylvalerat     | „                 |                       |                         |          |
| Isoamylvalerat      | $C_{10}H_{20}O_2$ | 1464                  | 611                     | 2,51     |
| Benzol              | $C_6H_6$          | 795                   | 310                     | 2,57     |
| Toluol              | $C_7H_8$          | 902                   | 372                     | 2,48     |
| Aethylbenzol        | $C_8H_{10}$       | 1005                  | 424                     | 2,37     |
| m-Xylol             | „                 |                       |                         |          |
| Propylbenzol        | $C_9H_{12}$       | 1122                  | 475                     | 2,36     |
| Mesitylen           | „                 |                       |                         |          |
| Cymol               | $C_{10}H_{14}$    | 1213                  | 527                     | 2,30     |
| Aethylformiat       | $C_8H_8O_2$       | 719                   | 249                     | 2,89     |
| Methylacetat        | „                 |                       |                         |          |

cator ergibt sich im Mittel:

$$2,51 \cdot \sqrt{4,17 \cdot 10^7} = 1,62 \cdot 10^4.$$

Da die vorbergehende Betrachtung zeigt, dass sich bei der Verdampfung die kinetischen Verhältnisse der Moleküle verändern (wenigstens wenn unser Ausdruck für die potentielle Energie richtig ist), unternahm ich es die absolute Grösse  $c$ , noch auf eine andere Weise aufzusuchen. Dabei ging ich von der folgenden Idee aus:

Comprimirt man eine Flüssigkeit isothermisch und ändert sich dabei ihr Wärmeinhalt nicht, was wir nun voraussetzen wollen, so ist die bei der Compression entweichende Wärme gleich der Summe der Compressionsarbeit und der von den Molecularkräften geleisteten Arbeit. Wir können also letztere Arbeit berechnen, wenn wir die bei der Compression entweichende Wärmemenge eruiiren können. Dazu aber verhilft uns das Carnot'sche Princip.

Sei nämlich der Zustand der Flüssigkeit durch den Druck  $p$  in absoluten Einheiten und die absolute Temperatur  $T$  bestimmt; ist nun bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung  $dQ$  die dem Körper zugeführte Wärme in absolutem Maass,  $dA$  die ihm zugeführte mechanische Arbeit, und setzen wir

$$dQ = X dp + S . dT,$$

$$\begin{aligned} dA &= -p . dv = -p \left\{ \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial T} dT \right\} \\ &= p . v . \kappa dp - p . v . \alpha dT, \end{aligned}$$

so liefert uns die Bedingung, dass  $dQ/T$  und  $dQ + dA$  vollständige Differentiale sein müssen, die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{X}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{S}{T} \right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial T} (X + p \kappa) = \frac{\partial}{\partial p} (S - p \alpha)$$

hierbei bedeuten, wie man sieht,  $X$  die bei isothermischer Compression durch den Druck  $p = 1$  dem Körper zugeführte Wärme in mechanischem Maass,  $S$  die specifische Wärme bei constantem Druck,  $\kappa$  den Compressibilitätscoefficienten,  $\alpha$  den thermischen Ausdehnungscoefficienten. Aus diesen Gleichungen findet man:

$$X dp = -T \left\{ \alpha + p \frac{\partial \alpha}{\partial p} + p \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right\} dp.$$

Nun ist daran zu erinnern, dass der Atmosphärendruck, unter dem sich unsere Körper gewöhnlich finden, für Compressionserscheinungen von Flüssigkeiten unbedenklich als unendlich klein zu betrachten ist; ebenso sind die Compressionen in unseren Experimenten sehr nahe proportional den angewandten Compressionskräften. Die Erscheinungen gehen also so vor sich, wie wenn die Compressionskräfte unendlich klein wären. Berücksichtigt man dies, so geht unsere Gleichung über in:

$$X . dp = -T . \alpha . dp.$$

Wenden wir nun die Voraussetzung an, dass bei isothermischer Compression die kinetische Energie des Systems nicht geändert wird, so erhalten wir die Gleichung

$$X . dp + \text{Compressionsarbeit} + \text{Arbeit der Molecularkräfte} = 0.$$





ein moleculares Anziehungsfeld, welches unabhängig von der Temperatur und unabhängig von der Art ist, wie das Atom mit anderen Atomen chemisch verbunden ist.

Schliesslich ist noch darauf hinzuweisen, dass mit steigendem Atomgewicht im allgemeinen auch die Constanten  $c_a$  steigen, doch nicht stets und nicht in proportionaler Art. Die Frage, ob und wie unsere Kräfte mit den Gravitationskräften verwandt sind, muss also noch vollkommen offen gelassen werden. Es ist auch hinzuzufügen, dass die Einführung der Function  $\varphi(r)$ , welche unabhängig von der Natur der Molecüle sein sollte, nur eine Näherungsannahme aufzufassen ist, ebenso die Ersetzung der Summen durch Integrale; in der That scheint sich unsere Theorie für Stoffe von kleinem Atomvolum nicht zu bewähren, wie das Beispiel des Wassers darthut. Ueber diese Fragen sind erst von eingehenden Specialforschungen Aufschlüsse zu hoffen.

Zürich, den 13. December 1900.

(Eingegangen 16. December 1900.)



das dunkle Gesichtsfeld bei gekreuzter Stellung der Nicol'schen Prismen auf, und zwar um so mehr, je feiner und je zahlreicher die Partikelchen im trüben Medium sind, weil durch die vollkommen unregelmässige Orientirung der vielen Brechungs- und Reflexionsflächen die Polarisations Ebenen verschiedener Strahlen um verschieden grosse Winkel gedreht werden.

Allerdings bleibt beim Drehen von Schichten trüber Medien das Gesichtsfeld bei gekreuzten Nicols unverändert hell, während O. Lehmann angiebt, dass die fraglichen trüben Flüssigkeiten deutliche Auslöschungsrichtungen besitzen, und folglich die Structur eines Krystalles besitzen. Das Vorhandensein solcher Auslöschungsrichtungen ist nicht abzuleugnen. Beim Drehen einer Schicht der trüben Schmelze sieht man in der That, dass dunkle Teile des Gesichtsfeldes hell und helle Teile dunkel werden. Merkwürdigerweise ist die Verteilung der hellen und dunklen Felder wenig veränderlich, sie ändert sich bei erheblichen und schnellen Temperaturänderungen nicht, und ändert sich sogar nicht, wenn das Deckgläschen hin und her bewegt wird, wodurch die Flüssigkeit in heftige Bewegung gerät. Daraus folgt, dass der Wechsel der Helligkeit der verschiedenen Felder beim Drehen des Präparates zwischen gekreuzten Nicols nicht durch Doppelbrechung, die der Flüssigkeit, dem sogenannten flüssigen Krystall, eigentümlich ist, bewirkt wird, sondern es haften die die angebliche Doppelbrechung der trüben Flüssigkeit verursachenden Partikelchen an den Flächen des Object- und des Deckgläschens.

O. Lehmann selbst sagt im Capitel „Adsorption flüssiger Krystalle“<sup>1)</sup>: „Befinden sich kleine undurchsichtige Stäubchen in der Flüssigkeit (im trüben geschmolzenen p-Azoxyanisol), so geraten sie in Bewegung, wie in jeder anderen Flüssigkeit, ohne dass die Figur im mindesten gestört wird, reiben sie aber auf den Glasflächen, so wird dort die Figur weggenommen.“

Eine der trüben Flüssigkeit selbst eigentümliche Doppelbrechung ist also *nicht* erwiesen.

Schliesslich scheinen auch die Erscheinungen, die man beim Klarwerden der trüben Schmelzen sehr deutlich beobachten kann, nicht zu Gunsten einer krystallinen Beschaffenheit

---

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 41. p. 528 — 531. Figg. 1 u. 2. 1890.



zusammenfallen, oder die genügend gereinigten Krystalle unmittelbar zu klaren Flüssigkeiten schmelzen. Zur Aufklärung hierüber wurden einige Versuche angestellt, aus denen mir die Möglichkeit jener Trennung zu folgen scheint, doch ist dieselbe nicht vollständig durchgeführt worden.

Das zu diesen Versuchen angewandte p-Azoxyanisol war aus käuflichem p-Nitrophenetol nach der Vorschrift von R. Schenck (l. c.) von Hrn. A. Bogojawlensky dargestellt und durch 6 maliges Umkrystallisiren aus Aethylalkohol gereinigt, es schmolz bei  $116^{\circ}$ , und bei  $135^{\circ}$  wurde die Schmelze klar. R. Schenk fand die Punkte  $114^{\circ}$  und  $134,1^{\circ}$  und G. A. Hulett  $118,3^{\circ}$  und  $135,9^{\circ}$ .

Schmilzt man etwas grössere Mengen von p-Azoxyanisol (gegen 20 g), so bemerkt man, dass, wenn beim Abkühlen die klare Flüssigkeit sich trübt, aus derselben sich makroskopische schwarzbraune Tröpfchen abscheiden, die schnell zu Boden fallen, und beim Erwärmen sich wieder lösen. Sorgt man dafür, dass die schwarzen Tröpfchen in den untersten Teil des zu einer Spitze ausgezogenen Schmelzrohres fallen, so haben sich nach 3 maligem Klarwerden und Abkühlen gegen 0,05 g des braunschwarzen Stoffes ausgeschieden, wodurch die trübe Schmelze eine etwas heller gelbe Farbe erhalten hat, und die Temperatur des Klarwerdens um  $0,2^{\circ}$  gesunken ist. Bei weiteren Wiederholungen des Erwärmens und Abkühlens finden nur sehr geringe Abscheidungen statt.

Darauf wurde die trübe Schmelze durch eine scharf getrocknete, bacteriendichte, Pukall'sche Thonzelle dreimal filtrirt, wodurch die Farbe des Filtrates bedeutend heller gelb wurde, und die Temperatur des Klarwerdens um  $0,5^{\circ}$  sank. Weitere 3 malige Filtration blieb ohne Einfluss auf die Eigenschaften des Präparates, ebenso zwei Minuten langes Centrifugiren der trüben Schmelze. Mehrfaches Umkrystallisiren aus der Schmelze, ebenso vielfaches Umkrystallisiren aus Aethylalkohol, Chloroform und Eisessig waren, weil offenbar der braune Stoff immer wieder in die vollkommen klaren Krystalle mit eingeht, ohne Einfluss auf die Temperatur des Klarwerdens.

Es blieb also nur noch übrig die Destillation zu versuchen, dieselbe wurde von Hrn. T. Rotarski mit folgenden Resultaten ausgeführt.



werdens um  $6,5^{\circ}$  bei der Destillation mit überhitztem Wasserdampf durch Befreiung des p-Azoxyanisols vom braunen Stoff verursacht wurde. Bevor man aber betreffs der Natur der sogenannten flüssigen Krystalle zu einem endgültigen Schluss kommt, hätte man noch zu beweisen, dass sich die Temperatur des Klarwerdens der Destillate bei mehrfacher Krystallisation nicht ändert. Es wird das nicht schwierig sein, wenn man die Versuche, die in kleinem Maassstabe angestellt sehr zeitraubend sind (bei  $130^{\circ}$  destilliren in 12 Stunden 0,3 g p-Azoxyanisol), in grösseren Apparaten ausführt. Sollte es gelingen auf diesem Wege p-Azoxyanisol, das sofort zu einer klaren Flüssigkeit schmilzt, herzustellen, so hätte die künstliche Herstellung von sogenannten flüssigen Krystallen desselben von beliebigen Schmelzpunkten zwischen  $118-135^{\circ}$  keinerlei Schwierigkeiten.

4. Auch die trübe Schmelze des Cholesterylbenzoats hat O. Lehmann für einen flüssigen Krystall erklärt. Nach den mikroskopischen Befunden O. Lehmann's und anderer, als auch nach dem sonstigen Verhalten des Stoffs, scheinen mir Zweifel an der chemischen Homogenität der untersuchten Präparate nicht zurückzuweisen zu sein. Vor allem differiren die Schmelzpunkte der verschiedenen Präparate sehr erheblich. Reinitzer fand den Schmelzpunkt zu  $146,6^{\circ}$  und die Trübung der Schmelze verschwand bei  $180,6^{\circ}$ . G. Quincke sah die Trübung bei seinem von H. Landolt erhaltenen Präparat schon bei  $159^{\circ}$  verschwinden. Ein Präparat, das aus Cholesterin von E. Merck hergestellt wurde, schmolz bei  $145^{\circ}$  und wurde zwischen  $162-167^{\circ}$  klar, indem die Trübung sich, trotz gleichmässiger Badtemperatur, an verschiedenen Stellen verschieden lange erhielt. Die grosse Verschiedenheit in dem Verhalten beim Schmelzen verschiedener Präparate rührt wohl daher, dass mit dem Namen Cholesterin Stoffe verschiedenen Ursprunges: aus der Galle, dem Wollfett etc., bezeichnet werden, die offenbar untereinander nicht identisch sind. Dazu kommt noch, dass das Cholesterin optisch activ ist, also in mehreren schwer zu trennenden Isomeren vorkommen kann. Will man chemisch homogene Stoffe untersuchen, so eignet sich hierzu am wenigsten das Cholesterylbenzoat.

In der Schmelze meines Präparates sieht man bei genügend geringer Dicke der Schicht, beige gekreuzten Nicols und 200facher Ver-





✓

**7. Ueber einige Versuche  
mit Becquerel- und mit Röntgenstrahlen;  
von F. Himstedt.**

(Aus den Ber. d. Naturf. Gesellsch. zu Freiburg i. Br. XI. p. 126. 1900.)

---

Hr. Giesel hatte die Freundlichkeit, mir eins seiner wirksamen Radiumpräparate zu leihen. Ich habe bei Gelegenheit zweier Vorträge einem grösseren Auditorium mit Hülfe dieses Präparates sehr bequem zeigen können: 1. das Leuchten der Substanz, 2. die Erregung des Baryum-Platinocyanür-Schirmes auch dann, wenn das Radium in eine Schachtel aus 0,5 mm dickem Eisenblech eingeschlossen war<sup>1)</sup>, 3. die Erregung der Phosphorescenz von Sidot-Blende sowohl wie von anderen Substanzen, 4. die Einwirkung auf das Elektroskop durch die Wände der Eisenschachtel hindurch auf eine Entfernung von über 5 m, 5. den Einfluss auf die Funkenstrecke einer Elektrisirmaschine. Für diesen Versuch wurde bei einer Voss'schen Influenzmaschine die Funkenstrecke auf ca. 6 cm gestellt und der treibende Motor so regulirt, dass gerade noch Funken übergingen. Brachte man das Radium nun dicht unter die Kugeln der Funkenstrecke, so hörten die Funken auf. Die Wirkung liess sich viel leichter demonstrieren, als die Kugel der Kathode, wie dies Elster und Geitel<sup>2)</sup> angegeben haben, durch eine grössere Scheibe ersetzt wurde. Bei einem Scheibendurchmesser von 30 cm konnte man die Maschine so schnell laufen lassen wie überhaupt möglich, wobei in der Secunde 2—3 Funken von 8 cm Länge übersprangen. Sobald das

1) Im Dunkelzimmer, mit gut ausgeruhtem Auge, konnte man die Fluorescenzerrregung des Schirmes durch eine 1 cm dicke Bleischicht noch sehr gut sehen.

2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 69. p. 673. 1899.



langsamen Schwächen des Stromes sah man den Fleck von der Seite her wieder in seine alte Lage kommen.

Man hat, soviel mir bekannt, den Energieaufwand für die beständige Strahlung des Radiums herzuleiten gesucht aus einem langsam verlaufenden chemischen Prozesse. Es schien mir deshalb von besonderem Interesse, den Einfluss tiefer Temperaturen auf die Radioaktivität des Präparates zu untersuchen. Die Herren Hagenbach und Kahlbaum in Basel hatten die Freundlichkeit, die hierzu nötige flüssige Luft herstellen zu lassen und selbst an den Beobachtungen teil zu nehmen. Es konnte keine Abnahme, weder in der Leuchtkraft, noch in der Erregung des Fluoreszenzschirmes beobachtet werden. Belichtete Balmain'sche Leuchtfarbe, mit der ein Controlversuch ausgeführt wurde, erschien bei der Temperatur der flüssigen Luft vollkommen dunkel.

Um den Einfluss der Abkühlung auf die Fähigkeit des Radiums, das Elektroskop zu entladen, zu untersuchen, wurde die folgende Anordnung benutzt. Der Knopf eines Exner'schen Elektroskopes war durch einen Draht verbunden mit einer isolierten horizontal aufgestellten Metallplatte von 6 cm Durchmesser. Unter dieser wurde ein in Watte verpacktes Becherglas aufgestellt, in welches das in eine Glasröhre eingeschlossene Radium gebracht werden konnte. Es wurde beobachtet die Zeit, während welcher das Elektroskop von 2000 auf 1000 Volt entladen wurde. Bei Zimmertemperatur gaben hierfür drei Versuche übereinstimmend 31 Secunden. Nachdem jetzt das Becherglas mit flüssiger Luft gefüllt und genügend lange gewartet war, ergaben sich 33, 35, 34, 35 Secunden. Hinterher ergaben die Versuche in Zimmertemperatur wieder 31 Secunden.

Aus dieser Differenz von ca. 3 Secunden, deren thatsächliches Vorhandensein durch eine neue Versuchsreihe festgestellt wurde, darf man jedoch noch nicht den Schluss ziehen, dass die Abkühlung auf eine tiefe Temperatur die Radioaktivität entsprechend vermindert hätte. Man darf nicht ausser acht lassen, dass bei der gewählten Versuchsanordnung die Strahlen vom Radium zum Elektroskope das eine Mal durch gasförmige, das zweite Mal durch flüssige Luft gehen, und dass letztere, entsprechend ihrer bedeutend grösseren Dichte, auch stärkere



Da die Becquerelstrahlen durch undurchsichtige Substanzen hindurchgehen, so war es von vornherein sehr wahrscheinlich, dass Blinde, deren Sehvermögen dadurch verloren gegangen ist, dass die Hornhaut oder die Linse des Auges getrübt ist, trotzdem unter der Einwirkung der Becquerelstrahlen eine Lichtempfindung haben würden. Versuche an einer grösseren Anzahl von Personen haben dies durchaus bestätigt.

Zum Schlusse möchte ich noch erwähnen, dass es mir nicht gelungen ist, irgend eine Wirkung des Radiums auf den Cohärer nachzuweisen, dagegen habe ich ohne Schwierigkeiten zeigen können, dass der Widerstand der Selenzelle durch die Einwirkung der Becquerelstrahlen herabgesetzt wird. Bei diesen Versuchen war das Radium in eine mehrfache Hülle lichtdichten photographischen Papiere eingeschlossen, bei einigen Versuchen befand es sich auch in einer Eisenschachtel von 0,5 mm Wandstärke, sodass die Wirkung sichtbarer Strahlen mit voller Sicherheit ausgeschlossen war. Es wurde hierauf mit grosser Sorgfalt geachtet, weil durch Vorversuche festgestellt war, dass alle phosphorescirenden Substanzen den Widerstand der Selenzelle bei directer Bestrahlung herabzusetzen vermögen, durch lichtdichtes Papier hindurch jedoch keinerlei Wirkung ausüben. Die Widerstandsverminderung der Selenzelle durch das Radium betrug, wenn letzteres durch eine doppelte Hülle lichtdichten Papiers und eine ca. 1 cm dicke Luftschicht hindurch wirkte, ca. 1 Proc. und liess sich mit der Wheatstone'schen Brücke sehr sicher messen.

Ich habe bei dieser Gelegenheit dann weiter constatirt, dass Röntgenstrahlen sehr energisch auf die Selenzelle wirken. Ich konnte den Widerstand der Zelle durch Röntgenstrahlen um mehr als 50 Proc. vermindern. Ich hoffe, dass sich hieraus eine Methode ergeben wird, welche in bequemer Weise die Intensität der Röntgenstrahlen zu messen, resp. die Strahlung verschiedener Röhren unter verschiedenen Umständen zu vergleichen gestattet. Ebenso wie die Röntgenstrahlen vermögen nach meinen Versuchen aber auch die ultravioletten Strahlen den Widerstand der Selenzelle zu verkleinern, dagegen nicht die ultraroten Strahlen. Es liegt bei der übereinstimmenden Wirkung der ultravioletten, der Röntgen- und der Becquerel-

1991年12月15日

## 8. Ueber die Einwirkung der Becquerel- und der Röntgenstrahlen auf das Auge;

von F. Himstedt und W. A. Nagel.

(Aus den Ber. d. Naturf. Gesellsch. in Freiburg i. B. XI. p. 189. 1901.)

Hr. Giesel<sup>1)</sup> hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn man ein Radiumpräparat, in lichtdichtes Papier eingeschlossen, auf das Auge legt, man die Empfindung hat, als sei das ganze Auge mit schwachem Licht angefüllt. Als wir Gelegenheit hatten, mit einem besonders wirksamen Präparate, das Hr. Giesel dem einen von uns freundlichst geliehen hatte, diesen interessanten Versuch zu wiederholen, schien es uns der Mühe wert, näher zu untersuchen, in welcher Weise diese Wirkung zu stande kommt.

Verschiedene Möglichkeiten mussten in Betracht gezogen werden. Es konnte sich um directe Erregung des Sehnerven bez. seiner Endausbreitung im Auge handeln; da die Becquerelstrahlen bekanntlich Knochen und Weichteile durchdringen, steht ihnen der Weg zum Sehnerven ja auch frei, wenn das sie aussendende Radiumpräparat seitlich *neben* das Auge gehalten wird. Da die Becquerelstrahlen aber auch im stande sind, in den verschiedensten Substanzen Fluorescenz zu erregen, war zu erwägen, inwieweit dieser Umstand ihre „Sichtbarkeit“ bedingen konnte. Endlich musste auch daran gedacht werden, ob nicht die Lichtempfindung auf dem Umweg über eine Erregung des Ciliarmuskels, also durch Erzeugung des Accommodationsphosphens, zu stande komme. So unwahrscheinlich dies von vornherein war, musste doch bei einer Substanz von so eigentümlicher physikalischer Wirkung, wie sie das Radium zeigt, auch an die Möglichkeit aussergewöhnlicher physiologischer Wirkungen gedacht werden. An das Accommodationsphosphen zu denken, lag um so näher, als bei Auflegen des Radiums auf die geschlossenen Augenlider thatsächlich die Lichtempfindung

1) F. Giesel, Naturforscherversammlung München 1899.



























1 100000 Ohm variirt werden konnte. In Fig. 2 nicht gezeichnet sind zwei Stromwender, von denen der eine vor dem Accumulator  $T$ , der zweite vor dem Galvanometer  $G$  lag.

Hat man die elektromotorische Kraft eines im Dunkeln befindlichen Präparates compensirt und lässt jetzt Licht in das Auge fallen, so erhält man einen Ausschlag, der eine Vergrößerung der ursprünglich vorhandenen elektromotorischen Kraft anzeigt. Das Anwachsen der elektromotorischen Kraft dauert 10–60 Secunden dauern, dann findet trotz fortgesetzter Lichtung wieder eine Abnahme statt. Wird in diesem Augenblicke die Belichtung unterbrochen, so tritt momentan eine

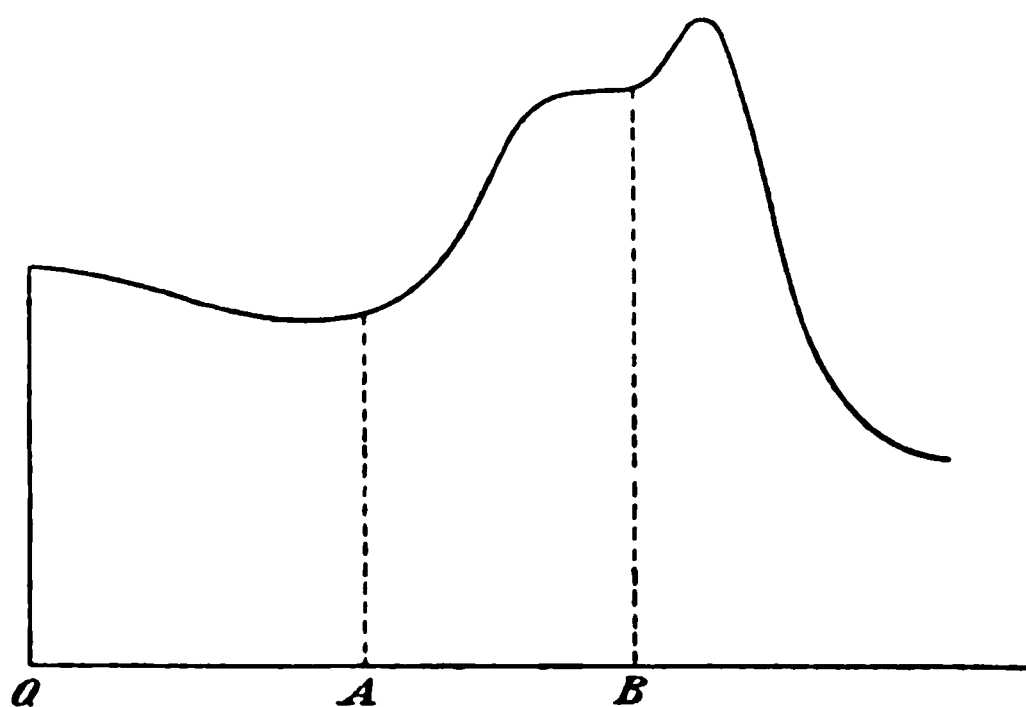


Fig. 3.

erneuere Vergrößerung der elektromotorischen Kraft ein, dann ein schnelles Zurückgehen auf den der Dunkelheit entsprechenden Wert. Wenn wir als Abscissen die Zeit, als Ordinaten die Größen der elektromotorischen Kräfte auftragen, giebt die vorstehende Curve (Fig. 3) den typischen Verlauf eines Versuches, wie er übrigens schon von Holmgren beobachtet

Von  $O$  bis  $A$  befindet sich das Präparat im Dunkeln, von  $A$  bis  $B$  fällt Licht darauf, im Augenblick  $B$  wird wieder dunkel.

Um untersuchen zu können, ob die Röntgenstrahlen eine ähnliche Wirkung hervorriefen, musste zuerst dafür gesorgt werden, dass eine elektrische Wirkung der Röhre bez. des Inductoriums auf das Präparat und die Galvanometerleitungen nicht stattfand. Zu dem Zwecke wurde das Präparat in einen Blechkasten eingesetzt, der oben durch einen Schieber aus



Wurde ein Präparat mehrere Minuten hindurch mit intensivem Lichte bestrahlt, so war es hiernach längere Zeit (bis zu 5 Minuten) unempfindlich gegen schwächere Lichtreize, gleichfalls aber auch gegen Reizung mit Röntgenstrahlen. Trat die Empfindlichkeit für Licht wieder ein, so ebenfalls die für Röntgenstrahlen.

In ganz derselben Weise haben wir auch den Einfluss der ultravioletten Strahlen untersucht. Da wir diese Strahlen nicht absolut trennen konnten von den letzten Spuren von sichtbaren Strahlen, die bei der oben geschilderten Anordnung von dem letzten Prisma diffus nach allen Richtungen und deshalb auch mit durch den Spalt treten, so verfahren wir so, dass wir die Wirkung bestimmten, welche das Einschieben bez. Fortnehmen einer 3 mm dicken Glasplatte in den Weg der Strahlen zwischen letztem und vorletztem Prisma verursachte.

Wie vorausszusehen, erhielten wir durch die ultravioletten Strahlen genau dieselbe Wirkung, wie durch die sichtbaren. Dass nicht etwa eine Schwächung der sichtbaren Strahlen durch die eingeschobene Glasplatte die beobachtete Wirkung hervorgebracht hatte, konnte leicht constatirt werden, indem eines der Quarzprismen durch ein Glasprisma ersetzt wurde. Das Einschieben der Glasplatte blieb jetzt wirkungslos, da schon durch das Glasprisma die wirksamen ultravioletten Strahlen fortgenommen waren.

Bei diesen Versuchen haben wir nur ganz unverletzte Froschaugen verwendet, keine isolirten Netzhäute. Es bleibt daher zunächst unentschieden, ob die ultravioletten Strahlen die Netzhaut direct erregen, oder ob die Fluorescenz von Glaskörper und Linse dabei im Spiel ist. Bei den Versuchen mit Röntgenstrahlen hatten wir letztere Möglichkeit dadurch ausgeschlossen, dass wir Actionsströme auch von isolirten hinteren Bulbushälften (ohne Glaskörper) erhielten.

Es wäre noch denkbar gewesen, dass die Wirkung der Röntgenstrahlen auf das Auge dadurch entstanden wäre, dass die an der vorderen Bulbushälfte anliegende Thonelektrode durch die Röntgenstrahlen zur Fluorescenz gebracht wäre und dann das Fluorescenzlicht auf das Auge gewirkt hätte. Wir haben uns überzeugt, dass der feuchte Thon nicht die geringste Fluorescenz bei Röntgenbestrahlung zeigte und dass an der

... **gemäss der Vorlegung stand.**

**Freiburg i. B., October 1900.**

**(Eingegangen 7. Januar 1901.)**

---

## 9. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum; von Max Planck.

(In anderer Form mitgeteilt in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft,  
Sitzung vom 19. October und vom 14. December 1900, Verhandlungen  
2. p. 202 und p. 237. 1900.)

### Einleitung.

Die neueren Spectralmessungen von O. Lummer und E. Pringsheim<sup>1)</sup> und noch auffälliger diejenigen von H. Rubens und F. Kurlbaum<sup>2)</sup>, welche zugleich ein früher von H. Beckmann<sup>3)</sup> erhaltenes Resultat bestätigten, haben gezeigt, dass das zuerst von W. Wien aus molecular-kinetischen Betrachtungen und später von mir aus der Theorie der elektromagnetischen Strahlung abgeleitete Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum keine allgemeine Gültigkeit besitzt.

Die Theorie bedarf also in jedem Falle einer Verbesserung, und ich will im Folgenden den Versuch machen, eine solche auf der Grundlage der von mir entwickelten Theorie der elektromagnetischen Strahlung durchzuführen. Dazu wird es vor allem nötig sein, in der Reihe der Schlussfolgerungen, welche zum Wien'schen Energieverteilungsgesetz führten, dasjenige Glied ausfindig zu machen, welches einer Abänderung fähig ist; sodann aber wird es sich darum handeln, dieses Glied aus der Reihe zu entfernen und einen geeigneten Ersatz dafür zu schaffen.

Dass die physikalischen Grundlagen der elektromagnetischen Strahlungstheorie, einschliesslich der Hypothese der „natürlichen Strahlung“, auch einer geschärften Kritik gegenüber Stand halten, habe ich in meinem letzten Aufsatz<sup>4)</sup> über diesen

---

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. der Deutsch. Physikal. Gesellsch. 2. p. 163. 1900.

2) H. Rubens und F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 25. October 1900, p. 929.

3) H. Beckmann, Inaug.-Dissertation, Tübingen 1898. Vgl. auch H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 582. 1899.

4) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 719. 1900.





nur abhängt von ihrer Gesamtenergie  $U_N = N U$  und deren Aenderungen, nicht aber von der Energie  $U$  der einzelnen Resonatoren. Dieser Satz führt wiederum mit Notwendigkeit zum Wien'schen Energieverteilungsgesetz. Da nun aber letzteres durch die Erfahrung nicht bestätigt wird, so ist man zu dem Schlusse gezwungen, dass auch jener Satz in seiner Allgemeinheit nicht richtig sein kann und daher aus der Theorie zu entfernen ist.<sup>1)</sup>

Es muss also nun eine andere Bedingung eingeführt werden, welche die Berechnung von  $S$  gestattet, und um dies zu bewerkstelligen, ist ein näheres Eingehen auf die Bedeutung des Entropiebegriffes notwendig. Für die Richtung des dabei einzuschlagenden Gedankenganges giebt der Hinblick auf die Unhaltbarkeit der früher gemachten Voraussetzung einen Fingerzeig. Im Folgenden wird nun ein Weg beschrieben, auf dem sich ein neuer einfacher Ausdruck der Entropie und damit auch eine neue Strahlungsformel ergibt, welche mit keiner der bisher festgestellten Thatsachen in Widerspruch zu stehen scheint.

#### **I. Berechnung der Entropie eines Resonators als Function seiner Energie.**

§ 1. Entropie bedingt Unordnung, und diese Unordnung beruht nach der elektromagnetischen Strahlungstheorie bei den monochromatischen Schwingungen eines Resonators, auch wenn er sich in einem dauernd stationären Strahlungsfelde befindet, in der Unregelmässigkeit, mit der er beständig seine Amplitude und seine Phase wechselt, sofern man Zeitepochen betrachtet, welche gross sind gegen die Zeit einer Schwingung, aber klein gegen die Zeit einer Messung. Wäre Amplitude und Phase absolut constant, also die Schwingungen vollkommen homogen, so könnte keine Entropie existiren und die Schwingungsenergie müsste vollkommen frei in Arbeit verwandelbar sein. Die constante Energie  $U$  eines einzelnen stationär schwingenden Resonators ist danach nur als ein zeitlicher Mittelwert aufzufassen, oder, was ganz auf dasselbe hinauskommt, als der gleichzeitige Mittelwert der Energien einer grossen Anzahl  $N$

1) Man vergleiche hierzu die Kritiken, die dieser Satz bereits gefunden hat: von W. Wien (Rapport für den Pariser Congress 2. p. 40. 1900) und von O. Lummer (l. c. 2. p. 92. 1900).



wobei  $P$  eine ganze, im allgemeinen grosse Zahl bedeutet, während wir den Wert von  $\epsilon$  noch dahingestellt sein lassen.

Nun ist einleuchtend, dass die Verteilung der  $P$  Energieelemente auf die  $N$  Resonatoren nur auf eine endliche ganz bestimmte Anzahl von Arten erfolgen kann. Jede solche Art der Verteilung nennen wir nach einem von L. Boltzmann für einen ähnlichen Begriff gebrauchten Ausdruck eine „Complexion“. Bezeichnet man die Resonatoren mit den Ziffern  $1, 2, 3 \dots N$ , schreibt diese der Reihe nach nebeneinander und setzt unter jeden Resonator die Anzahl der bei irgend einer willkürlich vorgenommenen Verteilung auf ihn entfallenden Energieelemente, so erhält man für jede Complexion ein Symbol von folgender Form:

|   |    |    |   |   |   |    |   |   |    |
|---|----|----|---|---|---|----|---|---|----|
| 1 | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 |
| 7 | 38 | 11 | 0 | 9 | 2 | 20 | 4 | 4 | 5  |

Hier ist  $N=10$ ,  $P=100$  angenommen. Die Anzahl  $\mathfrak{N}$  aller möglichen Complexionen ist offenbar gleich der Anzahl aller möglichen Ziffernbilder, die man auf diese Weise, bei bestimmtem  $N$  und  $P$ , für die untere Reihe erhalten kann. Der Deutlichkeit halber sei noch bemerkt, dass zwei Complexionen als verschieden anzusehen sind, wenn die entsprechenden Ziffernbilder dieselben Ziffern, aber in verschiedener Anordnung, enthalten.

Aus der Combinationslehre ergibt sich so die Anzahl aller möglichen Complexionen zu

$$\mathfrak{N} = \frac{N \cdot (N+1) \cdot (N+2) \dots (N+P-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)! P!}.$$

Nun ist nach dem Stirling'schen Satze in erster Annäherung:

$$N! = N^N,$$

folglich in entsprechender Annäherung

$$\mathfrak{N} = \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N \cdot P^P}.$$

§ 4. Die Hypothese, welche wir jetzt der weiteren Rechnung zu Grunde legen wollen, lautet folgendermaassen: Die Wahrscheinlichkeit  $\mathcal{W}$  dafür, dass die  $N$  Resonatoren insgesamt die Schwingungsenergie  $U_N$  besitzen, ist proportional der An-

$$S_N = k N \left\{ \left( 1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \log \left( 1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \frac{U}{\varepsilon} \right\}.$$

Also nach (2) die Entropie  $S$  eines Resonators als Function seiner Energie  $U$ :

$$(6) \quad S = k \left\{ \left( 1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) \log \left( 1 + \frac{U}{\varepsilon} \right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \frac{U}{\varepsilon} \right\}.$$

## II. Einführung des Wien'schen Verschiebungsgesetzes.

§ 6. Nächst dem Kirchhoff'schen Satz von der Proportionalität des Emissions- und des Absorptionsvermögens bildet das von W. Wien<sup>2)</sup> entdeckte und nach ihm benannte

1) Job. v. Kries, Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung p. 36. Freiburg 1886.

2) W. Wien, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 9. Febr. 1893. p. 55.

sogenannte Verschiebungsgesetz, welches das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz der Abhängigkeit der Gesamtstrahlung von der Temperatur als specielle Anwendung mit umfasst, in dem fest begründeten Fundament der Theorie der Wärmestrahlung den wertvollsten Bestandteil. Es lautet in der ihm von M. Thiesen<sup>1)</sup> gegebenen Fassung:

$$E \cdot d\lambda = T^5 \psi(\lambda T) \cdot d\lambda,$$

wo  $\lambda$  die Wellenlänge,  $E d\lambda$  die räumliche Dichte der dem Spectralbezirk  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  angehörenden „schwarzen“ Strahlung<sup>2)</sup>,  $T$  die Temperatur, und  $\psi(x)$  eine gewisse Function des einzigen Arguments  $x$  bezeichnet.

§ 7. Wir wollen nun untersuchen, was das Wien'sche Verschiebungsgesetz über die Abhängigkeit der Entropie  $S$  unseres Resonators von seiner Energie  $U$  und seiner Eigenperiode aussagt, und zwar gleich in dem allgemeinen Falle, dass der Resonator sich in einem beliebigen diathermanen Medium befindet. Zu diesem Zwecke verallgemeinern wir zunächst die Thiesen'sche Form des Gesetzes auf die Strahlung in einem beliebigen diathermanen Medium mit der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$ . Da wir nicht die Gesamtstrahlung, sondern monochromatische Strahlung zu betrachten haben, so wird es beim Vergleich verschiedener diathermanen Medien nötig, statt der Wellenlänge  $\lambda$  die Schwingungszahl  $\nu$  einzuführen.

Bezeichnen wir also die räumliche Dichte der dem Spectralbezirk  $\nu$  bis  $\nu + d\nu$  angehörenden strahlenden Energie mit  $u d\nu$ , so ist zu schreiben:  $u d\nu$  statt  $E d\lambda$ ;  $c/\nu$  statt  $\lambda$ , und  $c d\nu/\nu^2$  statt  $d\lambda$ . Dadurch ergibt sich:

$$u = T^5 \cdot \frac{c}{\nu^2} \cdot \psi\left(\frac{cT}{\nu}\right).$$

Nun ist nach dem bekannten Kirchhoff-Clausius'schen Gesetz die von einer schwarzen Fläche pro Zeiteinheit in ein diathermanes Medium emittirte Energie von bestimmter Temperatur  $T$  und bestimmter Schwingungszahl  $\nu$  umgekehrt pro-

1) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 2. p. 66. 1900.

2) Man könnte vielleicht noch passender von einer „weissen“ Strahlung sprechen, in sachgemässer Verallgemeinerung dessen, was man schon jetzt unter vollkommen weissem Licht versteht.

( $\mathfrak{I}$  ist die Intensität eines monochromatischen, geradlinig polarisirten Strahles), welche zusammen mit der bekannten Gleichung:

$$u = \frac{8\pi\mathfrak{I}}{c}$$

die Beziehung liefert:

$$(8) \quad u = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U.$$

Hieraus und aus (7) folgt:

$$U = \nu f\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right),$$

wo nun  $c$  überhaupt nicht mehr vorkommt. Statt dessen können wir auch schreiben:

$$\vartheta = \nu f\left(\frac{U}{\nu}\right).$$

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 99. 1900.

§ 9. Endlich führen wir auch noch die Entropie  $S$  des Resonators ein, indem wir setzen:

$$(9) \quad \frac{1}{\vartheta} = \frac{dS}{dU}.$$

Dann ergibt sich:

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{\nu} f\left(\frac{U}{\nu}\right)$$

und integriert:

$$(10) \quad S = f\left(\frac{U}{\nu}\right),$$

d. h. die Entropie des in einem beliebigen diathermanen Medium schwingenden Resonators ist von der einzigen Variablen  $U/\nu$  abhängig und enthält ausserdem nur universelle Constante. Dies ist die einfachste mir bekannte Fassung des Wien'schen Verschiebungsgesetzes.

§ 10. Wenden wir das Wien'sche Verschiebungsgesetz in der letzten Fassung auf den Ausdruck (6) der Entropie  $S$  an, so erkennen wir, dass das Energieelement  $\varepsilon$  proportional der Schwingungszahl  $\nu$  sein muss, also:

$$\varepsilon = h \cdot \nu$$

und somit:

$$S = k \left\{ \left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) \log \left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) - \frac{U}{h\nu} \log \frac{U}{h\nu} \right\}.$$

Hierbei sind  $h$  und  $k$  universelle Constante.

Durch Substitution in (9) erhält man:

$$(11) \quad \frac{1}{\vartheta} = \frac{k}{h\nu} \log \left(1 + \frac{h\nu}{U}\right),$$

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{k\vartheta}{h\nu}} - 1}$$

und aus (8) folgt dann das gesuchte Energieverteilungsgesetz:

$$(12) \quad u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{k\vartheta}{h\nu}} - 1}$$

oder auch, wenn man mit den in § 7 angegebenen Substitutionen statt der Schwingungszahl  $\nu$  wieder die Wellenlänge  $\lambda$  einführt:

$$(13) \quad E = \frac{8\pi c h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda\vartheta}} - 1}.$$

$$\begin{aligned}
u &= \int_0^\infty u \, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 \, d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k}} - 1} \\
&= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \nu^3 \left( e^{-\frac{h\nu}{k}} + e^{-\frac{2h\nu}{k}} + e^{-\frac{3h\nu}{k}} + \dots \right) d\nu
\end{aligned}$$

und durch gliedweise Integration:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{8\pi h}{c^3} \cdot 6 \left( \frac{k}{h} \right)^4 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right) \\
&= \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} \cdot 1,0828.
\end{aligned}$$

Setzt man dies  $= 7,061 \cdot 10^{-15}$ , so ergibt sich, da  $c = 3 \cdot 10^{10}$ ,

$$(14) \quad \frac{k^4}{h^3} = 1,1682 \cdot 10^{15}.$$

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 65. p. 759. 1898.



§ 12. O. Lummer und E. Pringsheim<sup>1)</sup> haben das Product  $\lambda_m \vartheta$ , wo  $\lambda_m$  die Wellenlänge des Maximums von  $E$  in Luft bei der Temperatur  $\vartheta$  bedeutet, zu  $2940 \mu$ .grad bestimmt. Also in absolutem Maass:

$$\lambda_m \vartheta = 0,294 \text{ cm} \cdot \text{grad}.$$

Andererseits folgt aus (13), wenn man den Differentialquotienten von  $E$  nach  $\lambda$  gleich Null setzt, wodurch  $\lambda = \lambda_m$  wird:

$$\left(1 - \frac{c h}{5 k \lambda_m \vartheta}\right) \cdot e^{\frac{c h}{k \lambda_m \vartheta}} = 1$$

und aus dieser transcendenten Gleichung:

$$\lambda_m \vartheta = \frac{c h}{4,9651 \cdot k}.$$

Folglich:

$$\frac{h}{k} = \frac{4,9651 \cdot 0,294}{3 \cdot 10^{10}} = 4,866 \cdot 10^{-11}.$$

Hieraus und aus (14) ergeben sich die Werte der Naturconstanten:

$$(15) \quad h = 6,55 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec},$$

$$(16) \quad k = 1,346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}}.$$

Das sind dieselben Zahlen, welche ich in meiner früheren Mitteilung angegeben habe.

1) O. Lummer und E. Pringsheim, Verhandl. der Deutschen Physikal. Gesellsch. 2. p. 176. 1900.

(Eingegangen 7. Januar 1901.)

Nun ist, wenn  $m$  die Masse eines g-Atoms,  $\omega$  das Verhältnis der Masse eines wirklichen Atoms zu der Masse eines g-Atoms, und  $\overline{c^2}$  das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit bezeichnet:

$$T = \frac{1}{2} \omega m \overline{c^2},$$

ferner:

$$\overline{c^2} = \frac{3 R \vartheta}{m},$$

wobei  $R$  die sogenannte absolute Gasconstante ( $8,31 \cdot 10^7$  für  $O = 16$ ),  $\vartheta$  die Temperatur bedeutet; folglich die Entropie des Gases:

$$\int \frac{dQ}{\vartheta} = \omega R \log \mathfrak{P}.$$

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (II) 76. p. 373. 1877.

2) l. c. p. 428.

Andererseits hat sich in der von mir entwickelten elektromagnetischen Theorie der Wärmestrahlung für die Entropie einer grossen Anzahl von unabhängig schwingenden, in einem stationären Strahlungsfelde befindlichen linearen Resonatoren der folgende Ausdruck<sup>1)</sup> ergeben:

$$k \log \mathfrak{R},$$

wo  $\mathfrak{R}$  die Anzahl der möglichen Complexionen,  $k$  die Zahl  $1,346 \cdot 10^{-16}$  [erg:grad]<sup>2)</sup> bedeutet.

Der hier auftretende Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit hat wohl nur dann einen physikalischen Sinn, wenn er allgemein gilt, nicht nur für die Geschwindigkeiten der Atome und die Schwingungen der Resonatoren einzeln, sondern auch für beide Vorgänge zusammengenommen. Wenn also in dem Gase auch strahlende Resonatoren vorhanden sind, so ist danach die Entropie des ganzen Systems proportional dem Logarithmus der Zahl aller möglicher Complexionen, Geschwindigkeiten und Strahlung zusammengenommen. Da aber nach der elektromagnetischen Theorie der Strahlung die Geschwindigkeiten der Atome vollkommen unabhängig sind von der Verteilung der strahlenden Energie, so ist die Gesamtzahl der Complexionen einfach gleich dem Producte der auf die Geschwindigkeiten und der auf die Strahlung bezüglichen Zahlen, mithin die Gesamtentropie, wenn  $f$  einen Proportionalitätsfactor bedeutet:

$$f \log (\mathfrak{P} \mathfrak{R}) = f \log \mathfrak{P} + f \log \mathfrak{R}.$$

Der erste Summand ist die kinetische, der zweite die Strahlungsentropie. Durch Vergleichung mit den vorigen Ausdrücken erhält man hieraus:

$$f = \omega R = k,$$

oder

$$\omega = \frac{k}{R} = 1,62 \cdot 10^{-24},$$

d. h. ein wirkliches Molecül ist das  $1,62 \cdot 10^{-24}$  fache eines g-Molecüles, oder: ein Wasserstoffatom wiegt  $1,64 \cdot 10^{-24}$  g, da  $H = 1,01$ , oder: auf ein g-Molecül eines jeden Stoffes gehen

1) M. Planck, vgl. die vorhergehende Abhandlung, Gleichung (5).

2) l. c. Gleichung (16).

lungsconstanten  $k$ , zusammen, und übertrifft somit bei weitem alle bisherigen Bestimmungen dieser Grössen. Ihre Prüfung durch directere Methoden wird eine ebenso wichtige wie notwendige Aufgabe der weiteren Forschung sein.

---

1) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl. p. 337. 1899.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 1. p. 578. 1900.

3) l. c.

4) F. Richarz, Wied. Ann. 52. p. 897. 1894.

5) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 46. p. 528. 1898.

(Eingegangen 9. Januar 1901.)

---

## 11. *Zur Festigkeitslehre;* ✓ *von W. Voigt.*

Der Entwicklung der allgemeinen *Principien* der Festigkeitslehre ist die ausserordentliche praktische Bedeutung der *Anwendungen* dieser Disciplin nicht förderlich gewesen. Das Bedürfnis ging auf angenäherte Regeln und ungefähre Zahlen, die eine Anwendung auf theoretisch complicirte Umstände gestatteten, und hier genügte die Aufstellung und Verwertung von Hypothesen, die mit wirklich wissenschaftlicher Schärfe nie geprüft waren. Erst neuerdings hat man sich hier und da einer Kritik der Grundlagen der technischen Festigkeitslehre zugewandt; aber auch hier ist an gewisse fundamentale Annahmen, die der Prüfung ernstlich bedürfen, kaum gerührt worden. Ich will die ersten beiden Abschnitte dieser Arbeit ihrer Erörterung widmen und mich sodann der Besprechung derjenigen Theorie der Festigkeit zuwenden, die, wie es scheint, jetzt in der Technik die meiste Anwendung findet.

### 1. Einwände gegen eines der Fundamente der älteren Festigkeitstheorien.

Die *erste* der meist stillschweigend eingeführten Grundannahmen der gebräuchlichen Festigkeitslehre geht dahin, dass *die Erscheinungen der Festigkeit überhaupt durch dem Material individuelle Constanten darstellbar seien*. Es liegen indessen gewisse Beobachtungen vor, die hiermit bedenklich im Widerspruch zu stehen scheinen; von ihnen will ich an dieser Stelle nur diejenigen erwähnen, die auf meine Veranlassung im hiesigen Institut angestellt worden sind und die ich daher genau zu beurteilen vermag.

Eine erste Reihe<sup>1)</sup> bezog sich auf die Zerreiissungsfestigkeit von krystallisirtem Steinsalz. Hier hat sich unter anderem gezeigt, dass prismatische Präparate, die aus einem Spaltungsstücke mit ihrer Axe parallel einer Würfelkante ausgeschnitten

1) A. Sella u. W. Voigt, Wied. Ann. 48. p. 636. 1893.



lären Oberflächenschichten *nicht* in Rechnung setzt. Aber diese unmerklich dünne, in ihrem Verhalten nach innen zu stetig in den normalen Zustand der Materie übergehende Schicht kann trotzdem die Tragfähigkeit eines Cylinders stark beeinflussen, wenn sie die Eigenschaft hat, bei einer geringeren Dehnung zu zerreißen, als ein Faden im Innern; denn der bei einer gewissen Dehnung entstehende Sprung in der Oberflächenschicht bedeutet in mehrfacher Hinsicht eine Schwächung des bezüglichen Querschnittes und wird sich im allgemeinen über denselben ausbreiten. Die Eigenschaft, welche die Tragfähigkeit bedingt, würde hiernach, wenigstens beim krystallisierten Steinsalz, nicht eine *Volumen*-, sondern eine *Flächen*-festigkeit sein.

Dass singuläre Einwirkungen der Oberflächenbeschaffenheit keineswegs auf Präparate aus Krystallen beschränkt sind, ergibt sich aus einer anderen hier angestellten Versuchsreihe<sup>1)</sup>, die sich auf die Drehungs-, Biegungs- und Drillungsfestigkeit von gezogenen cylindrischen Glasstäben bezog. Bei derselben fand sich, dass die Festigkeit der Stäbe bei einer leichten Aetzung der Oberfläche mit Hülfe von Flusssäure ganz ausserordentlich zunimmt. Die folgenden mittleren Werte der Grenzspannungen  $\bar{p}$  in Atmosphären (1 Atm. = 1 kg pro cm<sup>2</sup>) mögen dies belegen:

|          | Dehnung | Biegung | Drillung |
|----------|---------|---------|----------|
| ungeätzt | 1190    | 1350    | 1210     |
| geätzt   | 1780    | 2750    | 2030     |

Diese Zahlen bedürfen keines Commentares. Nur eine Bemerkung sei hinzugefügt. Auch bei technischen Festigkeitsbestimmungen wird gelegentlich von einem singulären Verhalten der Oberflächenschicht gesprochen; aber es wird darunter offenbar etwas ganz anderes verstanden, als das im Vorstehenden Erörterte. Das beweist am einfachsten die wiederholt ausgesprochene Vorstellung, dass man durch Vergrößerung des Querschnittes den Einfluss der Oberflächenschicht bis zur Unmerklichkeit herabdrücken könnte. Unsere Resultate sind mit einer solchen Vorstellung nicht vereinbar.<sup>2)</sup>

1) C. Brodmann, Gött. Nachr. 1894. p. 44 ff.

2) A. Sella u. W. Voigt, l. c.





Spannungen selbst, auch von deren örtlicher Veränderlichkeit abhängen. Und mir scheint, dass die Beobachtungen eine solche Auffassung deutlich genug nahe legen.

Die Abweichungen zwischen Dehnungs- und Biegungsfestigkeit sind allbekannt, und es ist nur ein Notbehelf, wenn man sie durch secundäre Einflüsse zu erklären sucht. Es sei erlaubt, wieder auf die im hiesigen Institut an krystallisirtem Steinsalz angestellten Beobachtungen Bezug zu nehmen, die an einem völlig homogenen und spannungsfreien Material vorgenommen sind, das überdies für die elastische Biegung bis zum Moment des Brechens äusserst genau dem Hooke'schen Gesetz folgt.<sup>1)</sup> Dabei sei bemerkt, dass nach der Theorie der Krystallelasticität sich die Stäbe von den oben erwähnten Orientirungen I und III (vgl. Fig. 1) isotropen Präparaten bei Biegung und Dehnung wesentlich gleich verhalten.

Diese Beobachtungen lieferten mit einer Genauigkeit, welche die bei isotropen Körpern zu erzielende erheblich übertrifft, für die Präparate der Gattungen I und III die Grenzspannungen  $\bar{p}$  in Atmosphären:

|     | Dehnung | Biegung |
|-----|---------|---------|
| I   | 57,1    | 119,0   |
| III | 91,7    | 190,0;  |

trotzdem dass die einzelnen Fadenelemente eines gebogenen Stabes sich nach der Theorie in merklich demselben Spannungszustande befinden, wie wenn jedes einzelne für sich allein gedehnt würde, findet sich  $\bar{p}$  bei der Biegung rund doppelt so gross, wie bei der Dehnung. Die oben mitgetheilten, auf Glasstäbe bezüglichen Zahlen stimmen dem Sinne nach mit den vorstehenden überein.

Es scheint mir, dass auch derartige Resultate eine wichtige Mahnung in Bezug auf die Beobachtungen enthalten, die zum Zwecke der Ableitung eines Elementargesetzes der Festigkeit angestellt werden. Man sollte wohl, um klare Grundlagen zu schaffen, vor allen Dingen mit der Erforschung der Festigkeit *homogen* deformirter Körper weiter zu kommen versuchen.

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 7. p. 47. 1875. Es scheint mir übrigens, dass die Festigkeitsversuche des Hrn. Grübler an rotirenden Scheiben (Zeitschr. des Ver. deutscher Ing. 43. p. 1294. 1899) für die obigen Behauptungen eine neue Stütze liefern.





























**Anwendungen.** Ein Kreis um den  $O$ -Punkt, welcher die Hüllcurve berührt, entspricht dem Falle zweier entgegengesetzt gleicher extremer Hauptspannungen  $\pm \kappa_3$ , wobei  $\kappa_3$  durch die Länge des Lotes  $or'$  angegeben wird. Der Schnittpunkt der Hüllcurve mit der  $\tau$ -Axe gehört dem Falle zu, dass gegen die Grenzfläche nur eine tangentielle Spannung wirkt, und die Strecke  $os' = \kappa_4$  repräsentirt den Wert dieser Spannung, welcher den Zerfall bedingt.

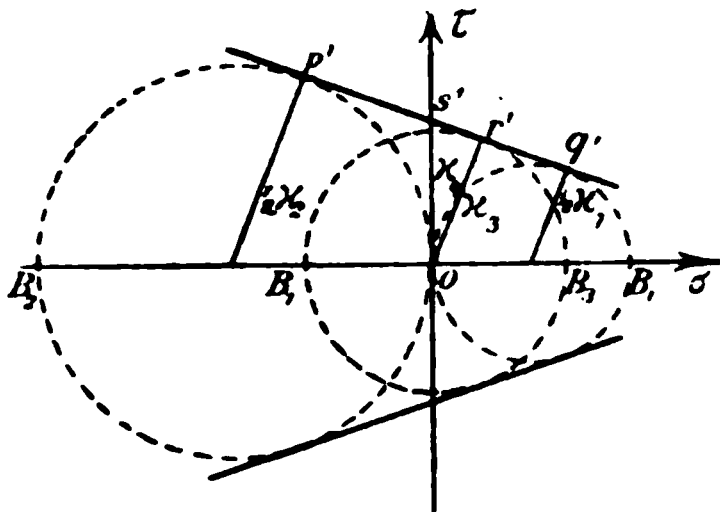


Fig. 5.

Für  $\kappa_3$  und  $\kappa_4$  folgt dann das Wertsystem

$$(4) \quad \kappa_3 = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}, \quad \kappa_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\kappa_1 \kappa_2};$$

ausserdem findet sich der Winkel  $\psi = \frac{1}{2} \varphi$  zwischen der Trennungsfläche und der kleinsten Hauptspannung constant; für ihn gilt

$$(5) \quad \cos \varphi = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1}, \quad \text{also} \quad \sin^2 \psi = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}.$$

### 8. Die Mohr'sche Regel und die Thatsachen.

Was die numerische Vergleichung der Mohr'schen Regel mit der Erfahrung angeht, so beschränke ich mich hier gemäss früher Gesagtem nur auf das Gebiet der Festigkeit spröder Körper, lasse also alles, was sich auf die sogenannte Elasticitätsgrenze und auf die Festigkeit ductiler Körper bezieht, ausser Betracht, — nicht, weil ich einzelne auf jenem Gebiete liegende auffallende Bestätigungen totschrweigen will, sondern weil ich auf diesem Gebiet keine eigenen Erfahrungen habe und weil zur Widerlegung der Mohr'schen Regel die Beschränkung auf jene eine Erscheinungsklasse ausreicht.

Hier möchte ich zunächst nochmals auf die Unzulässigkeit hinweisen, den Fall der *inhomogenen* Deformationen mit dem der *homogenen* zusammenzuwerfen. Dem früher dargeguthanen *grossen* Widerspruch zwischen Biegungs- und Dehnungsfestigkeit ordnet sich jetzt nach Aufstellung der dafür





dabei gefundenen Resultate mit der Regel schwer zu vereinigen sind, ist ohne weiteres klar. Anknüpfend an die Darstellung in Fig. 5 würden die Beobachtungen auf je zwei *gleichgrosse* auf der positiven und der negativen Seite der  $\sigma$ -Axe liegende Hauptkreise führen, die von den bez. Grenzcurven  $f(\sigma, \tau) = 0$  tangirt werden müssten. Die Hüllcurve müsste hiernach in dem betreffenden Bereich ungefähr horizontal verlaufen, die Bruchfläche demgemäss unter etwa  $45^\circ$  gegen den Querschnitt des Präparates geneigt liegen. Ueber den Widerspruch des letzteren mit der Wirklichkeit ist oben wiederholt gesprochen worden; dass auch unter Beiseitelassung dieses Punktes wegen der die Zugfestigkeit im allgemeinen weit übertreffenden Druckfestigkeit ein nahezu horizontaler Verlauf der „Hüllcurve“ in der Nähe der  $\tau$ -Axe wenig wahrscheinlich ist, ergibt sich aus dem p. 582 im Anschluss an die Darlegungen des Hrn. Mohr über den Verlauf der Curve im ganzen Gesagten.

Hr. Mohr sucht den Widerspruch dadurch zu beseitigen, dass er das Stearin-Palmitinsäure-Präparat (das er einigermaassen mit Unrecht „Stearin“ nennt) als „ohne Zweifel“ *plastisch* bezeichnet und bezüglich des Steinsalzes vermutet, „dass das ungleichförmige Eindringen der hochgepressten Kohlensäure in die Poren des Versuchskörpers einen störenden Einfluss ausgeübt hätte.“ Beide Argumentationen scheinen mir wenig glücklich.

Was die erste angeht, so handelt es sich nach dem p. 574 Gesagten nicht *darum*, ob der Körper unter *irgend welchen* Umständen *plastisch wird*, sondern *darum*, ob er unter den *wirklich angewendeten* Drucken *plastisch ist*. Davon, dass unser „Stearin“ bei den Versuchen keine nennenswerten dauernden Deformationen erlitt, haben wir uns selbstverständlich vor Anstellung der grossen Beobachtungsreihen überzeugt. Um eine zahlenmässige Darstellung der Verhältnisse zu geben, theile ich die Werte der Durchmesser vor und nach der Zerreissung mit, die auf Veranlassung der Mohr'schen Arbeit neuerdings an einem Präparat gemessen sind, das genau nach dem früheren Verfahren angefertigt war. Dem Wert 5,55 mm *vor* dem Zerreissen entsprach 5,54 mm *nach* dem Zerreissen; der Unterschied fällt in das Bereich der Beobachtungsfehler.



Denn diese Spannung hat sich bei den Druckversuchen 4 bis 5 mal so gross ergeben, wie bei den Zerreissungsversuchen.

Auf den merkwürdigen Gedanken, für die Abweichung der an Steinsalz erhaltenen Resultate von seiner Regel das „ungleichförmige Eindringen der Kohlensäure in die Poren des Versuchskörpers“ verantwortlich zu machen, hätte Hr. Mohr nicht kommen können, wenn er eines der glasklaren, hochpolirten Präparate gesehen hätte; eine eingehende Widerlegung des Argumentes ist jedenfalls unnötig.<sup>1)</sup> Doch hielt ich es für erwünscht, auch hier durch Anstellung einiger orientirender Beobachtungen über Druckfestigkeit die Unrichtigkeit der Regel ganz direct augenfällig zu machen.

Hierzu wurden einige nahezu würfelförmige Spaltungsstücke von Steinsalz auf allen Flächen plan geschliffen und leicht polirt, darauf zwischen Hartgummiplatten, die mit einer dünnen Schicht eines zähen Schmiermittels bedeckt waren, aufrecht stehend mittels eines Hebelwerkes zerpresst. Ein merkliches Eindringen der Präparate in die Platten fand nicht statt. Hr. stud. Hartmann hat diese Beobachtungen nach meiner Angabe ausgeführt, auch die Präparate hergestellt.

Bis zu einem Druck von 150 Atm. hielten sich die Präparate völlig intact; bei dieser Belastung etwa traten die ersten verticalen Sprünge auf, die bei weiter gesteigertem Drucke allmählich an Zahl zunahmen; bei ungefähr 300 Atm. zerfiel das Präparat plötzlich in zahlreiche verticale Prismenelemente und brach zugleich in sich zusammen, wobei die äusseren Prismen ziemlich erhalten blieben. Nebenbei machten sich ein wenig die bekannten Gleitungen nach den Granatoëderflächen geltend, ohne doch ihrerseits das Präparat zu zertrümmern.

Diese Versuche widersprechen einerseits der Mohr'schen Regel bezüglich der Lage der Bruchflächen, die, in Uebereinstimmung mit zahlreichen anderen Beobachtungen, sich uns nicht normal, sondern parallel zu der ausgezeichneten Hauptspannung ergaben. Andererseits und hauptsächlich ist wiederum

1) Um die Verwendung desselben Argumentes gegen die vorige Beobachtungsreihe von vornherein abzuschneiden, bemerke ich, dass auch das Stearin- und Palmitinsäuregemisch völlig dicht ist und bei der Bearbeitung mit einem scharfen Instrument blanke Oberflächen zeigt.



kung; der Effect ist derselbe, als seien *alle* durch die Druckrichtung gehenden Ebenen gleichwertige Spaltflächen.

#### Schluss.

Allem Anschein nach sind wir von der Erkenntnis der wahren Gesetze der Festigkeit noch weit entfernt. Die Mohr'sche Regel, die bei technischen Anwendungen die schätzbarsten Dienste leisten mag, hat keinerlei allgemeine Bedeutung und führt sogar in den einfachsten Fällen homogener Deformationen zu unlösbaren Widersprüchen mit der Erfahrung.

Um die Aufklärung der offenbar höchst complicirten Verhältnisse zu fördern, bedarf es vor allen Dingen noch systematischer Beobachtungen unter Umständen, die nicht durch technische Bedürfnisse, sondern allein durch wissenschaftliche Gesichtspunkte vorgeschrieben werden. Vorläufig empfiehlt sich noch immer die Beschränkung auf die denkbar einfachsten Fälle, insbesondere auch auf den Fall der homogenen Deformation, und zwar von Körpern, die sich bis zum Zerfall nicht erheblich dauernd verändern, d. h., die geringe Ductilität besitzen. Dabei wird auf die vollkommene Homogenität der Präparate und auf die klare Definition ihrer Oberflächenbeschaffenheit der allergrösste Wert gelegt werden müssen.

Göttingen, Januar 1901.

(Eingegangen 18. Januar 1901.)



sich befindet. Die Ebene der zweiten Elektrode geht ebenfalls durch die Axe; auch ihr Mittelpunkt liegt in der Ebene des Aequators; sie ist aber mittels eines Schliffstückes drehbar um die Axe. Bei den im Folgenden beschriebenen Versuchen war die drehbare Elektrode so gestellt, dass ihre Ebene mit der Ebene der festen einen Winkel von  $90^\circ$  bildete.

4

Fig. 1.

Die Entfernung der Mittelpunkte der beiden kreisförmigen Elektroden betrug dann etwa 6,5 cm. Die Röhre war mit Luft gefüllt.

3. Um den Einfluss eines Magnetfeldes auf den Verlauf der Charakteristik zu untersuchen, wurde ein cylindrischer Elektromagnet so vor der Röhre aufgestellt, dass seine Axe zusammenfiel mit dem Radiusvector, der von dem Mittelpunkt der Kugel zu dem Mittelpunkt der drehbaren Elektrode ging. Die Abmessungen im einzelnen ergaben sich aus Fig. 1, welche im Maassstabe 5:3 gezeichnet ist.





beobachteten Werte auf gleiche Stromstärken reducirt; die Reduction geschah auf graphischem Wege, und es wurden die Stromstärken der Tabelle so ausgewählt, dass die durch Reduction erhaltenen Werte den wirklich beobachteten möglichst nahe lagen.

Eine graphische Darstellung der Resultate ist in Fig. 2 gegeben; dabei sind die durch die Beobachtungen gegebenen Wertpaare durch Punkte markirt.

Bei den Drucken von 14,6 mm und 10,2 mm diente die Influenzmaschine als Stromquelle, da hier die Spannung der Accumulatoren unzureichend war. Bei den Drucken von 0,21 mm an abwärts wurden grössere Stromstärken nicht benutzt, um eine schädliche Erwärmung der Elektroden zu vermeiden.

Der Druck in der Kugel wurde schliesslich noch auf 0,010 mm erniedrigt; zur Erzeugung der Ströme musste jetzt wieder die Influenzmaschine benutzt werden. Eine Stromstärke von  $47 \cdot 10^{-5}$  Amp. entsprach jetzt einer Spannungsdifferenz von 3980 Volt, einer Stromstärke von  $130 \cdot 10^{-5}$  Amp. eine Spannungsdifferenz von 5820 Volt. Indes machte sich schon bei diesen Strömen eine allmähliche Verschlechterung des Vacuums geltend. Bei stärkeren Strömen nahm diese so erheblich zu, dass auf eine Fortsetzung der Versuche verzichtet wurde.

5. Die Art und Weise, wie die *Änderung der Charakteristiken in einem Magnetfeld* untersucht wurde, möge an einem speciellen Beispiele erläutert werden.

Der Druck in der Kugel ergab sich zu 0,45 mm. Es wurde nun ein bestimmter Jodcadmiumwiderstand vorgeschaltet, und der Strom der Accumulatorenatterie durch die Kugel geschlossen, wobei die Elektrode *A* der Fig. 1 Kathode war. Es ergaben sich die zusammengehörenden Werte von Stromstärke und Spannungsdifferenz:

$$i = 11,77 \cdot 10^{-5} \text{ Amp.}, \quad e_0 = 330 \text{ Volt.}$$

Nun wurde, während der Widerstand im äusseren Kreise derselbe blieb, der Elektromagnet erregt, und zwar so, dass sein Nordpol stets der Kugel zugewandt blieb. Es wurden dabei vier verschiedene Stromstärken zuerst in aufsteigender, dann in absteigender Ordnung verwandt und jedesmal die zugehörenden Einstellungen des Voltmeters abgelesen. So ergaben sich die folgenden zusammengehörenden Werte der

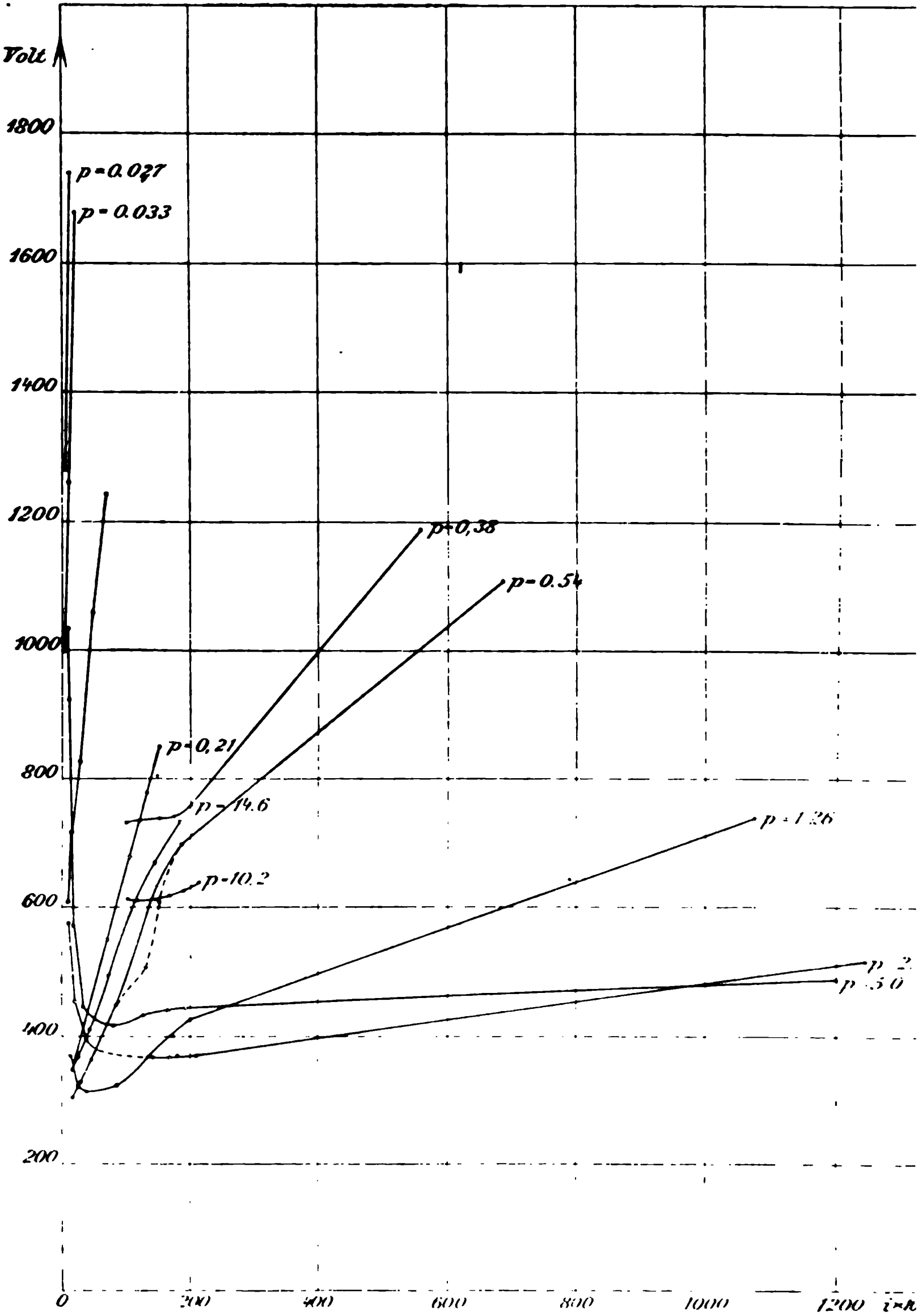


Fig. 2.

Stärke  $J$  des magnetisierenden Stromes und der Spannungsdifferenz  $e$  der Elektroden:

|            |     |      |      |      |      |      |     |
|------------|-----|------|------|------|------|------|-----|
| $J$ , Amp. | 0,5 | 1,74 | 3,83 | 5,38 | 3,90 | 1,77 | 0,5 |
| $e$ , Volt | 350 | 356  | 368  | 416  | 374  | 361  | 350 |

Wurde der magnetisierende Strom unterbrochen, so stellte sich die Stromstärke wieder auf  $11,78 \cdot 10^{-5}$  Amp., die Spannungsdifferenz  $e_0$  der Elektroden auf 328 Volt.

Dieselben Beobachtungen wurden nun mit anderen vorgeschalteten Jodcadmiumwiderständen wiederholt.

Eine zweite Beobachtungsreihe wurde angestellt, bei welcher die Elektrode  $A$  als Anode benutzt wurde. Bei einer dritten Beobachtungsreihe wurde die Elektrode  $A$  wieder zur Kathode gemacht.

Nach dem Abschluss der Beobachtungen wurde der Druck in der Kugel von neuem bestimmt; er war auf 0,38 mm gesunken. Im Mittel kann also für die vorliegenden Beobachtungen der Druck gleich 0,41 mm gesetzt werden. Bei grösseren Drucken war eine solche Veränderung der Gasdichte durch den Strom selbst nicht beobachtet worden.

Die Charakteristiken für die verschiedenen Magnetfelder können mit Hülfe einer einfachen Construction gefunden werden. Bezeichnen wir die Klemmenspannung der Accumulatorenbatterie durch  $E$ , die Spannungsdifferenz der Elektroden durch  $e$ , den äusseren Widerstand durch  $w$ , die Stromstärke durch  $i$ , so ist

$$E - iw = e.$$

Wir benutzen die  $i$  als Abscissen, die  $e$  als Ordinaten in einem rechtwinkligen Coordinatensystem. Wenn  $E$  und  $w$  constant bleiben, so liegen alle zusammengehörenden Werte von  $e$  und  $i$  auf einer Geraden, welche durch den Punkt  $E$  der Axe  $e$  der Spannungen hindurchgeht. Ein weiterer Punkt dieser Geraden ist aber dadurch gegeben, dass bei nichterregtem Felde zwei zusammengehörende Werte von  $i$  und  $e$  bestimmt worden sind, z. B.  $i = 11,77 \cdot 10^{-5}$  Amp. und  $e = e_0 = 329$  Volt. Verbinden wir also den Punkt  $E$  der Spannungsaxe mit dem durch die Werte  $i$  und  $e_0$  bestimmten Punkt, so liegen alle Punkte, welche bei gleichem äusseren Widerstande zusammengehörende Werte von  $i$  und  $e$  darstellen, auf der Verbindungslinie. Wir erhalten somit Punkte der den verschiedenen Magnetfeldern entsprechen-

Tabelle III.

Elektrode A Kathode. Druck 0,41 mm.

| $J$ | Spannung der Accumulatoren 1975 Volt                           |      |      |      |       |       |       |      |
|-----|--|------|------|------|-------|-------|-------|------|
|     | Stärke des Entladungsstromes für $J = 0, 1 \cdot 10^{-5}$ Amp. |      |      |      |       |       |       |      |
|     | 11,7   | 21,8 | 36,4 | 77,3 | 116,4 | 148,0 | 186,2 | 570  |
| 0   | 383  | 372  | 419  | 518  | 620   | 684   | 735   | 1151 |
| 0,5 | 368  | 366  | 422  | 528  | 619   | 682   | 737   | 1128 |
| 1,7 | 380  | 404  | 435  | 531  | 619   | 675   | 730   | 1101 |
| 3,8 | 478  | 474  | 484  | 559  | 615   | 657   | 707   | 980  |
| 5,3 | 496  | 496  | 515  | 606  | 661   | 699   | 716   | 961  |

Tabelle IV.  
Elektrode A Kathode. Druck 0,41 mm.

| $J$ | Spannung der Accumulatoren 1985 Volt<br>Stärke des Entladungsstromes für $J = 0, i \cdot 10^{-5}$ Amp. |      |      |      |       |       |       |            |
|-----|--|------|------|------|-------|-------|-------|------------|
|     | 11,7   | 21,9 | 36,5 | 79,1 | 122,2 | 148,0 | 188,0 | 555        |
| 0   | 381  | 355  | 372  | 480  | 597   | 662   | 743   | 1220 $e_0$ |
| 0,5 | 342  | 350  | 364  | 443  | 514   | 596   | 660   | 1023       |
| 1,7 | 353  | 359  | 355  | 399  | 470   | 512   | 569   | 783        |
| 3,8 | 373  | 387  | 391  | 423  | 473   | 508   | 537   | 651        |
| 5,8 | 416  | 422  | 441  | 465  | 505   | 523   | 563   | 643        |

Die graphischen Darstellungen der Beobachtungen, die Charakteristiken der Kugel mit und ohne Erregung des Magnetfeldes für den Druck von 0,41 mm sind in den Figg. 3 und 4

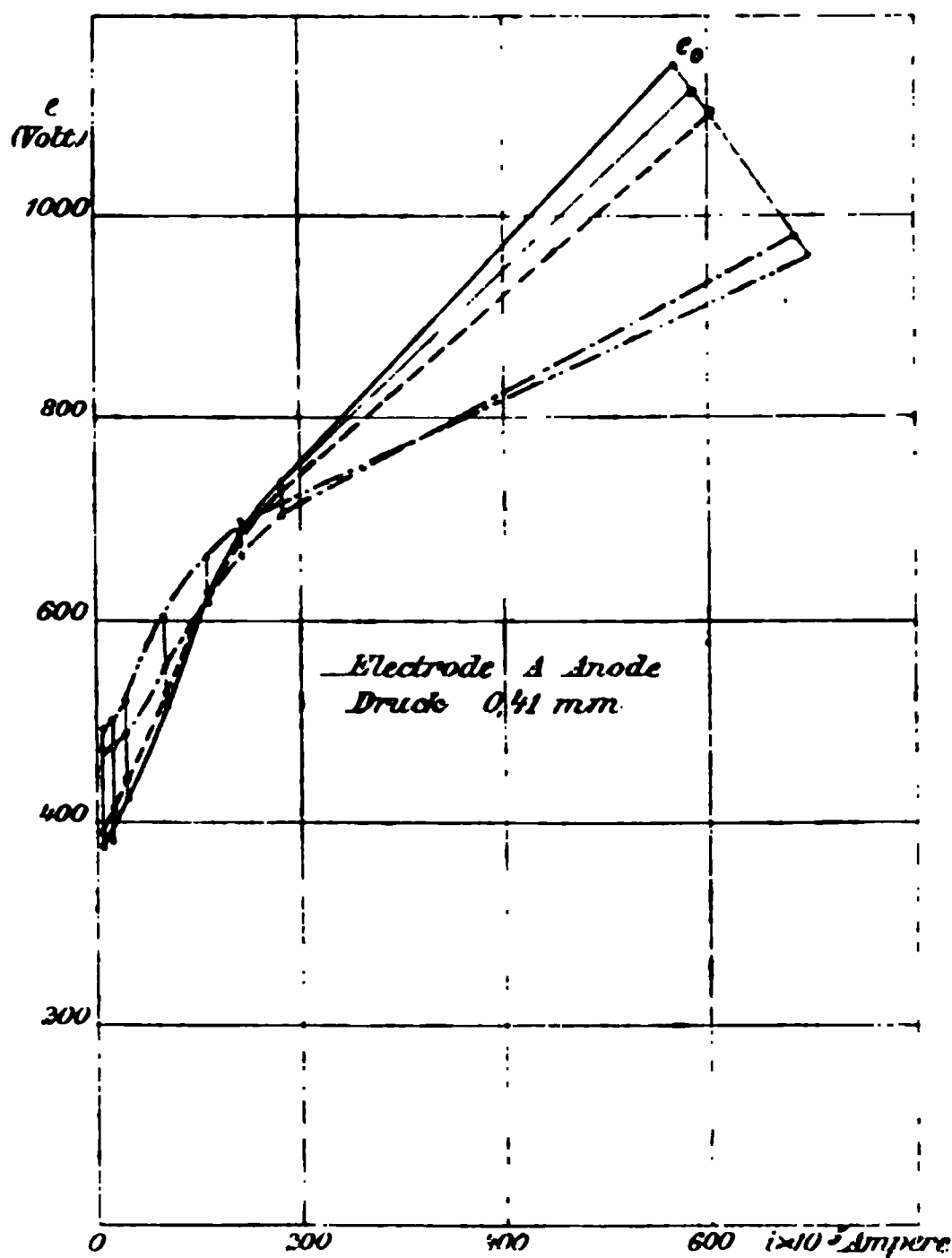


Fig. 3.

gegeben. Den Tab. III und IV, auf Grund deren die Figuren construiert worden sind, haftet eine gewisse Zufälligkeit an, sofern die in ihnen aufgeführten Spannungsdifferenzen von der

Fig. 4.

differenzen, welche verschiedenen Magnetfeldern entsprechen, auf gleiche Stromstärken reduciren. Dies ist geschehen in den Tab. V und VI.

Tabelle V.

Elektrode A Anode. Druck 0,41 mm.

| $r \cdot 10^5$<br>Amp. | Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères |      |      |     |     |
|------------------------|---|------|------|-----|-----|
|                        | 0   | 0,5  | 1,7  | 3,8 | 5,3 |
| 20                     | 393   | 393  | 405  | 475 | 500 |
| 40                     | 438   | 438  | 460  | 500 | 540 |
| 80                     | 530   | 530  | 547  | 567 | 620 |
| 120                    | 632   | 632  | 632  | 624 | 670 |
| 160                    | 704   | 704  | 698  | 678 | 700 |
| 200                    | 753   | 753  | 738  | 713 | 720 |
| 600                    | 1180  | 1130 | 1093 | 933 | 912 |

Tabelle VI.

Elektrode A Kathode. Druck 0,41 mm.

| $i \cdot 10^5$<br>Amp. | Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères |     |     |     |     |
|------------------------|---|-----|-----|-----|-----|
|                        | 0   | 0,5 | 1,7 | 3,8 | 5,8 |
| 20                     | 356   | 356 | 352 | 380 | 420 |
| 40                     | 392   | 382 | 362 | 392 | 435 |
| 80                     | 490   | 447 | 400 | 423 | 468 |
| 120                    | 587   | 505 | 455 | 460 | 512 |
| 160                    | 687   | 600 | 502 | 498 | 547 |
| 200                    | 753   | 658 | 559 | 527 | 561 |
| 600                    | 1288  | 960 | 700 | 597 | 607 |

Diese Tabellen geben endlich Veranlassung zu einer graphischen Darstellung, aus welcher der Einfluss des Magnetfeldes auf die Charakteristik noch einfacher zu erkennen ist. Wir berechnen die Differenzen zwischen den Spannungsdifferenzen im Magnetfeld und denen, welche bei gleicher Stärke des Stromes  $i$  ohne Magnetfeld auftreten. Tragen wir diese Differenzen als Functionen der Stromstärke  $i$  in das Coordinatennetz ein, so erhalten wir die Figg. 5 und 6. Man kann sich die Curven dieser Figuren auch durch den folgenden Process entstanden denken.

Wir nehmen an, die Punkte der in den Figg. 3 und 4 gezeichneten Curven seien beweglich in der Richtung der Axe  $e$ . Die Beweglichkeit sei aber an die Bedingung gebunden, dass die Punkte verschiedener Curven, welche auf einer Parallelen zu  $e$  liegen, in unveränderlichen Entfernungen bleiben. Man verschiebt dann in den Figg. 3 und 4 die Punkte der Curven,  $e_0$ , welche ohne Erregung des Magnetfeldes erhalten wurden, so, dass sie mit der Axe der Stromstärken zusammenfallen; dann nehmen die übrigen Curven die in den Figg. 5 und 6 gezeichneten Formen an.

In den Figg. 3 und 4 sind die Curven bei nichterregtem Felde stark, die Curven, welche der Stärke 0,5 Amp. des magnetisirenden Stromes entsprechen, schwach ausgezogen. Für den magnetisirenden Strom 1,7 Amp. ist die Curve gestrichelt, für 3,8 Amp. strich-punktirt; dem Strome 5,8 Amp. entspricht die Curve — . . —.

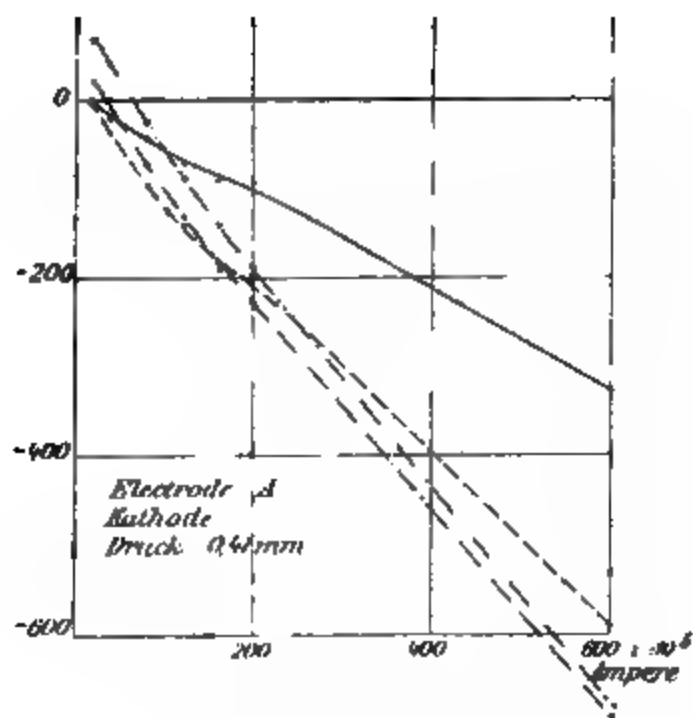


Fig. 6.

Curve  $e_0$  wird durch ein Magnetfeld im Sinne des Uhrzeigers gedreht. Die Drehung nimmt zu mit der Stärke des Feldes, und



*gleichzeitig rückt der Drehpunkt auf der Curve  $e_0$  im Sinne wachsender Stärken des Entladungsstromes fort.*

Der Vergleich der Curven, Figg. 3' und 5 einerseits, der Curven, Figg. 4 und 6 andererseits zeigt, dass *die Drehung sehr viel stärker ist, wenn A zur Kathode gemacht wird; zugleich liegen in diesem Falle die Drehpunkte der Curven dem Anfangspunkt der Axe i sehr viel näher.*

6. *Die Gesamtheit der bisher mitgetheilten Beobachtungen legt die folgenden Schlüsse nahe.* Der Einfluss des Magnetfeldes setzt sich aus zwei Teilen zusammen, von denen der eine auf den anodischen, der andere auf den kathodischen Teil der Entladung zu beziehen ist. Die Wirkung auf die positive Entladung bedingt eine Erhöhung des Entladungspotentiales, die auf die negative Entladung eine Verminderung. Beide Wirkungen hängen von der Stärke des Entladungsstromes in verschiedener Weise ab, sodass bei schwachen Strömen die erhöhende Wirkung auf die positive Entladung bei starken Strömen die erniedrigende Wirkung auf die negative Entladung überwiegt.

Es giebt daher stets eine bestimmte Stärke des Entladungsstromes, bei der das Magnetfeld keinen Einfluss auf das Entladungspotential hat; die hierzu erforderliche Stromstärke wächst mit der Feldintensität.

Die Wirkung des Magnetfeldes auf die positive Entladung besteht in einer Verlängerung der Strombahn, unter Umständen auch in einer Verkleinerung ihres Querschnittes. Beide Umstände bedingen eine Vergrößerung der Spannungsdifferenz. Die Wirkung des Magnetfeldes auf die negative Entladung besteht in einer Contraction des Kathodendunkelraumes und des Glimmlichtes, welche bei stärkeren Feldern sehr bedeutend ist. Damit muss eine Verminderung des Kathodengefälles Hand in Hand gehen.

7. Die im Vorhergehenden gewonnenen Sätze werden durch *Beobachtungen bei anderen Graden der Verdünnung* bestätigt und ergänzt.

Bei höheren Drucken hatte das Magnetfeld nur einen kleinen Einfluss auf das Entladungspotential. Bei dem Drucke von 14,6 mm wurde das Entladungspotential um 6 Volt ver-

**Tabelle VIII.**  
**Elektrode A Kathode. Druck 5,0 mm.**

| $\epsilon \cdot 10^6$<br>Amp. | Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères |     |     |     |
|-------------------------------|---|-----|-----|-----|
|                               | 0   | 1,8 | 2,7 | 3,8 |
| 20                            | 560   | 748 | 791 | 829 |
| 40                            | 433   | 624 | 643 | 745 |
| 80                            | 417   | 604 | 643 | 703 |
| 120                           | 425   | 568 | 600 | 647 |
| 160                           | 440   | 518 | 555 | 595 |
| 200                           | 445   | 520 | 556 | 597 |
| 1200                          | 493   | 530 | 587 | 628 |

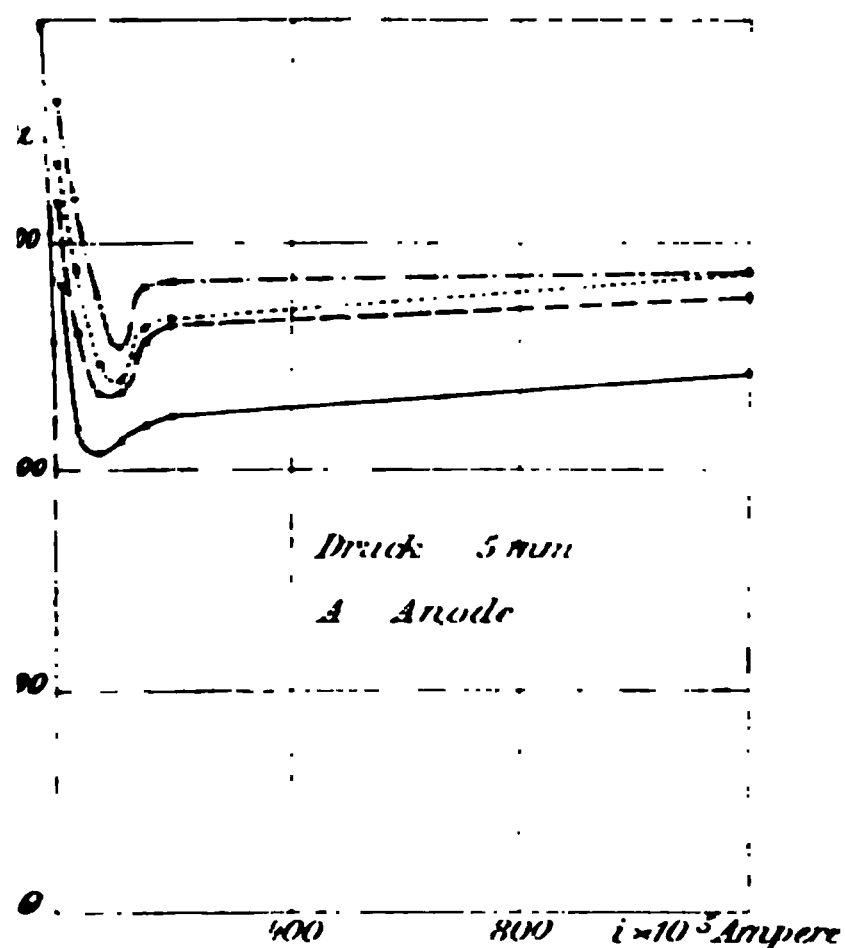


Fig. 7.

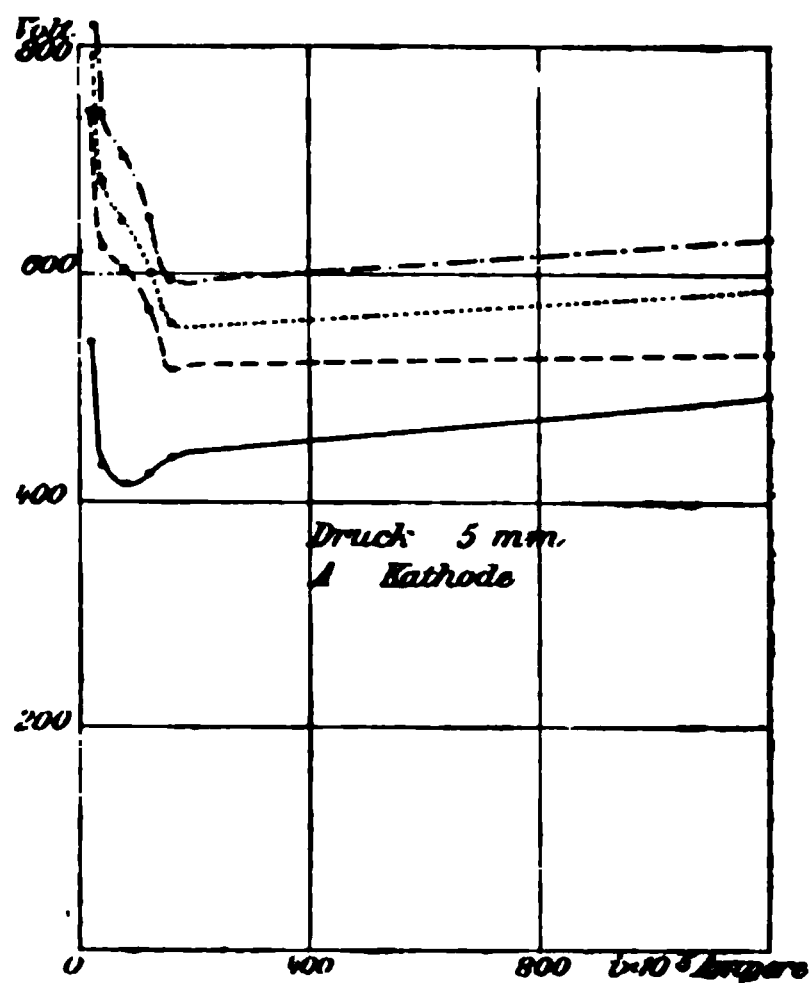


Fig. 8.

Ueber die Verhältnisse, wie sie sich bei einer Reihe von weiteren Drucken gestalten, geben die Tab. IX—XVIII, die Figg. 9—18 Aufschluss. Curven und Stärken der magnetischen neuen Ströme sind einander in folgender Weise zugeordnet:

|              |   |     |     |       |      |       |
|--------------|---|-----|-----|-------|------|-------|
| Stromstärke: | 0 | 0,5 | 1,8 | 2,8   | 3,8  | 5,8   |
| Curve:       | — | --- | --- | ..... | ---- | ..... |

Tabelle IX.

Elektrode A Anode. Druck 2,51 mm.

| $i \cdot 10^5$<br>Amp. | Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères |     |     |     |
|------------------------|---|-----|-----|-----|
|                        | 0   | 1,8 | 2,7 | 3,8 |
| 20                     | 450   | 485 | 525 | 544 |
| 40                     | 371   | 423 | 464 | 505 |
| 80                     | 394   | 455 | 489 | 535 |
| 120                    | 380   | 460 | 516 | 555 |
| 160                    | 365   | 411 | 467 | 505 |
| 200                    | 349   | 376 | 430 | 466 |
| 1200                   | 502   | 520 | 590 | 631 |

**Tabelle XII.**

**Elektrode A Kathode. Druck 1,26 mm.**

| <b><math>i \cdot 10^6</math><br/>Amp.</b> | <b>Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères</b> |            |            |            |
|---|--|------------|------------|------------|
|   | <b>0</b>   | <b>1,8</b> | <b>2,8</b> | <b>3,8</b> |
| <b>20</b>                                 | <b>320</b>   | <b>378</b> | <b>422</b> | <b>482</b> |
| <b>40</b>                                 | <b>317</b>   | <b>378</b> | <b>422</b> | <b>470</b> |
| <b>80</b>                                 | <b>322</b>   | <b>378</b> | <b>465</b> | <b>520</b> |
| <b>120</b>                                | <b>352</b>   | <b>416</b> | <b>477</b> | <b>516</b> |
| <b>160</b>                                | <b>392</b>   | <b>466</b> | <b>496</b> | <b>551</b> |
| <b>200</b>                                | <b>424</b>   | <b>478</b> | <b>512</b> | <b>558</b> |
| <b>1000</b>                               | <b>700</b>   | <b>600</b> | <b>600</b> | <b>628</b> |

Tabelle XIII.

Elektrode A Anode. Druck 0,21 mm.

| $i \cdot 10^5$<br>Amp. | Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères |     |     |     |     |
|------------------------|---|-----|-----|-----|-----|
|                        | 0   | 0,5 | 1,7 | 3,8 | 5,3 |
| 20                     | 360   | 365 | 375 | 435 | 500 |
| 40                     | 434   | 439 | 446 | 465 | 526 |
| 80                     | 578   | 582 | 572 | 589 | 587 |
| 120                    | 723   | 726 | 700 | 635 | 665 |
| 160                    | 875   | 878 | 805 | 716 | 745 |

Tabelle XIV.

Elektrode A Kathode. Druck 0,21 mm.

| $i \cdot 10^5$<br>Amp. | Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères |     |     |     |     |
|------------------------|---|-----|-----|-----|-----|
|                        | 0   | 0,5 | 1,7 | 3,8 | 5,8 |
| 20                     | 360   | 328 | 344 | 367 | 401 |
| 40                     | 434   | 383 | 370 | 416 | 440 |
| 80                     | 578   | 510 | 435 | 505 | 521 |
| 120                    | 723   | 615 | 514 | 570 | 600 |
| 160                    | 875   | 716 | 581 | 635 | 675 |

Tabelle XV.

Elektrode A Anode. Druck 0,08 mm.

| $i \cdot 10^5$<br>Amp. | Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères |      |      |     |     |
|------------------------|---|------|------|-----|-----|
|                        | 0   | 0,5  | 1,7  | 3,8 | 5,3 |
| 10                     | 597   | 577  | 557  | 615 | 661 |
| 20                     | 755   | 699  | 639  | 689 | 748 |
| 40                     | 947   | 882  | 816  | 795 | 842 |
| 80                     | 1330  | 1250 | 1077 | 947 | 990 |

Tabelle XVI.

Elektrode A Kathode. Druck 0,08 mm.

| $i \cdot 10^5$<br>Amp. | Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères |     |     |     |     |
|------------------------|---|-----|-----|-----|-----|
|                        | 0   | 0,5 | 1,7 | 3,8 | 5,8 |
| 10                     | 597   | 478 | 465 | 540 | 600 |
| 20                     | 755   | 588 | 568 | 613 | 659 |
| 40                     | 947   | 730 | 686 | 690 | 720 |
| 80                     | 1330  | 955 | 890 | 792 | 825 |

Fig. 9.

Fig. 10.

### Tabelle XVIII.

Elektrode  $\Delta$  Kathode. Druck 0,03 mm.

| $i \cdot 10^5$<br>Amp. | Stärke des magnetisirenden Stromes in Ampères |      |      |      |      |
|------------------------|---|------|------|------|------|
|                        | 0   | 0,5  | 1,7  | 3,8  | 5,3  |
| 5                      | 955   | —    | —    | 785  | 859  |
| 10                     | 1220  | 735  | 746  | 860  | 930  |
| 20                     | 1680  | 925  | 858  | 970  | 1040 |
| 30                     | —   | 1060 | 943  | 1050 | 1170 |
| 40                     | —   | 1190 | 1007 | 1120 | 1270 |

8. Die Beobachtungen gaben Veranlassung zu den folgenden Bemerkungen. Bei höheren Drucken zieht sich das nega-

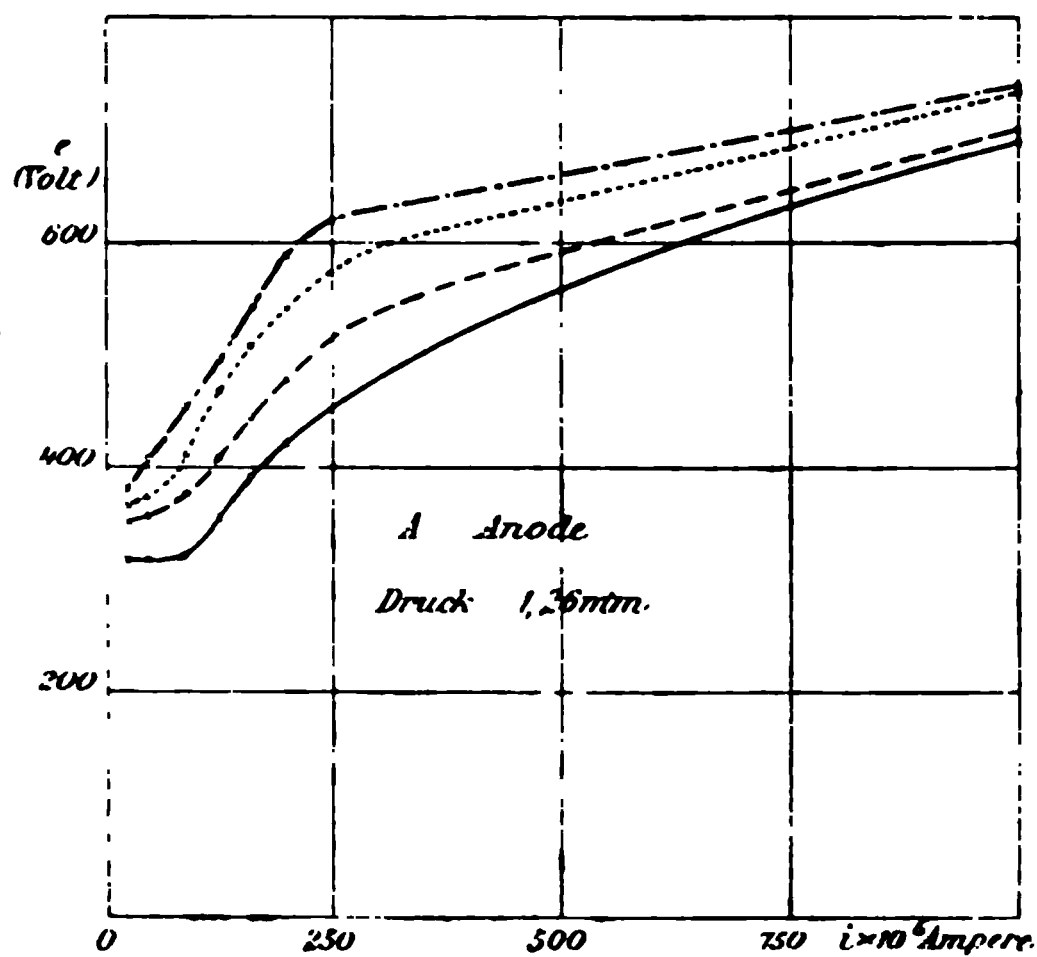


Fig. 11.

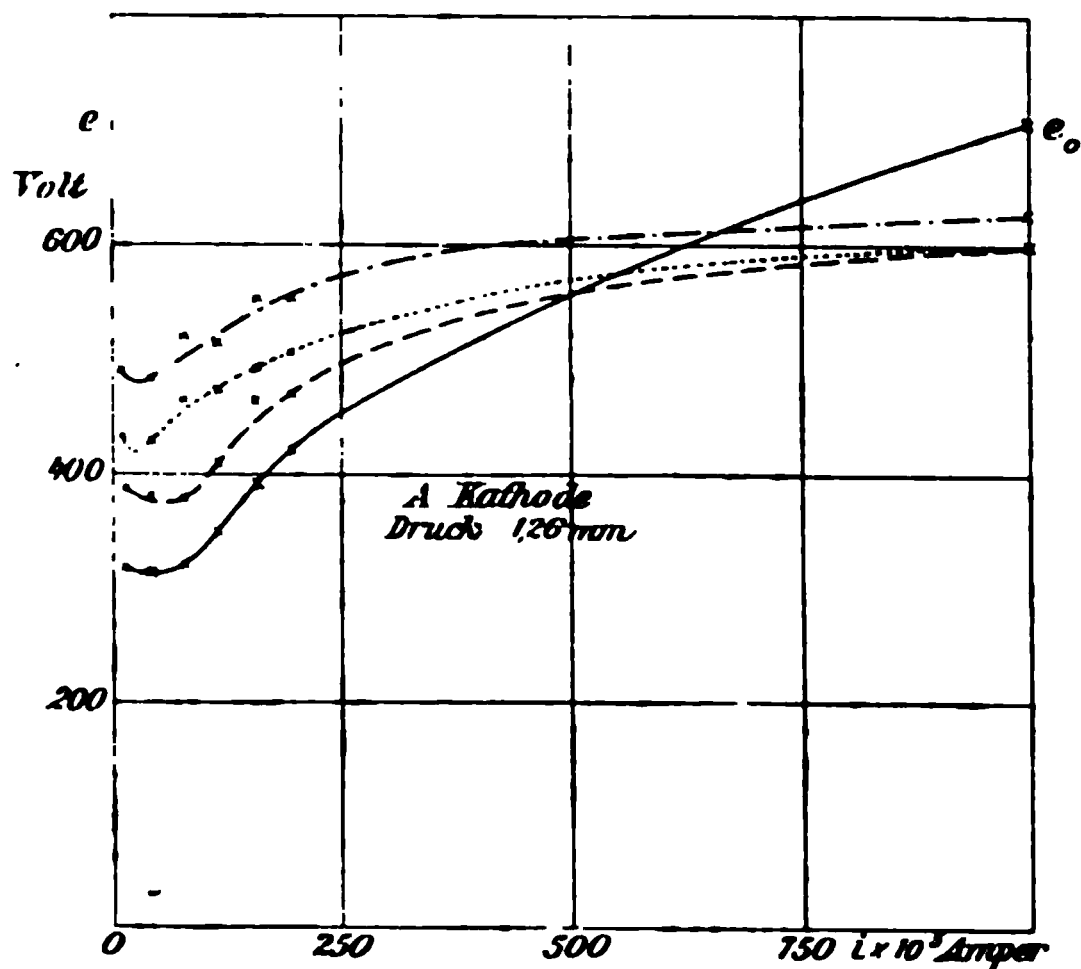


Fig. 12.

ve Glimmlicht auf eine dünne Schicht zusammen, welche die Kathode nur teilweise bedeckt. Man wird also vermuten, dass

Fig. 13.

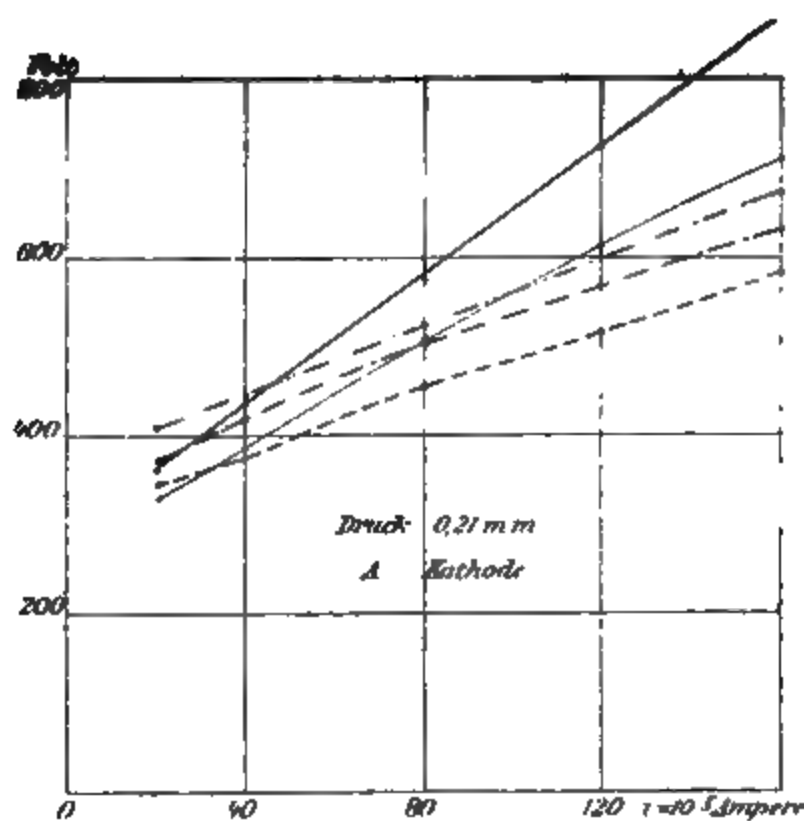


Fig. 14.

Entladung ausgetübt wird. In der That zeigen die Figg. 7—10 den Drucken von 5 und von 2,5 mm entsprechend, nur ein



Vergrößerung der Entladungsspannung durch den Magnet. Es fällt aber auf, dass die Wirkung entschieden stärker ist, wenn

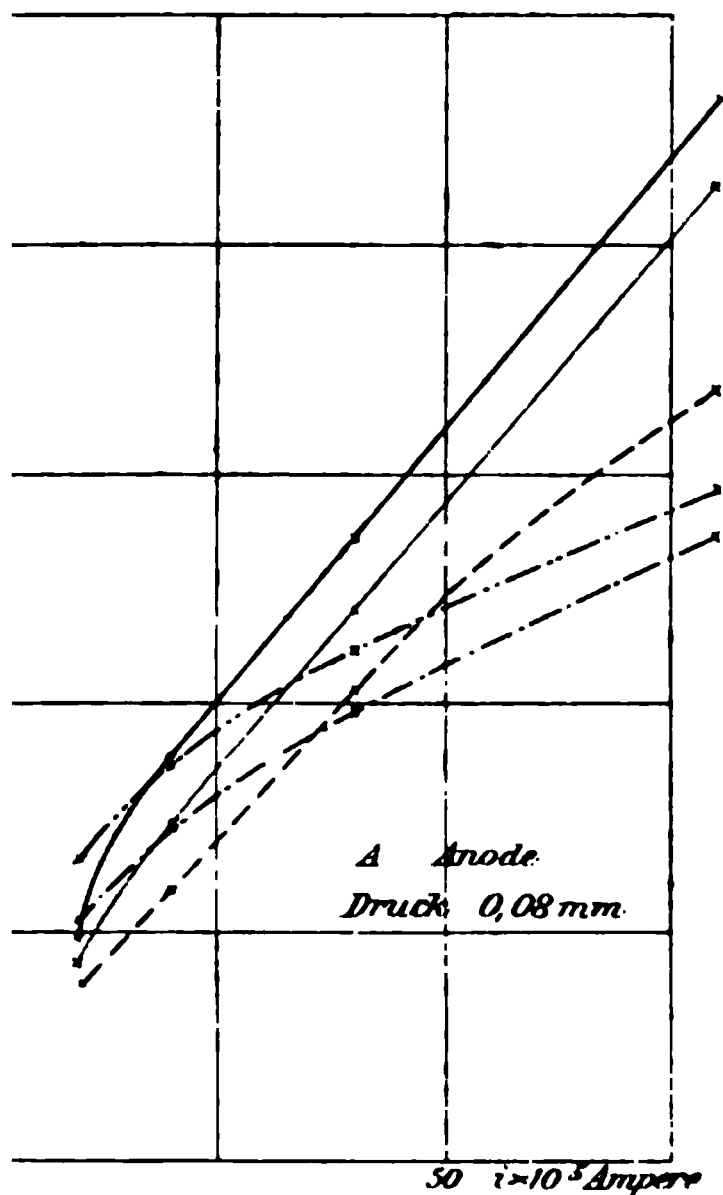


Fig. 15.

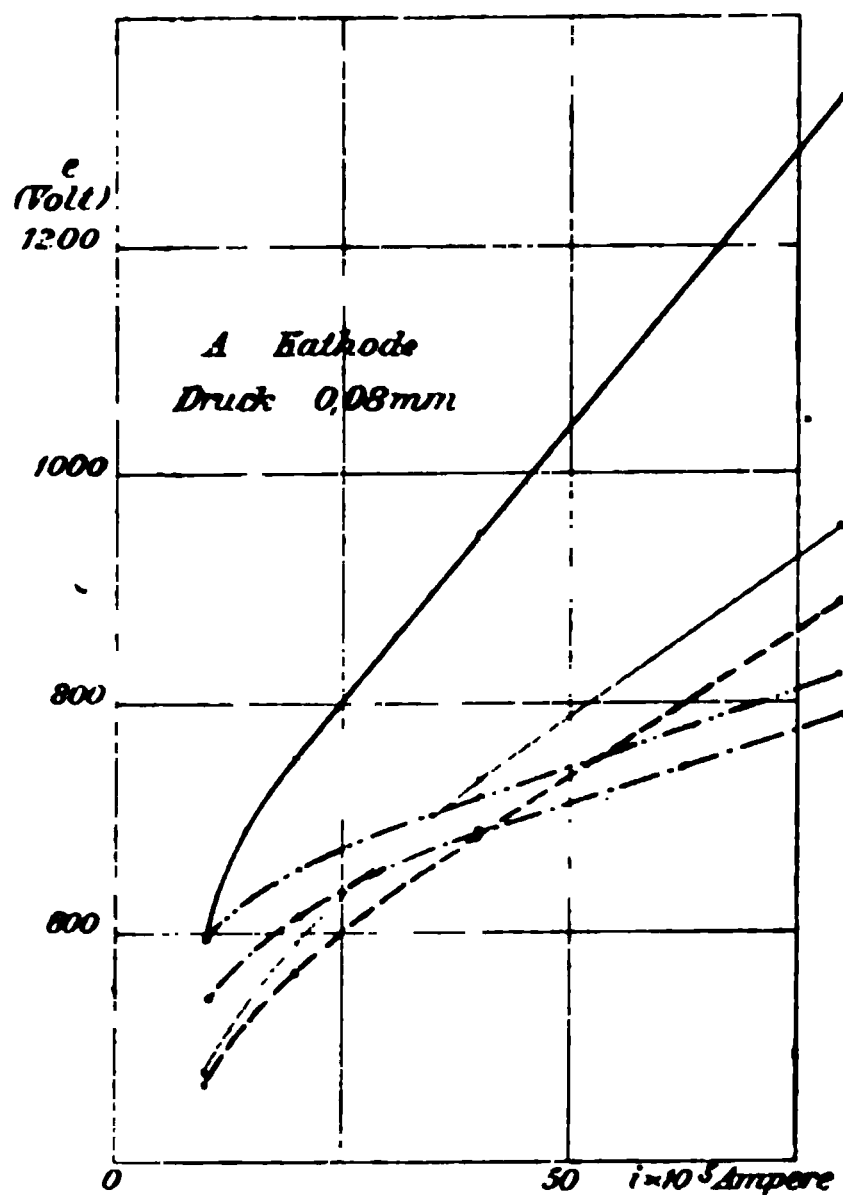


Fig. 16.

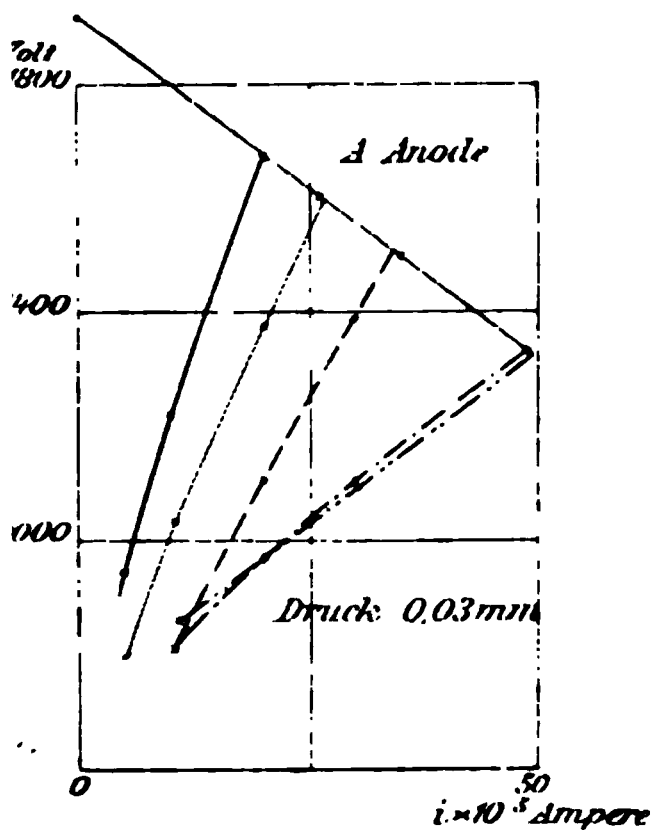


Fig. 17.

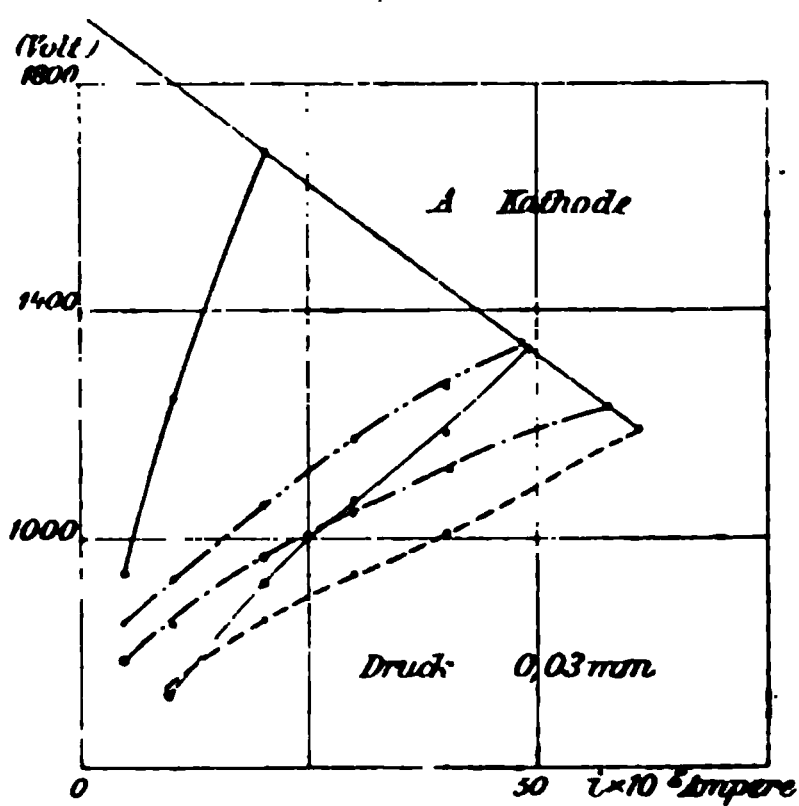


Fig. 18.

die vordere Elektrode *A* zur Kathode gemacht wird. Der Unterschied weist auf eine Asymmetrie der Wirkungen hin,

nur eintritt, wenn  $A$  Kathode ist, so wird man eine wirkliche Durchkreuzung zuerst in diesem Felde erwarten. Dies wird bestätigt durch die Figg. 11 und 12, welche dem Druck von 1,26 mm entsprechen. Dabei macht sich bei schwachen Strömen die Asymmetrie der Wirkung noch immer geltend; die anfängliche Vergrößerung der Spannung ist stärker, wenn  $A$  Kathode, als wenn  $A$  Anode ist. In Fig. 12 liegen die Schnittpunkte der im Magnetfeld erhaltenen Charakteristiken mit der Curve  $e_0$  zwischen  $i = 500 \cdot 10^{-5}$  Amp. und  $i = 670 \cdot 10^{-5}$  Amp. Die Beobachtungen, welche der nächsten Verdünnung mit dem Druck 0,41 mm entsprechen, sind zu Anfang ausführlich besprochen. *Die Durchkreuzung der Charakteristiken*, die wechselseitige Compensation der magnetischen Wirkungen, tritt jetzt unter allen Umständen ein. Ist  $A$  Anode, so liegen die Kreuzungspunkte der Charakteristiken wie der Curve  $e_0$  zwischen  $i = 100 \cdot 10^{-5}$  Amp. und  $i = 170 \cdot 10^{-5}$  Amp.; wenn  $A$  Kathode

ist, zwischen  $10 \cdot 10^{-5}$  und  $70 \cdot 10^{-5}$  Amp. Noch weiter im Sinne abnehmender Stromstärken verschieben sich die Kreuzungspunkte bei den Drucken von 0,21 und 0,08 mm. Im ersten Falle liegen die Punkte verschwindender magnetischer Wirkung zwischen  $40 \cdot 10^{-5}$  und  $84 \cdot 10^{-5}$  Amp., wenn  $A$  Anode ist, unter  $40 \cdot 10^{-5}$  Amp., wenn  $A$  zur Kathode gemacht wird. Beim Drucke von 0,08 mm liegen die fraglichen Punkte unterhalb von  $i = 20 \cdot 10^{-5}$  Amp., wenn  $A$  Anode ist, unterhalb von  $i = 10 \cdot 10^{-5}$  Amp., wenn  $A$  Kathode ist. Bei einem Drucke von 0,03 mm war die Entladungsspannung im Magnetfeld unter allen Umständen kleiner, wie ohne magnetische Wirkung.

Man kann hiernach sagen, dass die Sätze, welche zunächst für einen Druck von 0,41 mm ausgesprochen wurden, durch die Beobachtungen bei anderen Verdünnungen durchaus bestätigt werden. Als neu tritt die Asymmetrie der magnetischen Wirkung auf den positiven Teil der Entladung hinzu, welche bei höheren Drucken sich bemerklich macht.

Der Punkt, in dem die einander entgegengesetzten magnetischen Wirkungen sich compensiren, der Kreuzungspunkt der Charakteristiken im Magnetfeld mit den Curven  $e_0$ , liegt bei um so geringerer Stärke des Entladungsstromes, je geringer der Druck.

Die höchste Stromstärke, welche einem wirklich beobachteten Kreuzungspunkte entspricht, beträgt  $670 \cdot 10^{-5}$  Amp. Sie tritt ein bei dem Drucke von 1,26 mm und bei einem magnetisirenden Strome von 3,8 Amp., wenn  $A$  Kathode ist. Die kleinste Stromstärke, bei der ein Kreuzungspunkt wirklich beobachtet wurde, beträgt  $10 \cdot 10^{-5}$  Amp. Sie trat ein bei einem Drucke von 0,08 mm und bei einem magnetisirenden Strome von 5,3 Amp., während  $A$  Kathode war.

Die Resultate der Versuche stimmen im wesentlichen überein mit den Beobachtungen von Paalzow und Neesen.<sup>1)</sup>

Unter gewissen Umständen haben diese beiden Forscher *Maxima der magnetischen Wirkung* beobachtet. Solche Maxima müssen notwendig, und zwar bei gewissen mittleren Stärken der Entladungsströme, auftreten, wenn bei kleinen Stromstärken die Spannung mit dem Strome steigt, während sie bei starken

---

1) A. Paalzow und F. Neesen, Wied. Ann. 63. p. 209. 1897.



unmässiges Summen. Erst bei einem Druck von 0,41 mm schwieg das Telephon in der Regel bei mittleren Stromstärken, doch stellte sich zuweilen auch da leises Summen ein. Bei dem Druck von 0,21 mm waren die Entladungen meist stetig; nur in wenigen Fällen wurde ein leises Summen des Telephons gehört. Auch bei den Drucken von 0,08 und 0,03 mm hatten die Entladungen im wesentlichen den Charakter der Stetigkeit.

10. Ueber die *Beschaffenheit des Magnetfeldes* giebt Fig. 1 Aufschluss. Die ausgezogenen Linien, welche die Kraftlinien durchkreuzen, sind Linien gleicher Feldstärke. Die Werte der Feldstärken, deren Messung ich Hrn. Dr. Stark verdanke, sind für die hauptsächlich verwandten magnetisirenden Ströme in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XIX.

| Intensitäts-<br>curve | Stärke des magnetisirenden Stromes (Ampères) |     |     |     |
|-----------------------|--|-----|-----|-----|
|                       | 0,5  | 1,7 | 3,8 | 5,3 |
| I                     | 45   | 139 | 322 | 455 |
| II                    | 33   | 105 | 233 | 333 |
| III                   | 22   | 72  | 161 | 227 |
| IV                    | 15   | 50  | 111 | 155 |
| V                     | 11   | 33  | 78  | 111 |
| VI                    | 8  | 25  | 61  | 83  |

Die Beobachtungen wurden dadurch geprüft, dass die Werte der Feldintensität für die mit den Zahlen 1—5 bezeichneten Punkte der Intensitätscurven mit Hülfe der bekannten Eigenschaft der Potentialflächen aus den in der Axe gefundenen Werten abgeleitet wurden. Es ergab sich so die folgende Zusammenstellung berechneter und beobachteter Feldintensitäten  $\mathfrak{H}$  für einen magnetisirenden Strom von 5,3 Amp.

|                           | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|---------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\mathfrak{H}$ berechnet  | 477 | 336 | 231 | 138 | 113 |
| $\mathfrak{H}$ beobachtet | 455 | 333 | 227 | 155 | 111 |

Geht man längs der betrachteten Krafröhre fort, so ergibt sich aus dem Verhältniss der Querschnitte:  $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_5 = 3,9$ , dagegen aus den Beobachtungen:  $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_5 = 4,1$ .



### 13. *Experimentaluntersuchung über die Metallreflexion der elektrischen Schwingungen;* *von Karl F. Lindman.*

#### Einleitung.

Righi<sup>1)</sup> hat einige Versuche beschrieben, wonach es ihm gelungen wäre, eine elliptische Polarisierung der von einem Metallspiegel reflectirten Hertz'schen Wellen nachzuweisen. Auf eine 306 cm lange und 44 cm hohe Kupfertafel liess er elektrische Wellen von etwa 10 cm Länge so einfallen, dass ihre Schwingungsrichtung einen Winkel von  $45^\circ$  mit der Einfallsebene bildete. Als Resonator verwendete er, wie bei seinen übrigen Versuchen über elektrische Schwingungen, einen auf Glas niedergeschlagenen Silberstreifen, der in der Mitte durch einen feinen Strich unterbrochen war. Um bei grösseren Einfallswinkeln die vom Oscillator ausgehenden Strahlen nicht direct zum Resonator gelangen zu lassen, wurde der Resonator in einer möglichst grossen Entfernung, etwa 400 cm, von der Mitte der Kupfertafel aufgestellt. Mittels dieser Anordnung verfolgte er die Reflexion am Kupfer für Einfallswinkel bis zu  $82^\circ$ . Der Resonator wurde um eine durch den Mittelpunkt der Tafel gehende Axe gedreht, wobei das Funkenspiel in der Mitte desselben beobachtet wurde. Es zeigte sich nun bei einem Einfallswinkel von etwa  $81^\circ$ , dass bei jeder Orientierung des Resonators Funken, wenn auch von verschiedener Intensität, auftraten. Bei einer vollständigen Drehung constatirte er zwei Maxima und zwei Minima, welche zwei zu einander orthogonalen Orientierungen entsprachen. Es waren dies, nach der Ansicht Righi's, die Richtungen der Axen einer elliptischen Schwingung. Wenn er bei unverändertem Einfallswinkel (d. h.  $81^\circ$ ) den Oscillator so drehte, dass die Schwingungsrichtung der elektrischen Wellen mit der Einfallsebene einen Winkel von  $59^\circ$  bildete, fand er die Intensität der Funken

1) A. Righi, Die Optik der elektrischen Schwingungen p. 150. 1898.





der grossen Leitfähigkeit der Metalle die Natur derselben einen merkbaren charakteristischen Einfluss auf Wellen von der Grössenordnung der Hertz'schen kaum äussern könne. Er betrachtet speciell die Reflexion am Kupfer und findet, dass für Wellen, deren Länge  $\lambda$  von der Grössenordnung 100 cm ist, die entsprechenden Amplituden der directen und der reflectirten Schwingungen bei jeder Incidenz entgegengesetzt gleich sind und dass die Phasenänderung stets gleich  $\pi$  ist (auf Quantitäten von der Ordnung  $1/100000$  genau).

Zu ganz analogen Ansichten ist auch Drude gekommen. Aus den Formeln für die Metallreflexion, welche er im XI. Kapitel seiner Arbeit „Physik des Aethers“ auf Grundlage der Maxwell'schen Theorie entwickelt hat, schliesst er, dass die von einer Metallebene reflectirten elektrischen Wellen, sogar wenn sie von der Grössenordnung  $\lambda = 10$  cm sind, hinsichtlich ihrer Intensität und ihres Polarisationszustandes für jeden Einfallswinkel nahezu identisch mit den einfallenden Wellen seien.

Später hat auch Drude<sup>1)</sup> gezeigt, dass die von Giese begründete Ionentheorie der Metalle zu einer einfachen und widerspruchsfreien Erklärung der optischen Eigenschaften der Metalle führt. Die Annahme zweier Ionengattungen, einer positiv und einen negativ geladenen, genügt, um das optische Verhalten des Nickels, sogar den Gang der Dispersion darzustellen. Für sehr langsame Perioden (Hertz'sche Wellen) verschwindet dagegen der Einfluss dieser Ionen, sodass die Eigenschaften des Metalles hinsichtlich solcher Wellen sich lediglich aus seiner Leitfähigkeit bestimmen. Diese beiden Ionengattungen reichen also auch nicht aus, um die oben referirten Righi'schen Versuche zu erklären. Es wäre aber doch, wie auch Drude hervorhebt, denkbar, dass die Metalle auch noch wesentlich schwerere Ionen enthalten, deren Einfluss optisch unwirksam ist, während sie für Hertz'sche Wellen einen Einfluss äussern könnten.

Sowohl nach der Maxwell-Hertz'schen Theorie als nach den ionentheoretischen Anschauungen erscheinen also die Righi'schen Versuchsergebnisse als sehr zweifelhaft.

---

1) P. Drude, Physikal. Zeitschr. 1. p. 161—165. 1900.



stäben  $S$  und  $S'$  befestigt, welche von aussen gedreht werden können, sodass die Abstände zwischen den Kugeln und den Primärleitern sich nach Belieben verändern lassen.  $O$  und  $O'$  sind zwei Ringe aus Ebonit, welche den schädlichen Einfluss<sup>1)</sup> des ultravioletten Lichtes der seitlichen Funken auf die Primärfunken beseitigen. Um die Funken von aussen sichtbar zu machen, sind die Wände des Ebonitkastens mit zwei Glasfenstern versehen.

Fig. 2 zeigt den Oscillator mit Stativ und Wellenreflector.

Der parallelepipedförmige Ebonitstab  $F$ , welcher den Oscillator trägt, lässt sich horizontal verschieben, sodass die Primärleiter in die Brennpunktlinie des parabolischen Reflectors sich leicht einstellen lassen. Der letztere besteht aus einem 40 cm hohen und 40 cm breiten an den Holzstab  $H$  angeschraubten Stück dünnen Messingbleches. Um demselben die gewünschte

Fig. 2.

parabolische Form zu geben, braucht man nur die beiden ausgeglühten ziemlich dicken Messingstreifen  $M$  und  $M'$  nach einer gezeichneten Parabelcurve zu biegen und dann an das Spiegelblech so zu befestigen, wie aus der Figur hervorgeht. Der Hohlzylinder  $C$  lässt sich nebst Reflector und Oscillator um eine horizontale Axe drehen. Das Azimut der ausgestrahlten Schwingungen wird mittels des von  $F$  getragenen Zeigers  $Z$  auf dem Teilkreise  $G$  abgelesen.

Zum Erregen der Funken im Oscillator dienten ein Inductium von mittlerer Grösse, getrieben mit fünf Accumulatoren, und ein Oeltransformator nach Tesla nebst Condensator und Funkenstrecke (Zinkspitzen). Die Schaltung wird durch

1) Vgl. H. Hertz, Ges. Werke 2. p. 100. 1895.



Stellen  $LL$  sind die Enden zweier Kupferdrähte, die mit einem Galvanometer vereinigt werden können, an zwei federnde Streifen  $KK$  aus dünnem Kupferblech gelötet. Diese sind mit Siegellack voneinander isolirt und strecken sich in den Hohlraum eines Ebonitkörpers  $E$  hinein, wo sie mit dem Thermoelement  $T$  verbunden sind. Die vordere Hälfte dieses Ebonitkörpers ist an den Stellen  $aa$  mit Kitt an der hinteren befestigt. Oberhalb und unterhalb der beiden Kupferbleche  $KK$  sind zwei isolirte Kupferscheiben  $S$  zum Schutz gegen Inductionswirkungen von aussen angebracht. Ihre äusseren Enden strecken sich in das etwa 40 cm lange Metallrohr  $M$  hinein.

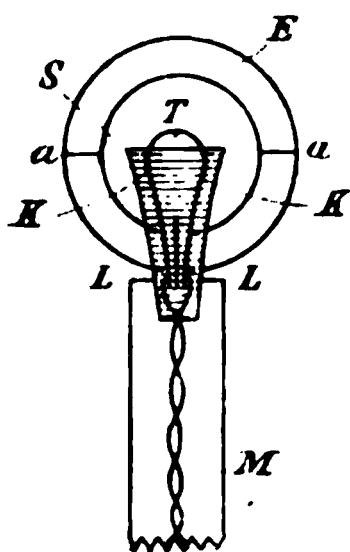


Fig. 4.

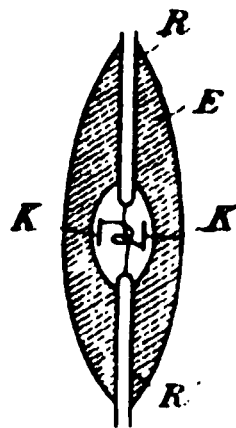


Fig. 5.

Fig. 5 zeigt den Resonator im Längsdurchschnitt.  $E$  ist der Ebonitkörper, dessen Länge 1,5 cm beträgt.  $R$  und  $R'$  sind zwei 7 mm lange und 1 mm weite Hohlzylinder aus Kupferblech, welche zusammen mit dem zwischen sie geschalteten Thermoelement den Secundärleiter für die elektrischen Wellen bilden. Das Thermoelement besteht aus Drähten von Platin bez. Constantan. Der Platindraht, den ich durch Wegätzen des Silbers eines Wollastondrahtes erhielt, hat einen Durchmesser von nur 0,007 mm, während der Constantandraht 0,015 mm dick ist (durch Ziehen des letzteren gegen die scharfe Kante einer Glasplatte hatte ich seine ursprüngliche Dicke, 0,025 mm, etwas verringert). Diese Drähte sind zweimal umeinander geschlungen und an den vorher erwähnten Kupferblechen  $KK$  mit Lot befestigt. Als ich nämlich zuerst die Drähte einfach umeinander schlang, hörte nach einigen Stunden, wahrscheinlich infolge von Ausdehnung, der Contact zwischen ihnen auf, und ein stärkeres Anspannen war wegen ihrer



von Scala und Fernrohr war 2,5 m. 1 mm Ausschlag entsprach einer Stromstärke von  $1,01 \cdot 10^{-8}$  Amp.

Da die Dielektricitätsconstanten von Ebonit bez. Siegelack, womit der hier in Betracht kommende Resonator umgeben ist, grösser als Eins sind, so ist auch die halbe zugehörige Wellenlänge grösser als die geometrische Länge des Resonators. Als ich nach der Methode mit stehenden Wellen vor einem Metallspiegel die Wellenlänge des unverlängerten Resonators maass, erhielt ich für die halbe Wellenlänge den Wert 4 cm, während der Resonator selbst, wie schon oben erwähnt, nur 1,8 cm lang war. Verlängert man dagegen den Resonator mittels Kupferdrähten, die Luft zur unmittelbaren Umgebung haben, so nähert sich die halbe Wellenlänge immer mehr der Länge des Resonators. War z. B. der letztere 4 cm lang, so war die halbe Wellenlänge 5 cm, während der 9,6 cm lange Resonator einer halben Wellenlänge von 10 cm entsprach. — Die Boltzmann'sche Interferenzmethode mit zwei verschiebbaren Metallspiegeln gab für die gemessenen Wellenlängen, wie zu erwarten war, dieselben Werte wie die Methode mit den stehenden Wellen.

Da die beiden Primärleiter je 2,5 cm lang sind, sollte eigentlich die Grundschiwingung des Oscillators eine Länge von etwas über 10 cm haben. Die aus Ebonit und Petroleum bestehende nächste Umgebung dieser Leiter scheint jedoch eine erhebliche Verlangsamung dieser Grundschiwingung zu bewirken. Als ich die Länge des Resonators, welcher ohne Reflector in einem unveränderten Abstand vom Oscillator aufgestellt war, allmählich vergrösserte, erreichten die Galvanometerausschläge ein Maximum erst wenn der Resonator 9,6 cm lang war, entsprechend einer halben Wellenlänge von 10 cm. Es ist aber auch denkbar, dass die Zuleitungsdrähte, welche von dem Teslatransformator ausgingen, Schwingungen ausstrahlten, die sich mit den von den Primärleitern ausgehenden Wellen superponirten und die Gestalt der Resonanzcurve veränderten.

Nach diesen Wellenlängenmessungen entschloss ich mich, die Versuche über die Metallreflexion der Schwingungen zuerst mit einem Resonator von der Länge 9,6 cm (entsprechend einer halben Wellenlänge von 10 cm) anzustellen und sie nachher mit kürzeren Resonatoren zu wiederholen.





ausschläge bei verschiedenen Azimuten des Resonators wie die Quadrate der zu dem Resonator parallelen Componenten von der Amplitude der oscillirenden elektrischen Kraft. Sind die Wellen linear polarisirt, so haben die Ausschläge ihr Maximum, wenn Oscillator und Resonator miteinander parallel sind, und verschwinden, wenn der Resonator um einen rechten Winkel gedreht wird. Tritt ein solches Verschwinden der Galvanometerausschläge nicht ein, sodass sie lediglich durch ein Minimum gehen, so sind die Wellen als elliptisch polarisirt aufzufassen. Die Axen der elliptischen Schwingung fallen mit den Richtungen des Resonators zusammen, die einer maximalen bez. minimalen Wirkung im Galvanometer entsprechen. Eine circulare Polarisation würde sich durch gleiche Ausschläge bei jeder Orientirung des Resonators auszeichnen.

Um ein möglichst paralleles Strahlenbündel zu erzielen entfernte ich den Oscillator soweit wie möglich von der Oeffnung des Metallkastens, worin er eingeschlossen war und stellte vor diese Oeffnung mehrere Metallschirme mit gleich grossen kreisförmigen Oeffnungen auf. Ich konnte so, wenn der Resonator 9,6 cm lang war, die von dem grossen Stanniolschirme reflectirten Schwingungen bis zu einem Einfallswinkel von  $79^{\circ}$  studiren, ohne eine directe Einwirkung zu befürchten. Versuchte ich aber weiter zu gehen, indem ich den Durchmesser der Diaphragmen verkleinerte und den Abstand des Resonators vom Spiegel vergrösserte, so wurde die Wirkung im Galvanometer so gering, dass ein sicheres Urtheil über die seitlichen Eigenschaften der Wellen nicht mehr als zulässig erschien. Wurde aber der Resonator verkürzt, bis die entsprechende Wellenlänge 10 cm war und der ursprüngliche grosse Wellenreflector des Empfängers durch einen kleineren ersetzt, so konnte ich die Reflexion bis zu einem Einfallswinkel von  $83^{\circ}$  verfolgen.

Als ich die elektrischen Wellen so einfallen liess, dass ihre Schwingungsrichtung mit dem Spiegel einen Winkel von  $45^{\circ}$  bildete, glaubte ich zuerst in der That eine deutliche Ellipticität der reflectirten Wellen bei grossen Einfallswinkeln constatiren zu können. Es zeigte sich aber doch nachher, dass dies auf Fremdwirkungen, hauptsächlich auf einer ungenügenden Abschirmung der directen Strahlen beruhte. Ich



gehörigen Teilkreisen von hinten abgelesen wurden, wurden als positiv gerechnet in der zu dem Drehungssinn des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung. Das Azimut des Oscillators war hier stets  $+45^\circ$ . Der Einfallswinkel ist mit  $i$  bezeichnet, während  $\beta$  das Azimut des Resonators und  $s$  das in Millimetern ausgedrückte Mittel aus drei Galvanometerablesungen ist. Für  $s = 100$  mm weichen die einzelnen Ausschläge höchstens um 2 mm voneinander ab.

| $i$ | $\beta$ | $s$   | $i$ | $\beta$ | $s$  |
|-----|---------|-------|-----|---------|------|
| 15° | 0°      | 72,3  | 75° | 0°      | 8,0  |
|     | 90      | 72,7  |     | 90      | 8,0  |
|     | +45     | 139,7 |     | +45     | 15,7 |
|     | -45     | 0     |     | -45     | 0    |
| 30  | 0       | 71,7  | 77  | 0       | 6,0  |
|     | 90      | 72,3  |     | 90      | 6,0  |
|     | +45     | 141,7 |     | +45     | 12,0 |
|     | -45     | 0     |     | -45     | 0    |
| 50  | 0       | 46,3  | 79  | 0       | 4,0  |
|     | 90      | 45,3  |     | 90      | 4,0  |
|     | +45     | 88,0  |     | +45     | 8,0  |
|     | -45     | 0     |     | -45     | 0    |
| 65  | 0       | 30,3  | 81  | 0       | 3,0  |
|     | 90      | 30,0  |     | 90      | 3,0  |
|     | +45     | 61,0  |     | +45     | 6,0  |
|     | -45     | 0     |     | -45     | 0    |
| 70  | 0       | 18,0  | 82  | 0       | 2,0  |
|     | 90      | 18,0  |     | 90      | 2,0  |
|     | +45     | 35,3  |     | +45     | 4,0  |
|     | -45     | 0     |     | -45     | 0    |
| 73  | 0       | 11,0  | 83  | 0       | 1,5  |
|     | 90      | 11,0  |     | 90      | 1,5  |
|     | +45     | 20,0  |     | +45     | 3,0  |
|     | -45     | 0     |     | -45     | 0    |

Aus diesen Zahlen geht nun deutlich hervor, dass eine Ellipticität der reflectirten Schwingungen nach der bisherigen Methode nicht zu constatiren ist. Sie lassen vielmehr darauf schliessen, dass innerhalb der hier erreichten Genauigkeit bei



3. Erfolgt die einfallenden Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene und war der Resonator parallel zur Drehungsaxe des Spiegels und in einem unveränderten Abstände in der unmittelbaren Nähe von derselben aufgestellt, so nahm, bei wachsendem  $i$ , die beobachtete Intensität stetig ab, um bei grossen Einfallswinkeln zu verschwinden. Die bei abnehmenden Einfallswinkeln wachsenden Ausschläge rührten von dem Gangunterschiede der directen und reflectirten Strahlen her, der bei streifender Incidenz verschwindet. Die durch die Reflexion herbeigeführte Phasenänderung der senkrecht zur Einfallsebene stattfindenden Schwingungen kann also auch bei den grössten Einfallswinkeln nicht merklich von  $\pi$  abweichen.

4. Erfolgt die Schwingungen in der Einfallsebene und war der Resonator senkrecht zur Drehungsaxe des Spiegels, aber parallel zum Spiegel selbst in einem unveränderten Abstände (1 cm) von demselben aufgestellt, so nahm ebenfalls, bei wachsendem  $i$ , die Intensität ab. Die auf den Resonator wirkenden Componenten der directen und reflectirten Wellen nahmen aber gleichzeitig ab und wurden schliesslich so minimal, dass ein Schluss über die durch Reflexion bewirkte Phasenänderung in diesem Falle wenigstens für grössere Einfallswinkel nicht statthaft ist.



5. Der Resonator — 4 cm lang — wurde jetzt senkrecht zum Spiegel orientirt, sodass der Abstand seiner Mitte vom Spiegel 3 cm be-

$i \cdot 50^\circ \quad 60^\circ \quad 70^\circ \quad 80^\circ \quad 90^\circ$

Fig. 7.

trug, und die Galvanometerausschläge wurden beim Variiren von  $i$  beobachtet, während der Oscillator fortwährend zur Einfallsebene parallel war. Ich erhielt dann für grosse Einfallswinkel die Curve I in Fig. 7.

Nach dem Entfernen des Spiegels gab der Resonator allein, in seine letzten Lagen zurückgedreht, die Curve II. Der Verlauf dieser beiden Curven stimmt nun, wie wir gleich einsehen



Für  $i > 87^\circ$  nahmen die Ausschläge etwas ab, was sich jedoch dadurch erklären lässt, dass in diesem Falle das durch das Diaphragma austretende Strahlenbündel von dem reflectirenden Spiegel geteilt wurde, sodass die Gesamtintensität der einfallenden Wellen herabgesetzt wurde.

6. Es wurde nun die Drehungsaxe des Spiegels etwa um 1 dm seitwärts verschoben und die Anordnung getroffen, dass die Wellen unter einem Azimut von  $45^\circ$  *streifend* einfielen, während der Resonator in der Verlängerung des Spiegels aufgestellt war. Der Resonator wurde um seine horizontale Axe gedreht und die Ausschläge ( $s$ ) in verschiedenen Azimuten ( $\beta$ ) des Resonators gemessen. In der folgenden Tabelle sind die gefundenen Werte zusammengestellt.

| $\beta$     | $s$ (mm) | Mittel | $\beta$     | $s$ (mm) | Mittel |
|-------------|----------|--------|-------------|----------|--------|
| $0^\circ$   | 0        | 0      | $+90^\circ$ | 125      | 125,0  |
|             | 0        |        |             | 124      |        |
|             | 0        |        |             | 126      |        |
| $+45^\circ$ | 63       | 63,0   | $-45^\circ$ | 62       | 62,7   |
|             | 63       |        |             | 63       |        |
|             | 63       |        |             | 63       |        |

Nach dem Entfernen des Spiegels wurde gefunden:

| $\beta$     | $s$ (mm) | Mittel |
|-------------|----------|--------|
| $-45^\circ$ | 64       | 64,8   |
|             | 65       |        |
|             | 64       |        |
| $+45^\circ$ | 0        | 0      |
|             | 0        |        |
|             | 0        |        |

Bei Anwesenheit des Spiegels zeigte also der Resonator in den beiden zu einander senkrechten Azimuten  $-45^\circ$  und  $+45^\circ$  dieselbe Wirkung, im Azimut  $90^\circ$  die doppelte und für  $\beta = 0$  keine Wirkung. Für  $\beta = -45^\circ$  war der Spiegel ohne Einfluss.





fallswinkeln ohne den Abstand zwischen dem Resonator und der Mitte des Spiegels zu verändern. Ich erhielt dann folgende Werte ( $s$  bezeichnet wieder das Mittel aus drei Ablesungen):

| $i$ | $s$ (mm) |
|-----|----------|
| 15° | 108,7    |
| 20  | 109,7    |
| 30  | 107,3    |

Ich entfernte dann den Spiegel und maass die Intensität des directen Strahlenbündels bei unverändertem Abstände zwischen dem Resonator und der Mitte der Kreisscheibe, welche zur Messung der Drehung des Spiegels diente. Ich fand dann als Mittel aus fünf Ablesungen, die höchstens um 3 mm voneinander abwichen:

$$s = 108,0 \text{ mm.}$$

Bei grösseren Einfallswinkeln musste ich den Abstand des Resonators von der Mitte des Spiegels vergrössern und ausserdem die seitlichen Strahlen soweit wie möglich abschirmen. Es ergab sich:

| $i$ | $s$ (mm) | $i$ | $s$ (mm) |
|-----|----------|-----|----------|
| 30° | 62,7     | 70° | 12,0     |
| 40  | 63,3     | 75  | 12,0     |
| 40  | 35,0     | 75  | 7,0      |
| 50  | 34,7     | 79  | 7,0      |
| 60  | 34,3     | 79  | 3,0      |
| 60  | 19,0     | 82  | 3,0      |
| 70  | 19,3     |     |          |

Auch diejenigen Messungen, die ich mit parallel zur Einfallsebene stattfindenden Schwingungen ausführte, führten zu analogen Ergebnissen, was ja auch nach den früheren Versuchen zu erwarten war.

Trägt man die verschiedenen Einfallswinkel als Abscissen, die gemessenen Intensitäten der reflectirten Wellen als Ordinaten auf, so ist die dadurch erhaltene Curve eine zu der Abscissen-



sein mit den hier benutzten Wellenindicators sich nicht nachweisen lässt.

Da die Empfindlichkeit dieser Resonatoren wohl nicht kleiner ist als die der Righi'schen, so scheint nichts anderes übrig zu bleiben, als die in der Einleitung referirten Righi'schen Versuche auf nicht genügend beachtete fremde Wirkungen zurückzuführen. Es ist denkbar, dass, wenn die directen Strahlen auch so schwach waren, dass sie allein keine Funken im Resonator hervorriefen, sie doch, nachdem solche Funken durch die reflectirten Wellen einmal erregt waren, die Intensität derselben steigern oder verkleinern konnten, je nach dem Gangunterschied der directen und der reflectirten Wellen. Vielleicht waren auch bei diesen Versuchen störende Reflexionen von den Zimmerwänden oder von irgend welchen anderen Gegenständen vorhanden.

Zum Schluss ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer und Chef, Hrn. Professor Dr. O. Wiener, für die vielfachen fördernden Ratschläge und die in weitgehender Weise mir zur Verfügung gestellten Mittel des Institutes meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Auch den Herren Professor Dr. P. Drude und Professor Dr. O. Wiedeburg bin ich für viele wertvolle Ratschläge zu grossem Dank verbunden.

Leipzig, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 8. Januar 1901.)

---



über, die vom Anfangspunkte die Entfernung  $p$  habe. Es ist dann

$$p = \frac{l}{w}$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{a w}, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{b w}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{c w}$$

mit

$$w^2 = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2.$$

Nennen wir das Flächenstück, in welches  $F$  vermöge der Deformation übergeht,  $F_1$ , die Projectionen von  $F$  bez.  $F_1$  auf die  $xy$ -Ebene  $F''$  bez.  $F''_1$ , so bestätigen wir leicht die Richtigkeit der drei Gleichungen

$$F'' = F \gamma,$$

$$F''_1 = F_1 \cdot \frac{\gamma}{c w},$$

$$F''_1 = F'' \cdot a b.$$

Aus ihnen erhalten wir sofort

$$F_1 = F a b c w,$$

und wenn wir noch für  $w$  den Wert  $l/p$  einsetzen,

$$(1) \quad F_1 = a b c \frac{l}{p} F,$$

womit wir unsere Frage beantwortet haben.

Wir wenden die Formel (1) auf ein Flächenelement  $ds$  unserer Kugel an, für welches  $l = 1$  ist. Dieses Flächenelement geht durch die Deformation in das Flächenelement  $d\sigma$  des Ellipsoids über; und es ist also nach (1)

$$(2) \quad d\sigma = \frac{a b c}{p} ds.$$

Dabei bedeutet  $p$  das Lot vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die  $d\sigma$  enthaltende *Tangentialebene des Ellipsoids*.

Nun hatte die elektrische Dichte auf der Kugel den Wert

$$\frac{M}{4\pi}.$$

Nennen wir die unbekannte elektrische Dichte des Ellipsoids an der Stelle  $d\sigma$   $\kappa$ , und stellen wir uns vor, dass die auf  $ds$  vor der Deformation befindliche Elektrizitätsmenge

$$\frac{M}{4\pi} ds$$

wir noch die Entfernungen

bezüglich mit

und die Richtungscosinus der Strecke  $PC$  mit  $\lambda, \mu, \nu$ .

Nunmehr beweisen wir die Gleichung

$$(4) \quad \frac{x d\sigma}{r^2} = \frac{x_1 d\sigma_1}{r_1^2},$$

wobei  $x$  und  $x_1$  die Dichten der Elektrizität an den Stellen  $F$  und  $F_1$  bedeuten. Diese Gleichung ist in der That richtig; denn vermöge der Gleichungen

$$\begin{aligned} x d\sigma &= \frac{M}{4\pi} ds, \\ x_1 d\sigma_1 &= \frac{M}{4\pi} ds_1, \\ \frac{ds}{r^2} &= \frac{ds_1}{r_1^2} \end{aligned}$$

lässt sie sich schreiben

$$r^2 \varrho_1^2 = \varrho^2 r_1^2,$$

und dies ist richtig; denn wir haben

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 \\ &= a^2(x - x_0)^2 + b^2(y - y_0)^2 + c^2(z - z_0)^2 \\ &= (a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2) r^2. \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\varrho_1^2 = (a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2) r_1^2.$$

Die Gleichung (4) drückt aber aus, dass sich die Wirkungen der Elektrizitätsmengen auf  $d\sigma$  und  $d\sigma_1$  im Punkte  $\Pi$  zerstören. Da wir die ganze Oberfläche des Ellipsoids auf derartige Weise in Paare von Flächenelementen zerlegen können, so ist die gesamte Wirkung der Elektrizität der Ellipsoidoberfläche auf jeden beliebigen inneren Punkt  $\Pi$  Null, d. h. die von uns angegebene Formel (3) war richtig.

Zusammenfassend können wir sagen:

*Ist O irgend ein Oberflächenpunkt eines mit der Elektrizitätsmenge M geladenen Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c, und bedeutet p das Lot vom Mittelpunkte des Ellipsoids auf die in O an das Ellipsoid gelegte Tangentialebene, so hat die Dichte der Elektrizität an der Stelle O den Wert*

$$\frac{Mp}{4\pi abc}.$$

Lingen a/Ems, 16. Januar 1901.

(Eingegangen 17. Januar 1901.)





Dicken der auf Absorption zu untersuchenden Wasserstoffschichten, die zwischen 0 und 15 mm stetig und darüber bis 65 cm sprungweise verändert werden konnten. Messingrohr und Spectrograph standen mit einer Geissler'schen Quecksilberluftpumpe in Verbindung. Sie konnten unabhängig voneinander ausgepumpt und nach Erfordernis an verschiedene Wasserstoffentwicklungsapparate angeschlossen werden. Sämtliche Verbindungen der Apparate und des Spectrographen mit der Luftpumpe bestanden, wo nicht das Gegenteil bemerkt ist, aus mit Schliffen versehenen Glasröhren. Die Schliffe waren, um die Bildung von Kohlenwasserstoffen möglichst zu verhindern, nur auf dem äusseren Drittel ihrer Länge eingefettet. Das Wasserstoffgas wurde aus Zink und Schwefelsäure, beide chemisch rein, hergestellt, und nacheinander in zwei Gefässen über Phosphorsäureanhydrit getrocknet. Die Entladung der Wasserstoffröhre besorgte ein Inductorium für 25 cm Funkenlänge.

Die Durchlässigkeit der Schichten wurde ermittelt, indem das Absorptionsspectrum des bei Atmosphärendruck mit H gefüllten Messingrohres unter das des ausgepumpten Rohres bei gleicher Expositionsdauer im Spectrographen photographirt wurde. Der Unterschied beider Spectra entsprach dann der Durchlässigkeitsdifferenz des gefüllten und des evacuirten Rohres. Auf jeder Platte wurde eine Reihe solcher Spectrumpaare bei veränderter Expositionsdauer aufgenommen.

Zu Anfang der Aufnahmen waren Absorptionsrohr und Wasserstoffentwicklungsapparat mit einem dickwandigen Schlauch aus schwarzem Kautschuk von 50 cm Länge verbunden. Diese Anordnung war gewählt worden, weil sie gewisse, hier nicht in Betracht kommende Vorteile bot.

Es zeigte sich schon bei der ersten Aufnahme, dass der Wasserstoff beim Durchströmen des Kautschukschlauches seine Lichtdurchlässigkeit zum grössten Teile eingebüsst hatte. Schon bei einer Schichtendicke von 5 cm fehlte das wirksamste, bei  $160\ \mu\mu$  liegende Strahlengebiet des benutzten Lichtquells auf langer Strecke, und selbst die weiter abgelenkten, allerdings minder geschwächten Strahlen erforderten immer noch mehrfache Belichtungsdauer. Erst bei 3 cm Schichtendicke gelang es die gesamte Strecke stärkster Absorption zu photographiren, während Schichten über 5 cm diese Strahlen in erhöhtem



Fall. Es kam auch vor, dass der Wasserstoff etwas durchlässiger war als das evacuirte Rohr. Ich glaube diesen Widerspruch in der Hauptsache darauf zurückführen zu können, dass die in dem evacuirten Messingrohr zurückgebliebenen kleinen Mengen von Quecksilber- und Fettdampf für die brechbarsten ultravioletten Strahlen weniger durchlässig sind als Wasserstoff, und dass andererseits diese Verunreinigungen in die Wasserstofffüllung deshalb minder leicht gelangen konnten, weil das Rohr mit demselben Gase ausgewaschen und vor dem Füllen nicht bis zu der Höhe evacuiert wurde, wo sich die genannten Dämpfe lebhafter zu entwickeln pflegen.

Durch Reinigung des Absorptionsrohres mit rauchender Salpetersäure, Auskochen seiner Verschlussdeckel in Wasser, sauberste Abdichtung derselben mit möglichst wenig Fett, anhaltendes Auspumpen des Rohres zur Beseitigung der flüchtigen Fettbestandteile erlangte ich nach und nach eine bessere und am Ende eine fortgesetzte Uebereinstimmung der sich bis nahe an die vermeintliche Wellenlänge  $100\ \mu\mu$  erstreckenden Vergleichsspectra.

Innerhalb der genannten Beobachtungsgrenzen ist sonach der Wasserstoff nach Maassgabe der angewandten photographischen Platte vollständig lichtdurchlässig. Wenn sich meine älteren Wahrnehmungen mit den vorstehenden Thatsachen nur theilweise decken, so kann dies seinen Grund lediglich in der inzwischen erfolgten Vervollständigung und Verbesserung meiner Beobachtungsmittel haben.

Leipzig, Ende Januar 1901.

(Eingegangen 30. Januar 1901.)



$\xi$  im allgemeinen von Null verschieden ist, kann man sich leicht durch Berechnung von  $\bar{\xi^2}$  überzeugen, wie ich schon gezeigt habe.<sup>1)</sup>

Ist die Bewegung stationär, so ist

$$\frac{d\bar{\xi^2}}{dt} = 0.$$

Wenn aber die Geschwindigkeiten der Gasmoleküle nach dem Boltzmann'schen Gesetz

$$e^{-h \sum (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$$

verteilt sind, muss  $\bar{\xi^2}$  stets zunehmen, wie ich im fünften Capitel (l. c.) bewiesen habe. Um  $\bar{\xi^2}$  constant zu machen, muss man das Verteilungsgesetz

$$e^{-hQ} d\alpha_1 \dots d\gamma_n$$

gebrauchen, wo  $Q$  eine quadratische Function der Geschwindigkeiten, aber nicht bloss die Quadrate enthält.

---

1) S. H. Burbury, Ann. d. Phys. 3. p. 359. 1900.

• (Eingegangen 24. Januar 1901.)

- 1) Egon v. Schweidler, Ann. d. Phys. 4. p. 307. 1901.
- 2) E. Warburg, Wied. Ann. 54. p. 396. 1895.
- 3) Max Reich, Inaug.-Diss., Berlin 1900.

(Eingegangen 9. Februar 1901.)

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 4.

THE NEW YORK  
PUBLIC LIBRARY

**1. Anwendung der Methode der Beststrahlen zur Prüfung des Strahlungsgesetzes;  
von H. Rubens und F. Kurlbaum.**

ASTOR, LENOX  
TILDEN FOUNDATIONS.

[Ein Teil des hier mitgeteilten Beobachtungsmaterials ist bereits in den Berichten der Berliner Akademie<sup>1)</sup> veröffentlicht.<sup>2)</sup>]

Hr. W. Wien<sup>3)</sup> hat auf Grund thermodynamischer und molecularkinetischer Betrachtungen eine Formel gegeben, welche die Intensität  $E$  der Strahlung eines schwarzen Körpers für alle Wellenlängen  $\lambda$  und alle Temperaturen  $T$  folgendermaassen darstellt:

$$(1) \quad E = C \frac{1}{\lambda^5} e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Die Herren Lummer, Pringsheim und Jahnke<sup>4)</sup> haben jedoch insbesondere gegen den molecularkinetischen Teil dieser Ableitung so schwerwiegende Bedenken erhoben, dass diese Formel nicht mehr als theoretisch begründet gelten kann.

Zur experimentellen Prüfung der Strahlungsgesetze sind bisher zwei Serien von Arbeiten unternommen worden, von denen die eine von den Herren O. Lummer und E. Pringsheim<sup>5)</sup> herrührt, die andere von Hrn. F. Paschen<sup>6)</sup>, zum

1) H. Rubens u. F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 41. p. 929—941. 1900.

2) Die Resultate, welche sich auf Flusspat beziehen, sind auf der Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte am 18. September 1900 durch Hrn. Pringsheim vorgetragen.

3) W. Wien, Wied. Ann. 58. p. 662. 1896.

4) Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 31. 1899; Ann. d. Phys. 3. p. 286. 1900; Ann. d. Phys. 4. p. 225. 1901; O. Lummer, Rapport für den Pariser Congress 1900 über Strahlung schwarzer Körper.

5) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 1. p. 23 u. 215. 1899; 2. p. 163. 1900; 3. p. 37. 1900.

6) F. Paschen, Wied. Ann. 58. p. 455. 1896; 60. p. 662. 1897; Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 40. p. 405 u. 959. 1899; l. c. F. Paschen u. H. Wanner, p. 5.





stellung der Thatsachen für grössere Wellenlängen und höhere Temperaturen nicht eignet.

Auf Grund des für kleinere Wellenlängen erhaltenen Beobachtungsmaterials der Herren Lummer und Pringsheim ( $\lambda < 7 \mu$ ) hat nun Hr. Thiesen<sup>1)</sup> kürzlich eine empirische Formel aufgestellt, welche sich diesen Beobachtungen erheblich besser anschliesst als das Wien'sche Gesetz. Dieselbe lautet:

$$(2) \quad E = C \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \sqrt{\lambda T} \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Sie unterscheidet sich also von der Wien'schen Gleichung durch den Factor  $\sqrt{\lambda T}$ , welcher dort fehlt.

Fernerhin hat Lord Rayleigh<sup>2)</sup> vor einigen Monaten das Wien'sche Strahlungsgesetz kurz discutirt und dasselbe aus dem Grunde für unwahrscheinlich erklärt, weil es für unendlich hohe Temperaturen nur endliche Werte der Strahlung für jede Wellenlänge ergiebt. Er schlägt statt des Wien'schen Gesetzes die Formel vor:

$$(3) \quad E = C \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \lambda T \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Eine vierte allgemeine Formel, welche die bisher genannten als Specialfälle umfasst, ist von den Herren Lummer und Jahnke<sup>3)</sup> vor kurzer Zeit veröffentlicht worden. Sie lautet:

$$(4) \quad E = C \cdot \lambda^{-\mu} T^{5-\mu} \cdot e^{-\frac{c}{(\lambda T)^\nu}}.$$

Die Herren Lummer und Pringsheim finden ihre sämtlichen, in dem Intervall zwischen  $\lambda = 1 \mu$  bis  $\lambda = 18 \mu$  erhaltenen Resultate mit dieser Formel in guter Uebereinstimmung, wenn man  $\mu = 4$  und  $\nu = 1,3$  wählt. Die Formel unterscheidet sich alsdann von der Rayleigh'schen nur noch durch den Exponenten  $\nu$ , welcher in der Rayleigh'schen Gleichung gleich 1 ist, und man erhält:

$$(4a) \quad E = C \cdot \frac{1}{\lambda^5} \cdot \lambda T e^{-\frac{c}{(\lambda T)^{1,3}}}.$$

1) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 2. p. 37. 1900.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 49. p. 539. 1900.

3) O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Phys. 3. p. 283. 1900.

der Einheit und man erhält für die isochromatische Curve nach Wien  $E = \text{const.}$ , nach Thiesen  $E = \text{const.} \sqrt{T}$ , nach Rayleigh, Lummer-Jahnke und Planck  $E = \text{const.} T$ . — Nun ist es freilich nicht möglich, diesen Fall experimentell vollständig zu verwirklichen, d. h. zu so grossen Wellenlängen und so hohen Temperaturen überzugehen, dass der Einfluss

1) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 202. 1900.

2) Vgl. M. Thiesen, l. c.

3) Die Constante  $c$  hat in den Gleichungen (1), (2), (3), (4), (4a) und (5) einen verschiedenen Wert, und zwar ist zu setzen

$$\left. \begin{array}{ll} \text{in Gleichung (1): } c = 5 (\lambda_m T) \\ \text{„ „ (2): } c = 4,5 (\lambda_m T) \\ \text{„ „ (3): } c = 4 (\lambda_m T) \\ \text{„ „ (4): } c = \frac{\mu}{\nu} (\lambda_m T)^\nu \\ \text{„ „ (4a): } c = \frac{4}{1,3} (\lambda_m T)^{1,3} \\ \text{„ „ (5): } c = 4,965 (\lambda_m T) \end{array} \right\} \lambda_m T = 2890.$$

der Exponentialgrösse vollständig verschwindet, da die exacte Temperaturmessung bei etwa  $1500^{\circ}$  C. ihre Grenze erreicht. Auch lässt sich die Wellenlänge der Strahlen, für welche man derartige Beobachtungen noch mit hinreichender Genauigkeit ausführen kann, nicht beliebig steigern. Immerhin ist es möglich, durch Anwendung der Methode der Reststrahlen<sup>1)</sup> in Bezug auf die Wellenlänge der zu untersuchenden Strahlung noch erheblich weiter zu kommen als mit Hülfe spectraler Zerlegung. Man ist hierdurch in der Lage, über die Brauchbarkeit der Formeln (1), (2), (3), (4a) und (5) auch in dem Gebiet grosser Wellenlängen ein Urteil zu gewinnen. Auch Lord Rayleigh hat darauf hingewiesen, dass sich die Reststrahlen ihrer grossen Wellenlänge wegen ganz besonders zur Prüfung der verschiedenen Strahlungsformeln eignen.<sup>2)</sup>

Derartige Messungen sind auch vor einiger Zeit auf Veranlassung des einen von uns durch Hrn. Beckmann<sup>3)</sup> ausgeführt worden. Hr. Beckmann liess die von einem schwarzen Körper ausgehenden Strahlen an 4 Fluoritflächen reflectiren und maass die Intensität der hierdurch erhaltenen Reststrahlen bei verschiedenen Temperaturen des strahlenden schwarzen Körpers. Der Flusspat besitzt, wie unlängst gezeigt wurde<sup>4)</sup>, im ultraroten Spectralgebiet einen ziemlich scharf begrenzten Bereich metallischer Reflexion, welcher zwei Maxima aufweist, von welchen das eine bei  $\lambda = 24 \mu$ , das andere bei  $\lambda = 31,6 \mu$  liegt. Nach viermaliger Reflexion an Fluoritflächen sind erfahrungsgemäss nur noch solche Strahlen des schwarzen Körpers in messbarem Betrag vorhanden, welche dem Spectralgebiet metallischer Reflexion angehören. Dieselben bilden einen Strahlencomplex, welcher bei  $\lambda = 24,0 \mu$  und  $\lambda = 31,6 \mu$  Maxima der Intensität besitzt. Um einen Vergleich der Beobachtungen mit den oben genannten Formeln zu ermöglichen, genügt es anzunehmen, dass die gesamten Reststrahlen des Flusspats aus zwei völlig homogenen Strahlenarten beständen, von denen

---

1) Vgl. H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. 60. p. 418. 1897; H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. 65. p. 241. 1898; H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 576. 1899.

2) l. c. p. 540.

3) H. Beckmann, Inaug.-Diss. Tübingen 1898.

4) H. Rubens, l. c. p. 579.







1474° C. wieder fast 8 Proc. der zu messenden Grösse. Wir haben jedoch von einer weiteren Vermehrung der reflectirenden Flächen Abstand genommen und statt dessen lieber die Grösse der wegen der Unreinheit der Strahlen erforderlichen Correction genau ermittelt und von den beobachteten Ausschlägen in Abzug gebracht. Es geschah dies mit Hülfe einer Steinsalzplatte, welche die Reststrahlen vollkommen absorbiert, aber 90 Proc. der Verunreinigung hindurchlässt.

Bei den Versuchen mit Flussspat und Quarz gelangten vier verschiedene schwarze Körper zur Anwendung, welche sämtlich schon zu anderen an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt ausgeführten Untersuchungen gedient hatten.<sup>1)</sup> Bei dem ersten (I) war die Einrichtung so getroffen, dass der strahlende Hohlkörper von aussen von flüssiger Luft umspült werden konnte. Der zweite (II) war für die Füllung mit einem Gemisch von fester Kohlensäure und Aether eingerichtet. Der dritte (III) konnte mit Wasserdampf, der vierte (IV) mit Hülfe des elektrischen Stromes geheizt werden. Dieser letztere wurde in dem Temperaturintervall zwischen 300° und 1500° C. bei den Flussspatversuchen ausschliesslich angewandt. Um jedoch die viel schwächeren Reststrahlen des Steinsalzes insbesondere bei tieferen Temperaturen mit genügender Genauigkeit messen zu können, wurden in unserer Versuchsanordnung (Fig. 1) nach Entfernung des Diaphragmas  $D_1$  die drei erstgenannten schwarzen Körper unmittelbar vor das Diaphragma  $D_2$  gesetzt. Es war dies statthaft, da diese drei schwarzen Körper Oeffnungen besitzen, welche diejenige von  $D_2$  erheblich übertreffen. Die Oeffnung des elektrisch geheizten schwarzen Körpers (IV) betrug jedoch nur 12 mm, sodass wir gezwungen waren, diesen letzteren nur in der in der Figur wiedergegebenen Weise in Verbindung mit dem Diaphragma  $D_1$  zu benutzen. Wir haben aus diesem Grunde für den vorliegenden Zweck zwei weitere elektrisch heizbare schwarze Körper construiert, bei welchen, wie bei den Körpern I, II und III, genügend grosse Oeffnungen (30 mm Durchmesser) und ausreichende Divergenzwinkel für die austretenden Strahlen vorhanden waren, um die Verwendung

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verhandl. d. Physik. Gesellsch. zu Berlin 17. p. 106. 1898; Thätigkeitsbericht der Physik.-Techn. Reichsanstalt p. 38. 1899; Zeitschr. f. Instrumentenk. 19. p. 213. 1899.





bar vor der Thermosäule in den Strahlen.  
Dieselbe absorbiert den langwelligen Teil der  
vollkommen, während sie noch angenähert  
welligen Teiles, welcher das Maximum be-  
hindurchlässt.<sup>1)</sup>

1) H. Rubens u. A. Trowbridge, Wied.  
H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. 65.

W  
S  
zu  
O

F.



- 273°

n

100°

Fig. 4.

Abweichungen würden bei dem in Fig. 2 ge-  
stabs für Temperaturen über 0° überhaupt ka-  
sein, da dieselben durchweg unter 1 mm liegen.  
tiefe Temperaturen erreichen sie eine beträchtliche

Rücksicht darauf, dass die Abweichungen zwischen Theo-  
ment möglichst *klein* erscheinen. Würden sämtliche O-  
höchsten Temperatur ( $t = 1500^{\circ}$  C.) zur Coincidenz gebr-  
die Abweichungen bedeutend grösser.













## 2. *Elektrodynamische Elementargesetze;* *von E. Wiechert.*

(Aus den Archives Néerlandaises, livre jubilaire, dédié à H. A. Lorentz,  
p. 549. 1900.)

### I. Grundlagen der Theorie.

1. *Vorwort.* Die neuere, sich auf Maxwell stützende Elektrodynamik ist durch Unterscheidung zwischen Aether und Materie im Innern der sinnlich wahrnehmbaren Körper in so weitem Maasse zu den Ansichten der älteren Schule zurückgekehrt, dass der einstige Gegensatz nicht mehr besteht. Die „*elektrischen Teilchen*“ der alten Theorien sind wiederum zu Recht gelangt; wir haben aber gelernt, die Vermittelung ihrer Wechselwirkungen durch das Zwischenmedium zu verfolgen. So ist das grosse Problem gelöst, welches vor Maxwell zwar vielfach formulirt wurde, aber allen Bemühungen widerstand; und Maxwell's Beitrag erscheint nicht mehr als ein Umsturz des Bestehenden, sondern als ein Fortschritt im natürlichen Gange der Entwicklung.

H. A. Lorentz war der erste, der den Unterschied zwischen Aether und Materie in der Maxwell'schen Theorie mit Erfolg verwertete, und er machte dabei von vornherein auf die Annäherung an die älteren Theorien aufmerksam, welche sich dann einstellt. In der Ueberzeugung, dass hierauf im Interesse unserer Wissenschaft nicht genug Gewicht gelegt werden kann, will ich versuchen, hier einen weiteren Baustein für den Zusammenschluss der alten und neuen Theorien erbringen.

In den Bezeichnungen schliesse ich mich an meinen Beitrag zur Festschrift für die Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal's zu Göttingen, 1899<sup>1)</sup>; auf diesen verweise ich auch für nähere Ausführungen.

2. Die Namen „*Aether*“ und „*Materie*“ gebrauche ich in ganz ähnlichem Sinne wie H. A. Lorentz. Da ich überdies

1) Bei B. G. Teubner, Leipzig.



deutung in Betracht gezogen werden. Ist  $K$  ein solcher Vector, dann darf als Schwingungsgleichung für eine Componente  $K_v$  parallel der beliebigen Richtung  $v$  angenommen werden:

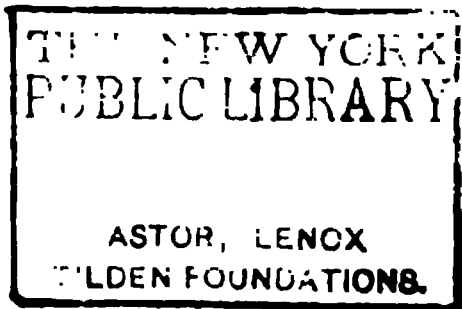
$$(1) \quad \frac{\partial^2 K_v}{\partial t^2} = V^2 \left( \frac{\partial^2 K_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_v}{\partial z^2} \right).$$

Dabei gilt die folgende Bedingung als Ausdruck der Transversalität der Schwingungen und der Annahme, dass auch der Fall der Erregungslosigkeit möglich ist:

$$(2) \quad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 0.$$

Zu jedem herausgegriffenen Vector  $K$  lässt sich ein gewisser zweiter  $H$  zuordnen, der mit ihm in reciproker Beziehung steht. Wir erhalten  $H$  durch die Definitionsgleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = V \left( \frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = V \left( \frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = V \left( \frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right), \end{cases}$$



$$(4) \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Sie ergeben mittels (1) und (2) als Analogon zu (3):

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial K_x}{\partial t} = -V \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial K_y}{\partial t} = -V \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial K_z}{\partial t} = -V \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \end{cases}$$

und als Analogon zu (1):

$$(6) \quad \frac{\partial^2 H_v}{\partial t^2} = V^2 \left( \frac{\partial^2 H_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_v}{\partial z^2} \right).$$

Das Formelsystem (2), (3), (4), (5) als Ersatz für (1) und (2) bez. (4) und (6) wurde von Hertz 1884 aus der Maxwell'schen Theorie herausgelöst.

Für die Elektrodynamik kommt noch ein drittes System in Betracht, welches in vielen Fällen vorteilhafter ist als das zweite und sich enger an Maxwell anschliesst. In ihm wird das *Vectorpotential* eines der Vektoren  $K$  und  $H$  benutzt. Wir

$$(8) \quad K_v = - \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma_v}{\partial t},$$

wobei  $v$  eine beliebige Richtung bedeutet. Hiermit ist nun auch das System (3) erfüllt. Es bleiben uns noch (2) und (5), (2) ergibt:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Mittels (5) folgt für eine beliebige Richtung  $v$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial t^2} &= V^2 \left( \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - V \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \left( \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) \right). \end{aligned}$$

Ueber die Unbestimmtheit in  $\Gamma$  verfügend setzen wir nun:

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \left( \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Dann folgt als Ersatz für (2) und (5):

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = V^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right);$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial t^2} = V^2 \left( \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_v}{\partial z^2} \right).$$

(9), (10), (11) in Verbindung mit (7) und (8) stellen das angekündigte *Maxwell'sche Gleichungssystem* dar. Wie wir erkennen, ist es nicht symmetrisch. Das scheint zunächst ein Nachteil (der übrigens leicht beseitigt werden könnte), ist es aber in Wirklichkeit nicht, denn bei der Einordnung der Theorie der Optik in die Theorie der Elektrodynamik kommen wir so in die Lage, uns genau der erfahrungsgemäss bestehenden Unsymmetrie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen anzupassen.

Maxwell benutzte nicht die vereinfachende Beziehung (9). Ihm war nämlich  $\Gamma$  nicht wie uns eine blosse mathematische Hilfsgrösse, sondern eine Function des Zustandes von besonderer Bedeutung, und so musste er den Wert von

$$\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z},$$

obgleich „not related to any physical phenomenon“, unbestimmt lassen. In einer interessanten in Abschnitt 12 citirten Arbeit von Levi-Civita (1897) ergab sich (9) als Folgerung aus hypothetischen Annahmen über  $\Phi$  und  $\Gamma$ .

4. *Elektrische Ladung.* Nach Maxwell's Theorie lassen sich die elektrische und die magnetische Erregung im freien Aether durch eines der Vektorenpaare  $K$  und  $H$  der Optik darstellen. Da wir die soeben berührte Unsymmetrie berücksichtigen müssen, ist in unserem Falle die „*elektrische Kraft*“ mit  $K$ , die „*magnetische Kraft*“ mit  $H$  zu bezeichnen.

Für einen Raum, in dem die Gleichungen (2) und (4) überall erfüllt sind, ergeben sich für jede geschlossene Fläche die Sätze:

$$\int_0^0 d\sigma K_v = 0, \quad \int_0^0 d\sigma H_v = 0.$$

$d\sigma$  bedeutet ein Oberflächenelement,  $v$  die Normale; der Index 0 soll daran erinnern, dass es sich um eine geschlossene









auffassen. Die kleinste moleculare Ladung hat von Stoney (1874) den Namen „Elektron“ erhalten. Da wir sie in den Mittelpunkt unserer Theorie stellen, können wir diese auch die „Elektronentheorie“ der Elektrodynamik nennen.

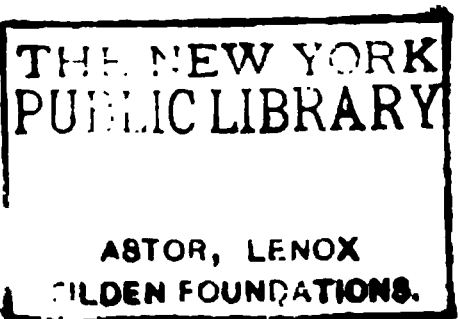
7. *Feldgleichungen.* Für den freien Aether nahmen wir an (Abschnitt 3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_x}{\partial t} &= -V \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), & \frac{\partial H_x}{\partial t} &= V \left( \frac{\partial K_y}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial K_y}{\partial t} &= -V \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right), & \frac{\partial H_y}{\partial t} &= V \left( \frac{\partial K_z}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial K_z}{\partial t} &= -V \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right), & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= V \left( \frac{\partial K_x}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Für materielle Systeme ändern sich diese Gleichungen, weil wir auf die Elektronen Rücksicht nehmen müssen. Doch ist es nicht nötig, noch weitere Hypothesen zu machen, denn unsere Annahme, dass der Aether mit gleichen Eigenschaften auch die Materie durchdringt, führt das hingeschriebene System über in

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial K_x}{\partial t} = -V \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - 4\pi\gamma_x, \\ \frac{\partial K_y}{\partial t} = -V \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) - 4\pi\gamma_y, \\ \frac{\partial K_z}{\partial t} = -V \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) - 4\pi\gamma_z. \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} = V \left( \frac{\partial K_y}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = V \left( \frac{\partial K_z}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = V \left( \frac{\partial K_x}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial x} \right). \end{cases}$$



$$(14) \quad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 4\pi\chi,$$

$$(15) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

wobei  $\gamma$  den elektrischen Strom,  $\chi$  die elektrische Dichte bezeichnet, und als Folge der vorstehenden Gleichungen

$$(16) \quad -\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}$$







Fläche, das zweite sich auf den eingeschlossenen Raum bezieht.  $n$  bedeutet die nach innen weisende Normale. Bei der Differentiation nach  $r$  hat man  $x, y, z$ , bei den Differentiationen nach  $n, x, y, z$  dagegen  $r$  als constant anzusehen. In unserem Falle denken wir uns die Fläche ins Unendliche gerückt und nehmen an, dass dann das zugehörige Integral gleich Null gesetzt werden darf. Dann bleibt:

$$4 \pi U_0 = \int \frac{d\omega}{r} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right).$$

Hierin setzen wir  $r = (t_0 - t) V$ , wobei  $t_0$  als Constante,  $t$  als Variable aufgefasst wird, sodass  $U$  in eine Function von  $x, y, z$  und  $t$  übergeht, und erhalten:

$$4 \pi (U_0)_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \left( \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}}.$$

Wenden wir diesen Satz auf  $\Phi$  und  $\Gamma_r$  an, so ergibt sich mittels der Differentialgleichungen (19) und (20) sofort:

$$(23) \quad \Phi_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \chi_{t=t_0 - \frac{r}{V}},$$

$$(24) \quad (\Gamma_r)_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \left( \frac{\gamma_r}{V} \right)_{t=t_0 - \frac{r}{V}},$$

womit folgendes ausgesagt ist: *Man erhält den Wert von  $\Phi$  und  $\Gamma_r$  für irgend eine Stelle (0) und irgend eine Zeit  $t_0$  durch Summation der Anteile*

$$\frac{d\omega}{r} \chi \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{r} \frac{\gamma_r}{V}$$

*für alle Volumenelemente  $d\omega$ . Dabei bedeutet  $r$  den Abstand des Volumenelementes von (0) und sind für  $\chi$  bezüglich  $\gamma_r$  diejenigen Werte zu wählen, welche zu einer so weit zurückliegenden Zeit bestanden, dass eine damals mit der Lichtgeschwindigkeit ausgehende Erregung gerade zur Zeit  $t_0$  in (0) eingetroffen wäre. Die Potentialanteile der einzelnen Volumenelemente scheinen sich hiernach mit Lichtgeschwindigkeit auszubreiten.*

In den Gesetzen (23) und (24) nebst den Formeln (17), (18) zur Bestimmung von  $K$  und  $H$  und dem Satze von der Erhaltung der Elektrizität (21) ist uns eine neue *Darstellung der Feldgleichungen gegeben, welche nach dem Vorbild der alten Theorien die Nahwirkungen durch Fernkräfte ersetzt.*



ja für räumlich verteilte Elektrizität, verlangen also, dass der Grenzübergang erst nach ihrer Anwendung gemacht werde. Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn wir sagen, dass die Formeln (23) und (24) nur auf unendlich kleine, nicht aber auf punktförmige Körper angewandt werden dürfen.

Dabei soll noch angenommen werden, dass der Körper, den wir Elektron nennen wollen, allseitig symmetrisch gebaut sei und keine Drehungen ausführe. Andernfalls müssten Mittelwerte gebildet werden.

(1) sei diejenige Lage des Körpermittelpunktes zu der früheren Zeit  $t_1$ , von der aus eine mit der Lichtgeschwindigkeit  $V$  ausgehende Erregung gerade zur Zeit  $t_0$  im Punkte (0) ankäme. Wird dann der Abstand (0)—(1) mit  $r_1$  bezeichnet, so gilt:

$$t_1 = t_0 - \frac{r_1}{V}.$$

Wegen der vorausgesetzten unendlich kleinen Ausdehnung des Elektrons kommen bei der Anwendung von (23):

$$\Phi_{t=t_0} = \int \frac{d\omega}{r} \chi_{t=t_0 - \frac{r}{V}}$$

nur Zeiten  $t$  und Entfernungen  $r$  in Betracht, die unendlich nahe an  $t_1$  und  $r_1$  liegen. Die scheidenden Kugelflächen dürfen im Bereiche des Elektrons als Ebenen gelten.  $r - r_1$  ist ihr Abstand von (1). Bei der Integration ordnet sich jeder Ebene ein gewisser Schnitt durch das Elektron zu; wir fragen, wie dessen Abstand  $R$  vom Mittelpunkt mit  $r - r_1$  zusammenhängt. Ist  $v$  die Geschwindigkeit des Elektrons, so liegt sein Mittelpunkt zur Zeit  $t$  in der Entfernung  $(t - t_1)v \cos(v, r)$  von der Ebene durch (1). Hieraus folgt sogleich:

$$R = r - r_1 - (t - t_1)v \cos(v, r),$$

und daher wegen  $r = (t_0 - t)V$ ,  $r_1 = (t_0 - t_1)V$ :

$$R = (r - r_1) \left( 1 + \frac{v}{V} \cos(v, r) \right).$$

Bei der Integration zur Bildung von  $\Phi$  sind für jeden Schnitt  $r = \text{const.}$  diejenigen Werte  $\chi$  zu wählen, welche zu  $R$  gehören, die Integration darf also so ausgeführt werden, als wenn das Elektron mit seinem Mittelpunkt in (1) still stände,





Sind im Felde beliebig viele Elektronen vorhanden, so addieren sich ihre durch (25) und (26) bestimmten Anteile zu  $\Phi$  und  $\Gamma_v$ ; wir erhalten dann unter Hinzunahme von

$$K_v = - \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma_v}{\partial t} \quad \text{und} \quad H_v = - \left( \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Gamma_\lambda}{\partial \mu} \right),$$

wobei  $\lambda, \mu, v$  eine beliebige cyklische Folge der  $x, y, z, x \dots$  bedeutet, eine Darstellung der Felderregung, welche im Sinne der W. Weber'schen Anschauungen auf die einzelnen elektrischen Teilchen zurückgeht.

Charakteristisch ist, dass wir die Elektronen als punktförmig ansehen. In Fällen, wo dieses nicht erlaubt sein sollte, müssten wir die Elektronen in Volumenelemente auflösen, und  $\epsilon$  durch  $\chi d\omega$  ersetzen.

### III. Einige Anwendungen des Elementargesetzes der Elektronen.

14. *Lineare stationäre oder halbstationäre Ströme.* Um die Brauchbarkeit des Elementargesetzes (25), (26) der Elektronen zu zeigen, sollen nun noch einige Anwendungen gegeben werden. Zunächst wenden wir uns zu dem klassischen Problem der älteren Theorien, welches durch die linearen Ströme geboten wird.

Die Ströme seien stationär, ihre Leiter in *Ruhe*. Um  $\Phi$  und  $\Gamma$  für den Punkt (0) zu bilden, ist es unsere Aufgabe, die Anteile, welche durch das Elementargesetz angegeben werden, über alle Elektronen zu summieren. Wir denken uns um (0) zwei Kugelflächen  $r$  und  $r - dr$  construiert, welche das Linienelement  $d\lambda$  aus einem der Stromleiter herauschneiden, und für die Anwendung des Elementargesetzes das Zeitelement zwischen

$$t = t_0 - \frac{r}{V} \quad \text{und} \quad t + dt = t_0 - \frac{r - dr}{V}$$

von der Länge

$$dt = \frac{dr}{V}$$

abgrenzen. Welche Elektronen kommen für  $dt$  in Betracht? Da wir nicht durchweg gleiche Geschwindigkeit voraussetzen dürfen, betrachten wir zunächst diejenige Gruppe, deren Geschwindigkeit parallel zu  $d\lambda$  zwischen  $v$  und  $v + dv$  liegt.

Um  $\Gamma$  zu bilden, müssen wir bedenken, dass die Elektronen mit einer zwischen  $v$  und  $v + dv$  liegenden Geschwindigkeit, zur Stromstärke  $i$  den Beitrag  $di = v d\chi$  liefern, also zu  $\Gamma_r$  den Beitrag:

$$\frac{d\chi d\lambda \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r)\right)}{v \left(1 + \frac{v}{V} \cos(v, r)\right)} \cdot \frac{v \cos(v, r)}{V} = \frac{di d\lambda \cos(\lambda, r)}{Vr}.$$

Hieraus folgt für  $d\lambda$  der Anteil

$$d\Gamma_r = \frac{i}{V} \cdot \frac{d\lambda \cos(\lambda, r)}{r},$$

und für das Stromsystem im ganzen die bekannte Formel:

$$\Gamma_r = \int \frac{i}{V} \cdot \frac{d\lambda \cos(\lambda, r)}{r},$$

welche die Verteilung der magnetischen Kraft angibt und in Verbindung mit dem zweiten Satz von Abschnitt 8 über die

mechanische Einwirkung des magnetisch erregten Aethers auch die ponderomotorischen Kräfte zwischen Stromsystemen der Erfahrung entsprechend darstellt.

Verändern sich die Ströme sehr langsam, sind sie „*halbstationär*“, so werden unsere Formeln für  $\Phi$  und  $\Gamma_r$  doch noch näherungsweise gültig bleiben. Wir erhalten dann mittels

$$K_r = - \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial t}$$

in dem zweiten Gliede rechts die „*inducirte elektromotorische Kraft*“. Integriren wir über einen geschlossenen Ring, so ergibt sich sofort die Neumann'sche Formel, zum Zeichen, dass unsere Rechnung auch hier zu richtigen Resultaten führt. Bei der Induction in bewegten Körpern kommt gemäss dem zweiten Satz in Abschnitt 8 ein Anteil wegen der Bewegung im magnetischen Felde hinzu, welcher ebenfalls der Erfahrung genau entspricht.

15. *Elementargesetz für Volumenelemente.* Für körperliche Stromsysteme muss das Elementargesetz der Elektronen zu seinem Ausgangspunkt, dem in Abschnitt 11 angegebenen Elementargesetz für Volumenelemente zurückführen. Das dem wirklich so ist, kann man leicht nachweisen, wenn man ähnlich wie im vorigen Abschnitt die Elektronen bei der Summation ihrer Anteile zu  $\Phi$  und  $\Gamma_r$  für den Raumpunkt (0) und die Zeit  $t_0$  nach den in Rechnung kommenden Entfernungen  $r$  und Zeiten  $t$  ordnet.

Wieder mögen

$$t = t_0 - \frac{r}{V}, \quad t + dt = t_0 - \frac{r - dr}{V}, \quad dt = \frac{dr}{V}$$

zusammengehören.  $v_r$  sei die von (0) fortgerichtete Geschwindigkeitscomponente. Wir richten die Untersuchung zunächst auf die Elektronen, für welche  $v_r$  zwischen  $v_r$  und  $v_r + dv_r$  liegt; die Raumdichte ihrer Elektrizität sei  $d\chi$ . Die zur Zeit  $t$  im Abstände  $r$  befindliche Schicht hat zur Zeit  $t + dt$  einen um

$$v_r dt = \frac{v_r}{V} dr = \frac{v}{V} \cos(v, r) dr$$

grösseren Abstand erreicht. Für  $dr$ ,  $dt$  kommt hiernach eine Elektronenschicht von der Dicke



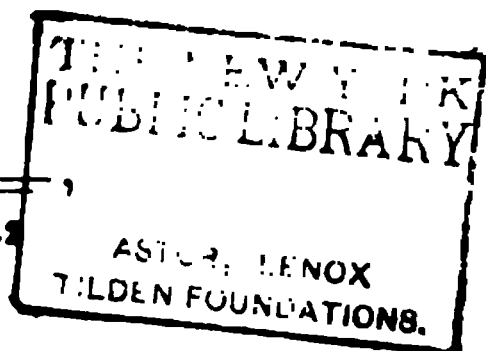
den Wert

$$\sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}$$

hat; wir erhalten also:

$$\Phi = \frac{e}{\sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}},$$

$$\Gamma_v = \frac{v_v}{V} \frac{e}{\sqrt{(x^2 + y^2) \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) + z^2}}.$$



Hieraus in Verbindung mit

$$K_v = -\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma_v}{\partial t}, \quad H_v = -\left(\frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Gamma_\lambda}{\partial \mu}\right)$$

$$\lambda, \mu, v = \dots x, y, z, x, y, \dots$$

folgt in der That die bekannte Verteilung der Felderregungen, wenn man noch beachtet, dass wegen des von uns angenommenen sich bewegenden Coordinatensystems

$$\frac{\partial \Gamma_v}{\partial t} \text{ durch } -V \frac{\partial \Gamma_v}{\partial z}$$

zu ersetzen ist.

17. *Schwingendes Elektron.* Zum Schluss mag der für die Optik interessante Fall betrachtet werden, dass ein Elektron Sinusschwingungen vollführt. Solche Schwingungen der allgemeinsten Art lassen sich für die Theorie in lineare Schwingungen auflösen, wir können uns daher auf die Untersuchung *linearer Schwingungen* beschränken.

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems möge in den Schwingungsmittelpunkt gelegt werden, die  $z$ -Axe der Schwingungslinie parallel. Dann dürfen wir schreiben:

$$\zeta = Z \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wobei  $\zeta$  die jeweilige  $z$ -Coordinate des Elektrons,  $Z$  der grösste Ausschlag,  $T$  die Periode ist. Das ausgesandte Licht hat die Wellenlänge  $\lambda = VT$ .

$\varrho$  sei der Abstand des Punktes (0) vom Anfangspunkt der Coordinaten, also vom Schwingungsmittelpunkt. *Wir beschränken*

während  $dt$  bezeichnet.

Hieran knüpft sich eine interessante Folgerung über die *Dämpfung der Schwingungen eines Elektrons* die unter der Wirkung einer mit der Entfernung proportionalen Centralkraft erfolgen. Damit die abgeleiteten Sätze näherungsweise gültig bleiben, müssen wir annehmen, dass die Dämpfung nur gering ist. Bedeutet  $m$  die effective Masse,  $k\zeta$  die zurückziehende Kraft, so ist abgesehen von dem geringfügigen Einfluss der Dämpfung:

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -k \zeta$$

zu setzen, woraus folgt:

$$\frac{k}{m} = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2,$$

und für die Energie der Schwingungen:

$$E = \frac{1}{2} k Z^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 Z^2 m.$$



In Verbindung mit unserer Formel für  $-dE/dt$  ergibt sich so für die „Relaxationszeit“, das heisst die Zeit, in welcher die Amplitude auf den  $1/2,818 \dots$  Wert ihrer Grösse herabsinkt, der Wert

$$\tau = 2 \frac{E}{\frac{dE}{dt}} = \frac{3}{4\pi^2} \cdot \frac{m}{\iota} \cdot \frac{\lambda^2 V}{\iota},$$

und für den Weg, den das Licht während der Relaxationszeit zurücklegt, der Wert:

$$w = \tau V = \frac{3}{4\pi^2} \cdot \frac{m}{\iota} \cdot \frac{\lambda^2 V^2}{\iota}.$$

Wir wollen diese Formel auf den Fall der Aussendung des Lichtes einer Spectrallinie anwenden.  $\lambda$  setzen wir rund gleich  $1/20000$ ; für  $\iota/m$  mag der Wert  $4 \cdot 10^{17}$  angenommen werden, welcher dem Zeemanphänomen und den Kathodenstrahlen ungefähr entspricht.  $\iota$  ist nur ungenau bekannt; je nachdem man für die Anzahl der Molecüle in einem Cubikcentimeter Gas bei  $0^\circ \text{C.}$  und unter dem Normaldruck

$$N = 10^{19} \quad \text{oder} \quad N = 10^{20}$$

setzt — womit die möglich scheinenden Grenzen wohl etwa gekennzeichnet sind —, ergibt sich:

$$\iota = 13 \cdot 10^{-10} \quad \text{oder} \quad \iota = 1,3 \cdot 10^{-10},$$

und wir erhalten:

$$w = 3 \text{ m} \quad \text{oder} \quad w = 30 \text{ m}.$$

Hiermit können Beobachtungen über Interferenzen bei grossen Gangunterschieden verglichen werden. Als höchste Wegdifferenz, bei welcher noch Interferenzen zu erkennen waren, ergab sich etwa  $1/2$  Meter.

Wir werden daraus schliessen müssen, dass ausser der Abnahme der Schwingungen infolge der Lichtaussendung noch andere störende Ursachen wirksam waren, die stärker zur Geltung kamen. Setzen wir, was den Beobachtungen etwa entsprechen wird:

$$w > 0,5 \text{ m},$$

so folgt:

$$\iota < 80 \cdot 10^{-10}, \quad N > \frac{1}{8} 10^{19}.$$

(Eingegangen 5. Februar 1901.)





Mitte 1 cm dicke und 3 cm im Durchmesser haltende Steinsalzplatten eingekittet waren, mittelst Schraubenkappen zugeschlossen. Die Wärmestrahlung ging durch diese Röhre zu einer Rubens'schen Thermosäule, welche mit einem Du Bois-Rubens'schen Panzergalvanometer in Verbindung stand. Der Weg der Wärmestrahlen betrug von der Wärmequelle bis zur Röhre 17 bez. 26,5 cm, in der Röhre 50 cm (ausser dem Wege durch die Steinsalzplatten), und von der Röhre bis zur Thermosäule 26,3 cm. Zwischen Wärmequelle und Rohr waren mehrere feste Schirme mit Diaphragmen und ein beweglicher zum Abschluss von fremden Strahlen aufgestellt, zwischen Rohr und Thermosäule und um die letztere waren röhrenförmige Vorrichtungen aus Papier und ein hölzernes Gehäuse zur Verhinderung von Luftströmungen aufgebaut.

Die Anordnung ähnelt in vielen Beziehungen derjenigen, welche Tyndall bei seinen bekannten Versuchen über Wärmeabsorption in Gasen benutzt hat.<sup>1)</sup> In das Rohr konnte von einer Kohlensäurebombe Kohlensäure eingefüllt werden, wobei Drucke von 1–8 Atmosphären, die auf einem Metallmanometer abgelesen werden konnten, zur Verwendung kamen. Wenn nötig konnte die Kohlensäure durch eine Luftpumpe aus dem Rohr entfernt und durch Luft ersetzt werden. Die Wärmestrahlung, welche bei diesen Versuchen auf dem Galvanometer abgelesen wurde, war die Differenz zwischen der Strahlung der Wärmequelle und der Thermosäule (15 ° C.).

Es ist wohl nicht nötig, die Bestimmung der Absorption näher zu beschreiben, sondern ich kann, indem ich betreffs näherer Details auf die in der Stockholmer Akademie publicirte Abhandlung verweise, zur Wiedergabe der Beobachtungen übergehen. Dabei wird unter Länge ( $l$ ) der absorbirenden Schicht das Product aus der Länge der Röhre und dem Druck in Atmosphären der Kohlensäure in demselben verstanden. Unter  $A$  ist die Absorption in Procenten tabellirt.  $1 - A/100$  wird der Kürze halber  $a$  genannt. Die directen Beobachtungen gaben folgende Werte, wobei die Versuche mit dem Leslie'schen Würfel mit I, diejenigen mit der Kohlensäure-Aetherkühlung mit II bezeichnet sind:

---

1) J. Tyndall, Contributions to mol. physics p. 15. 1872.



Sie stimmen, wie man sieht, sehr gut mit meinen Versuchen überein, welche unter nahezu denselben Versuchsbedingungen ausgeführt sind. Für  $l = 50$  erhält man aus Tyndall's Daten  $A_1 = 10,9$ , während von mir  $A_1 = 10,4$  beobachtet wurde.

Im Folgenden ist es für die Berechnungen von Wichtigkeit, eine empirische Formel darzustellen, welche das Beobachtungsmaterial innerhalb der Versuchsfehler wiedergibt. Eine solche Formel, welche für unendliche  $l$ -Werte einen  $A$ -Wert gleich 100 aus theoretischen Gründen (vgl. weiter unten) geben soll, ist folgende:

$$\log a = -D\{(1 + B l)^c - 1\}.$$

Durch Ausprobieren findet man folgende Werte der Constanten:

$$D_1 = 0,0028 \text{ bez. } D_2 = 0,0040, \quad B = 1 \quad c = 0,25.$$

Die folgende Tabelle erlaubt einen Vergleich der beobachteten Zahlen mit den berechneten. Die Versuche von Tyndall sind durch ein T, die von mir durch ein A gekennzeichnet.  $\log a$  ist ein berechneter Wert.

|        | $l$ (cm) | $\log a$ | $A_{\text{ber.}}$ | $A_{\text{beob.}}$ | Diff.     |
|--------|----------|----------|-------------------|--------------------|-----------|
| I. T.  | 2,03     | -0,0088  | 2,0               | 1,4                | +0,6      |
| I. T.  | 4,06     | -0,0140  | 3,2               | 2,0                | +1,2      |
| I. T.  | 6,09     | -0,0176  | 4,0               | 3,0                | +1,0      |
| I. T.  | 8,12     | -0,0206  | 4,6               | 4,0                | +0,6      |
| I. T.  | 10,15    | -0,0232  | 5,2               | 5,1                | +0,1      |
| I. T.  | 12,18    | -0,0253  | 5,7               | 6,1                | -0,4      |
| I. T.  | 14,2     | -0,0273  | 6,1               | 6,7                | -0,6      |
| I. T.  | 20,3     | -0,0320  | 7,1               | 6,9                | +0,2      |
| I. T.  | 40,6     | -0,0430  | 9,4               | 10,0               | -0,6      |
| I. A.  | 50,0     | -0,0466  | 10,2              | 10,4               | -0,2      |
| II. A. | 50,0     | -0,0669  | 14,3              | 15,0               | -0,7      |
| I. T.  | 60,7     | -0,0503  | 10,9              | 11,8               | -0,9      |
| II. A. | 180      | -0,0953  | 19,7              | 19,4               | +0,3      |
| I. A.  | 140      | -0,0681  | 14,5              | 14,3               | +0,2      |
| I. A.  | 155      | -0,0707  | 15,0              | 15,0               | $\pm 0,0$ |
| I. A.  | 170      | -0,0730  | 15,5              | 15,8               | -0,3      |
| I. A.  | 200      | -0,0771  | 16,3              | 15,9               | +0,4      |
| II. A. | 220      | -0,1141  | 23,1              | 22,3               | +0,8      |
| II. A. | 260      | -0,1208  | 24,3              | 23,9               | +0,4      |
| I. A.  | 275      | -0,0858  | 17,9              | 18,1               | -0,2      |
| I. A.  | 300      | -0,0883  | 18,4              | 18,3               | +0,1      |
| II. A. | 355      | -0,1338  | 26,5              | 26,8               | -0,3      |





















100° absorbiert, und dass, wenn der Druck auf  $\frac{2}{3}$  reducirt wird, die Absorption sich nur unbedeutend — höchstens mit 0,4 Proc. der Gesamtstrahlung — ändert“. Die Daten von Tyndall und die obenstehende Berechnung verlangen anstatt „ca. 10 Proc.“ etwa 8,6, was, da die Versuchsbedingungen von Hrn. Koch noch unbekannt sind, als eine genügende Uebereinstimmung angesehen werden möge. Dagegen verlangen die Daten von Tyndall bei Abnahme des Druckes auf  $\frac{2}{3}$  eine Abnahme der Absorption von etwa 1,6 Proc. (die Absorptionsformel verlangt etwa 1,2 Proc.), was nicht ohne weiteres mit Hrn. Koch's Befund als übereinstimmend angesehen werden kann. Vermutlich wird sich Hr. Koch bemühen, in seiner in Aussicht gestellten Abhandlung diese Discrepanz aufzuklären. Hr. Ångström bemerkt zu den Daten von Hrn. Koch: „Eine Schicht von 30 cm Länge hat also die Absorption der Strahlung einer Wärmequelle von 100° beinahe vollständig bewirkt. Aus diesen Untersuchungen“ (von Hrn. Koch?) „und Berechnungen“ (von Hrn. Ångström?) „geht klar hervor, erstens dass höchstens ca. 16 Proc. von der Erdstrahlung durch die atmosphärische Kohlensäure absorbiert werden, und zweitens dass die Gesamtabsorption sehr wenig von den Veränderungen in dem atmosphärischen Kohlensäuregehalt abhängig ist, solange nämlich dieser nicht kleiner als 0,2 Proc. der jetzt vorhandenen ist.“ In diese Worte hat Hr. Ångström seine Ansichten betreffs der Absorption der Kohlensäure zusammengefasst.

Es verdient vielleicht noch erwähnt zu werden, dass, wenn die Erdatmosphäre nach Hrn. Ångström's Schätzung 10—16 Proc. der Erdstrahlung absorbierte, sie die Erdtemperatur um etwa 7,4—12,3° erhöhen könnte. Da nun die Eiszeit eine um 4,5° niedrigere Temperatur als die jetzige besass, so könnte man wohl erwarten, dass auch Hr. Ångström in dem partiellen Verschwinden der Kohlensäure aus der Atmosphäre eine mögliche Ursache der Eiszeit erblicken würde. Dem scheint aber nicht so zu sein.

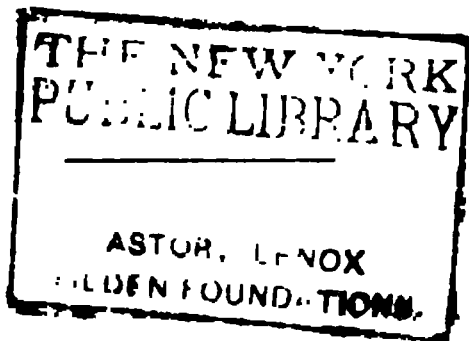
Die Stellung Hrn. Ångström's zu dieser Frage ist um so bemerkenswerter, als er früher die Wirkung der Kohlensäure stark überschätzte, indem er der Ansicht war, dass die atmosphärische Kohlensäure etwa 60 Proc. der Sonnenstrahlung absorbiert. Aus seinen neuen Beobachtungen hat er aber er-



welche den adiabatischen Zustand hervorzubringen streben, verglichen mit der Strahlung der Kohlensäure, welche einen geringeren Temperaturfall begünstigt. Durch die stärkere Erwärmung der Luft am Tag und Abkühlung in der Nacht, welche als Folge der erhöhten Absorption eintreten würde, würden wiederum die Luftbewegungen, welche zum Herstellen des adiabatischen Zustandes streben, verstärkt werden. Es ist offenbar sehr schwer, diesen complicirten Einfluss zu schätzen. Wahrscheinlicherweise wird die betreffende Aenderung recht gering sein. Ausserdem bewirkt eine recht bedeutende Aenderung im Temperaturfall (sobald dieser nur die Hälfte des adiabatischen Temperaturfalles überschreitet) einen relativ sehr geringen Einfluss auf den schützenden Effect der Kohlensäure, weshalb ich die Rechnungen so ausgeführt habe, als ob der Temperaturfall constant so verbliebe wie er jetzt ist.

Dagegen würden die verstärkten Luftströmungen dazu beitragen, die Temperaturunterschiede zwischen den polaren und den äquatorialen Gegenden der Erde auszugleichen, wozu im allgemeinen eine Erhöhung der atmosphärischen Absorption hinführt.

(Eingegangen 19. Januar 1901.)







frischen Oberfläche über die Wände des Troges überfließen lassen zu können, war derselbe etwas erhöht in einen zweiten niederen und breiteren Trog aus Zinkblech gestellt, der an einem Ende einen Ausfluss zum Ansetzen eines Gummischlauches besass (vgl. Fig. 1).

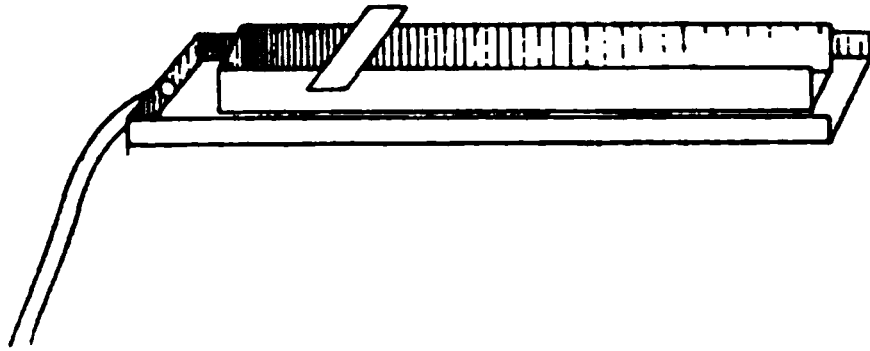


Fig. 1.

Das verwandte Oel war Olivenöl, das mit Alkohol wiederholt ausgeschüttelt war, um Oelsäure zu entfernen.<sup>1)</sup> Bei dieser Gelegenheit möchte ich bemerken, dass es mir nicht gelungen ist, selbst nach oft wiederholtem Ausschütteln ein Oel zu erhalten, das sich auf Wasser gar nicht mehr ausbreitet.

#### Bestimmung des Randwinkels.

Das von einem Schnittbrenner ausgehende Licht traf das Randelement des Oeltropfens und wurde von hier gegen einen um eine horizontale Axe drehbaren Spiegel *S* reflectirt (vgl. Fig. 2). An der Drehaxe befand sich ein Zeiger, der auf einer Kreisteilung die Einstellung des Spiegels ablesen liess. Zunächst wurde der

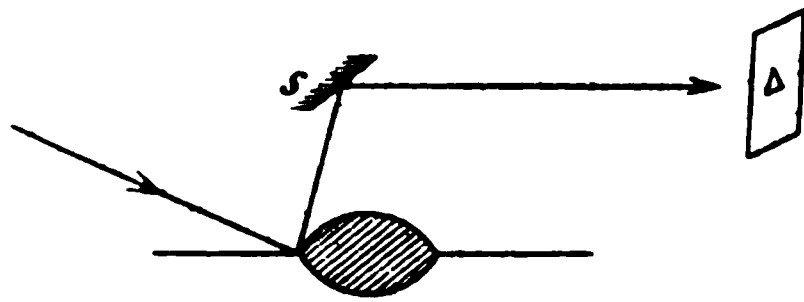


Fig. 2.

Spiegel so orientirt, dass er parallel der Wasseroberfläche stand. Das geschah durch Einstellen der Spiegelbilder der Pupille im Spiegel auf das Spiegelbild der Pupille in der Wasseroberfläche. Diese Stellung des Spiegels zählte als Nullstellung. Hierauf wurde der Spiegel um  $90^\circ$  gedreht, sodass er von der Lichtquelle abgewandt war. Jetzt wurde ein Diopter so gestellt, dass sein Spiegelbild in die Verlängerung der Einfalls-

1) A. Pockels, Wied. Ann. 67. p. 672. 1899.



und dem des Spiegels von der Wasseroberfläche berechnet. Sie betrug  $+0,4^\circ$ , sodass in der Rechnung

$$\frac{\varphi}{2} = 17,5^\circ$$

zu setzen ist.

Es muss bemerkt werden, dass diese Messungen nur dann den Randwinkel ergeben, wenn die Wasseroberfläche um den Oeltropfen herum nicht deformiert ist. Von vornherein ist das nicht anzunehmen. Doch ergaben Beobachtungen mittels Spiegelung sowohl als mittels Brechung, dass bei einigermaßen kleinen Randwinkeln nicht einmal qualitativ eine Deformation nachzuweisen war.

#### Berechnung der Oberflächenspannung.

Es sei  $\alpha_1$  die Oberflächenspannung der anomalen Wasseroberfläche,  $\alpha_{12}$  die Grenzflächenspannung Oel gegen Wasser,  $\alpha_2$  die Capillarconstante des Olivenöls (vgl. auch Fig. 4), dann ist:

$$\alpha_{12}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2 \alpha_1 \alpha_2 \cos x,$$

oder

$$\alpha_1 = \alpha_2 \cos x + \sqrt{\alpha_{12}^2 - \alpha_2^2 \sin^2 x}.$$

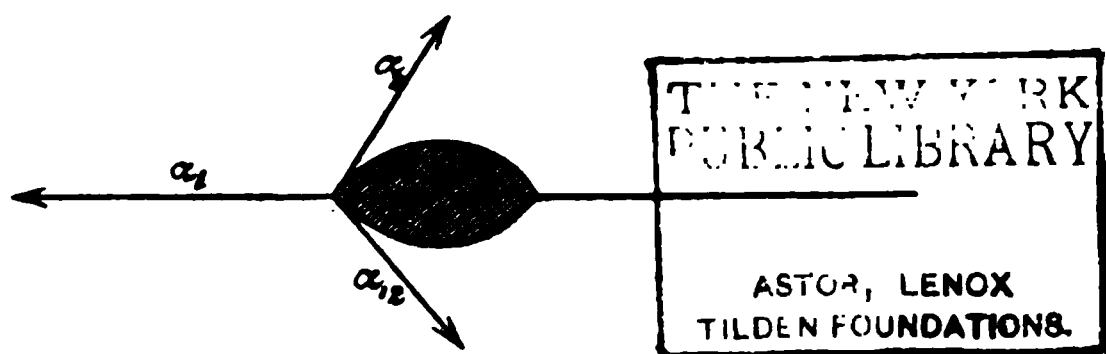


Fig. 4.

Die Constante  $\alpha_{12}$  hatte ich nach der Methode der flachen Tropfen von Quincke<sup>1)</sup> bestimmt, und zwar in der Weise, dass eine Oelblase in einem Trog mit Wasser unter eine horizontale Glasplatte gebracht wurde. Die Theorie ergibt nur dann richtige Werte, wenn die Kuppe der Oelblase als horizontal anzusehen ist, und die Horizontaldimensionen gross gegenüber den Verticaldimensionen sind. Das ist nun bei einem solchen Oeltropfen kaum zu erreichen, sodass der gefundene Wert

$$\alpha_{12} = 2,63 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$$

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 139. p. 5. 1870.



gleichen Weise bis zum Anfangswert verkleinert. Der Hin- und Rückweg ergab nahezu die gleichen Werte. Aus den Tab. I und II, sowie später aus IV, V, VI scheint zu folgen, dass die Oberfläche mit der Zeit reiner wird. Das ist aber nur richtig, wenn man die Grenzflächenspannung  $\alpha_1$ , als unabhängig von der Grösse der Grenzfläche Oel-Wasser betrachten darf. Eine Wiederholung des Versuches ergab folgende Tabelle.

| IV.    |            |                                     | V.         |                                     |  | VI.        |                                     |  |
|--------|------------|-------------------------------------|------------|-------------------------------------|--|------------|-------------------------------------|--|
| $l$    | $\angle x$ | $\alpha_1$                          | $\angle x$ | $\alpha_1$                          |  | $\angle x$ | $\alpha_1$                          |  |
| 2,5 cm | 14,0°      | 5,788 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ | 12,3°      | 5,840 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ |  | 11,5°      | 5,865 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ |  |
| 5      | 9,0        | 5,915                               | 7,6        | 5,942                               |  | 7,6        | 5,942                               |  |
| 10     | 4,6        | 5,988                               | 4,5        | 5,990                               |  | 4,5        | 5,990                               |  |
| 20     | 2,3        | 6,010                               | 2,4        | 6,008                               |  | 2,4        | 6,008                               |  |
| 10     | 4,3        | 5,991                               | 3,5        | 6,000                               |  | 3,5        | 6,000                               |  |
| 5      | 7,6        | 5,942                               | 7,1        | 5,958                               |  | 6,6        | 5,962                               |  |
| 2,5    | 13,3       | 5,816                               | 11,7       | 5,862                               |  | 11,5       | 5,865                               |  |

Diese drei Versuchsreihen sind wieder mit ein und demselben Tropfen je um eine Viertelstunde später ausgeführt. Der Hin- und Rückgang ist wieder annähernd der gleiche. Man kann daraus schliessen, dass in der kurzen Zeit, die die Beobachtungen einer Verticalcolumnne beanspruchen, keine weitere Ausbreitung erfolgt. Das ist nicht mehr der Fall bei den folgenden Versuchsreihen. Zunächst wurde in umgekehrter Reihenfolge vorgegangen, indem der Oeltropfen auf eine Oberfläche von 20 cm Länge aufgesetzt und dieselbe dann verkleinert wurde. Die Resultate sind die folgenden:

| VII.  |            |                                     |
|-------|------------|-------------------------------------|
| $l$   | $\angle x$ | $\alpha_1$                          |
| 20 cm | 10,5°      | 5,884 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ |
| 10    | 14,2       | 5,784                               |
| 5     | 18,6       | 5,628                               |
| 2,5   | 23,5       | 5,372                               |
| 5     | 15,5       | 5,740                               |
| 10    | 10,3       | 5,888                               |
| 20    | 5,5        | 5,977                               |



Um die Bestimmung möglichst schnell durchführen zu können, wurde nicht das einer bestimmten Oberflächengrösse zukommende Abreissgewicht, sondern die einem bestimmten Abreissgewicht entsprechende Oberflächengrösse bestimmt. Es wurde also ein passend gewähltes Gewicht auf den zweiten Arm der Waage aufgesetzt, die Oberfläche so weit ausgedehnt, dass sie das Platinblech eben trug, und nun verkleinert, bis es abbriss. Die Waage befand sich in der Höhe, dass das Abreissen bei der Nullstellung der Zunge erfolgte.

Es ergaben sich folgende Versuchsreihen:

IX.

| <i>l</i> | $\sphericalangle x$ | <i>G</i> | $\alpha_1$ ber.                    | $\alpha_1$ beob.                   | $\alpha_{12}$                       |
|----------|---------------------|----------|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 8 cm     | 11,5°               | 5,00     | 5,86 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ | 4,80 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ | 1,628 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ |
| 10       | 8,0                 | 5,10     | 5,94                               | 4,90                               | 1,616                               |
| 12       | 6,0                 | 5,30     | 5,97                               | 5,09                               | 1,755                               |
| 16       | 3,25                | 5,50     | 6,00                               | 5,28                               | 1,889                               |

X.

| <i>l</i> | $\sphericalangle x$ | <i>G</i> | $\alpha_1$ ber.                     | $\alpha_1$ beob.                   | $\alpha_{12}$                       |
|----------|---------------------|----------|-------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 4,0 cm   | 12,0°               | 5,30     | 5,845 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ | 5,10 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ | 1,912 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ |
| 6,0      | 8,0                 | 5,50     | 5,935                               | 5,29                               | 2,008                               |
| 9,5      | 5,05                | 5,70     | 5,982                               | 5,48                               | 2,139                               |
| 17,8     | 4,0                 | 5,90     | 5,993                               | 5,67                               | 2,290                               |

XI.

| <i>l</i> | $\sphericalangle x$ | <i>G</i> | $\alpha_1$ beob.                   | $\alpha_{12}$                       |
|----------|---------------------|----------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 8,5 cm   | 10,0°               | 5,40     | 5,19 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ | 1,946 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ |
| 9,7      | 9,5                 | 5,50     | 5,28                               | 2,020                               |
| 11,5     | 8,2                 | 5,60     | 5,38                               | 2,089                               |
| 13,5     | 7,2                 | 5,70     | 5,47                               | 2,158                               |
| 16,4     | 6,0                 | 5,80     | 5,57                               | 2,237                               |
| 23,0     | 5,5                 | 5,90     | 5,67                               | 2,329                               |
| 17,2     | 6,0                 | 5,80     | 5,57                               | 2,237                               |
| 12,4     | 7,5                 | 5,60     | 5,38                               | 2,071                               |
| 10,5     | 9,0                 | 5,50     | 5,28                               | 2,010                               |
| 9,0      | 10,7                | 5,40     | 5,19                               | 1,965                               |





Die Wasseroberfläche hatte die Grösse von 100 cm<sup>2</sup>, so-  
dass sich pro cm<sup>2</sup> die Oelmenge

$$\sigma = 570 \cdot 10^{-6} \text{ mg}$$

ergiebt. Aus dem specifischen Gewicht des Oels 0,915 findet  
man somit die Dicke

$$d = 6,23 \cdot 10^{-6} \text{ mm.}$$

XII.

| <i>l</i> | <i>d</i> · 10 <sup>6</sup> | $\sigma$ 10 <sup>6</sup>             | $\alpha_1$                         |
|----------|----------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| 10 cm    | 12,46 mm                   | 1140 $\frac{\text{mg}}{\text{cm}^2}$ | 5,82 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ |
| 15       | 8,81                       | 760                                  | 5,87                               |
| 20       | 6,23                       | 570                                  | 5,92                               |
| 30       | 4,16                       | 385                                  | 6,01                               |
| 40       | 3,11                       | 285                                  | 6,04                               |

Diese Tabelle enthält die Dicken *d* und die Oelmengen pro cm<sup>2</sup>  $\sigma$ , die sich beim Vergrössern und Verkleinern der Oberfläche ergaben, und in der letzten Columne die zugehörigen Werte der Capillarconstanten, bestimmt mit der Cohäsionswaage. Beim Verkleinern der Oberfläche unter 20 cm traten Trübungen auf (vgl. später die Bestimmung des Molecularwirkungsradius). Wie aus den Werten  $\alpha_1$  folgt, bilden die bei den früheren Versuchen sich ausbreitenden Oelmengen weit dickere Schichten, als hier.

Eine Wiederholung der Versuche gab eine Abweichung in den zu einem bestimmten Werte von *d* gehörigen Werten von  $\alpha_1$ . Diese Abweichung mag damit zusammenhängen, dass sich  $\alpha_1$  bei constanter Wasseroberfläche und kleinen Oelmengen zeitlich verändert, und es nicht möglich ist, sofort nach Aufbringen des Oels die Messungen anzustellen. Die Werte der zweiten Beobachtung sind:

| <i>l</i> | <i>d</i> · 10 <sup>6</sup> | $\sigma$ · 10 <sup>6</sup>        | $\alpha_1$                         |
|----------|----------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 18,0 cm  | 4,01 mm                    | 367 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ | 5,96 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ |
| 11,5     | 6,35                       | 580                               | 5,81                               |



falls dann erreicht sein, wenn die Dicke der ausgebreiteten Schicht — gleichgültig aus welcher Substanz dieselbe besteht — gleich dem Durchmesser der Molecularwirkungssphäre ist. Wenn wir aus den ersten und letzten Werten für die Dicke  $d$  und für  $\alpha_1$  der Tab. XII den zu 3,4 mg/mm gehörigen Wert von  $d$  linear extrapoliren, also wenn wir die Gleichung

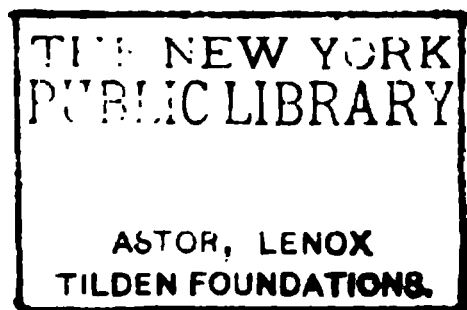
$$d = \alpha \alpha_1 + b$$

zu Grunde legen, so ergibt sich für

$$\alpha_1 = 3,4$$

und ist

$$d = 2l = 115 \text{ mm},$$



wenn  $l$  den Radius der Wirkungssphäre bedeutet. Dieser Wert stimmt mit den Messungen von Quincke nahezu überein, der  $2l = 100 \mu\mu$  gefunden hat. Die Uebereinstimmung wird noch besser, wenn man bedenkt, dass bei der Berechnung der Dicke die Oelschicht als gleich dick an allen Stellen angenommen ist, während man bei passender Beleuchtung bei nicht zu dünnen Schichten (vgl. p. 715) runde Oellinsen von grösserer Dicke als die Umgebung erkennen kann. Die wirkende Oelschicht war demnach in Wirklichkeit kleiner als  $115 \mu\mu$ .

Uebrigens ist die Extrapolation in der angegebenen Weise nur sehr angenähert zulässig, und die durch das Wasser bewirkte Aenderung der dünnen Oelhaut kann auch die Messungen beeinflusst haben.

Einen Minimalwert der Oberflächenspannung für geringe Dicken (etwa 10 oder  $17 \mu\mu$ ) der Oelhaut, wie er nach den Untersuchungen von Reinold und Rücker<sup>1)</sup> und Sir W. Thomson<sup>2)</sup> zu erwarten wäre, habe ich nicht gefunden.

#### **Paraffinöl auf Wasser.**

Um ausser Olivenöl noch eine andere Flüssigkeit zu untersuchen, verwandte ich Paraffinöl. Dieses zeigt ein ganz anderes Verhalten, wenn man es auf Wasser bringt. Es bleibt auch

1) A. W. Reinold und A. W. Rücker, Wied. Ann. 44. p. 1

2) W. Thomson, Popular lectures 1. p. 9. 1886.



3. Die Versuche mit der Cohäsionswaage ergaben, dass die Oberflächenspannung der anomalen Wasseroberfläche weit kleinere Werte annehmen kann, als man nach der Formel

$$\alpha_1 = \alpha_{12} + \alpha_2 = 5,4$$

erwarten sollte.

Aus diesen drei Punkten ist zu schliessen, dass auf der Wasseroberfläche, und zwar sowohl an ihrer Grenze gegen Oel, wie auch gegen Luft eine Flüssigkeitsschicht veränderter Eigenschaften ausgebreitet ist. Die unter dem Einfluss der Capillarkräfte stehenden Flüssigkeiten Wasser und Oel bilden eine von beiden verschiedene Grenzschicht, die entweder dadurch gebildet wird, dass die gegenseitige Löslichkeit infolge der Capillarkräfte geändert ist, oder die durch Hydrolyse des Oels zu stande kommt. Welche von diesen beiden Möglichkeiten der Fall ist, darüber müssen weitere Experimente entscheiden. Wahrscheinlicher erscheint mir Hydrolyse, da Paraffinöl, obwohl es sich scheinbar ausbreitet, keine so grosse Aenderung von  $\alpha_1$  verursacht.

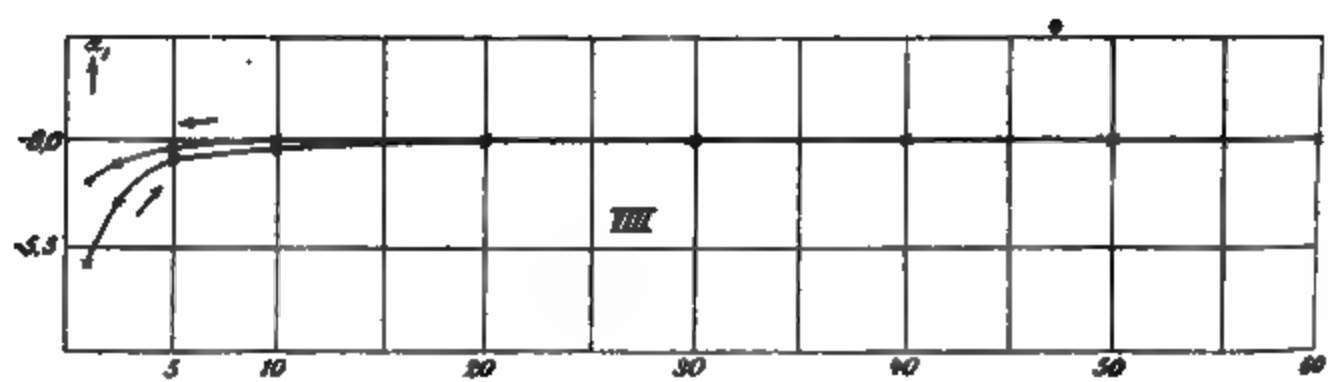
#### Erklärung der Curven.

Die auf p. 720 u. 721 angefügten Curven gehören zu den mit gleicher Nummer versehenen Versuchsreihen. Die Curven I—XI haben als Abscisse die Länge der Wasseroberfläche in cm, die Curven I—VIII als Ordinaten die Werte  $\alpha_1$ , IX—XI die Werte  $\alpha_{12}$  in mg/mm. Die letzte Curve, XII, hat die berechneten Dicken  $d$  der Schicht in  $\mu\mu$  zur Abscisse und wieder  $\alpha_1$  zur Ordinate.

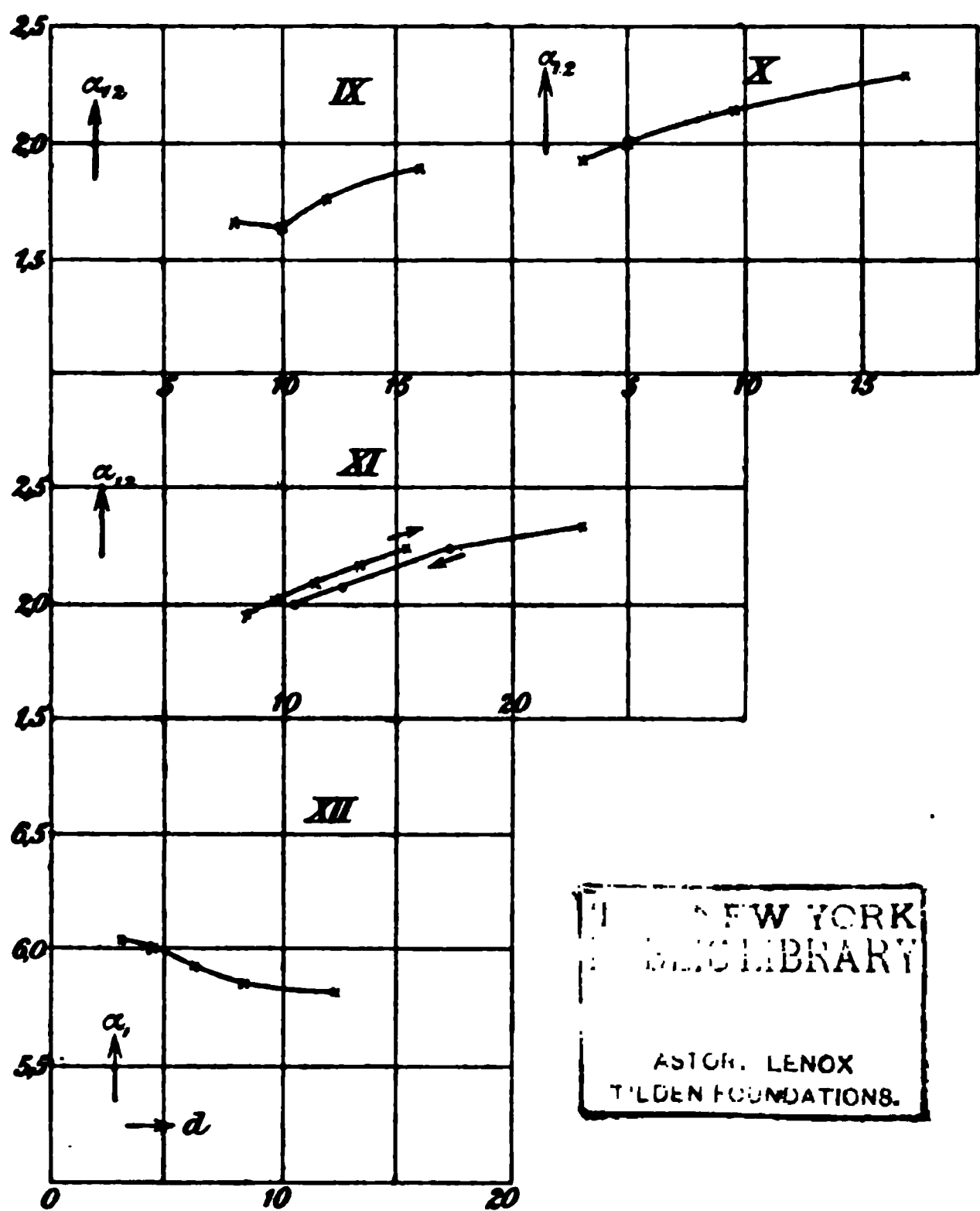
Zum Schluss erlaube ich mir, Hrn. Geheimrat Quincke meinen herzlichsten Dank für seine lebenswürdige Unterstützung auszusprechen.

(Eingegangen 19. Januar 1901.)

---



Curves I—VIII



NEW YORK  
PUBLIC LIBRARY  
ASTOR, LENOX  
TILDEN FOUNDATIONS.

Curven IX—XII.









Widerstand. Mit  $\mu$  bezeichnen wir den Coefficienten der gegenseitigen Induction zwischen dem secundären Leiter und einem Halbtheile des primären, mit  $\gamma$  die Capacität der Kugeln  $P_1$  oder  $P_2$ , mit  $\gamma_1$  diejenige des Condensators  $K', K''$ . Für die Ströme,  $i_1$  in jeder Hälfte des Oscillators und  $i_2$  im Resonator, erhält man folgende Gleichungen:

$$(53) \quad \begin{cases} \lambda_1 \frac{d i_1}{d t} + \mu \frac{d i_2}{d t} + \varrho_1 i_1 = v - V_1 = E_1, \\ \lambda_2 \frac{d i_2}{d t} + 2 \mu \frac{d i_1}{d t} + \varrho_2 i_2 = E_2, \\ i_1 = -\gamma \frac{d v}{d t} = \gamma_1 \frac{d V}{d t}, \\ i_2 = -C_2 \frac{d E_2}{d t}, \end{cases}$$

wo  $v$  das Potential der Kugel  $P_1$ ,  $V$  das Potential der Metallscheibe  $K_1$ , und  $E_2$  die Potentialdifferenz des secundären Condensators zur Zeit  $t$  bedeuten. Die Zeit  $t$  wird von der Entladung des partialen Funkens an gerechnet. Die Gleichungen sind offenbar dieselben, die im allgemeinen für die gegenseitige Induction zweier Leiter gelten, nur mit dem Unterschiede, dass in der zweiten Gleichung (53) das Glied  $2 \mu (d i_1 / d t)$  den Coefficienten  $2 \mu$  wegen des Einflusses der beiden Hälften des Oscillators enthält.

Aus den beiden Ausdrücken des primären Stromes erhält man

$$(54) \quad i_1 = -\frac{\gamma \gamma_1}{\gamma + \gamma_1} \frac{d(v - V)}{d t} = -C_1 \frac{d E_1}{d t},$$

wenn  $\gamma_1 \gamma_2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$  mit  $C_1$  und  $v - V$  mit der Potentialdifferenz  $E_1$  ersetzt werden. Bei Eliminiren von  $i_1$  und  $i_2$  aus den Gleichungen (53) erhält man

$$(55) \quad \begin{cases} \lambda_1 C_1 \frac{d^2 E_1}{d t^2} + \mu C_2 \frac{d^2 E_2}{d t^2} + \varrho_1 C_1 \frac{d E_1}{d t} + E_1 = 0, \\ \lambda_2 C_2 \frac{d^2 E_2}{d t^2} + 2 \mu C_2 \frac{d^2 E_1}{d t^2} + \varrho_2 C_2 \frac{d E_2}{d t} + E_2 = 0. \end{cases}$$

Die Integrale dieser Gleichungen hängen von den Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(56) \quad \begin{cases} (\lambda_1 \lambda_2 - 2 \mu^2) C_1 C_2 z^4 + (\lambda_1 \varrho_2 + \lambda_2 \varrho_1) C_1 C_2 z^3 \\ \quad + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \varrho_1 C_1 \varrho_2 C_2) z^2 \\ \quad + (\varrho_1 C_1 + \varrho_2 C_2) z + 1 = 0 \end{cases}$$



Beim Differentiiren der letzten Gleichung (57) und Einsetzen der obigen Anfangswerte erhält man somit

$$(58) \begin{cases} Y_1 + Y_2 = 0, \\ X_1 p_1 + X_2 p_2 - Y_1 q_1 - Y_2 q_2 = 0, \\ 2 q_1 X_1 p_1 + 2 q_2 X_2 p_2 + Y_1 (p_1^2 - q_1^2) \\ \quad + Y_2 (p_2^2 - q_2^2) = \frac{2 \mu}{\lambda_1 \lambda_2 C_2 \Delta} \cdot \frac{Q_0}{\gamma}, \end{cases}$$

$$(58a) \begin{cases} X_1 p_1 (3 q_1^2 - p_1^2) + X_2 p_2 (3 q_2^2 - p_2^2) \\ \quad + Y_1 q_1 (3 p_1^2 - q_1^2) + Y_2 q_2 (3 p_2^2 - q_2^2) \\ \quad = \frac{2 \mu}{\lambda_1 \lambda_2 C_2 \Delta^2} \left( \frac{q_1}{\lambda_1} + \frac{q_2}{\lambda_2} \right) \frac{Q_0}{\gamma}. \end{cases}$$

Die Grösse  $Q_0/\gamma$  wird mit  $Q_0'/C_1$  ersetzt, und aus der zweiten und dritten der obigen Gleichungen erhält man:

$$59) \begin{cases} 2 X_1 p_1 = \frac{2 \mu Q_0'}{(q_1 - q_2) \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta} - \frac{Y_1 (p_1^2 + q_1^2) + Y_2 (p_2^2 + q_2^2)}{q_1 - q_2} + 2 q_1 Y_1, \\ 2 X_2 p_2 = \frac{-2 \mu Q_0'}{(q_1 - q_2) \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta} + \frac{Y_1 (p_1^2 + q_1^2) + Y_2 (p_2^2 + q_2^2)}{q_1 - q_2} + 2 q_2 Y_2, \end{cases}$$

und beim Einsetzen dieser Werte in der letzten Gleichung ergibt sich:

$$59a) Y_1 = -Y_2 = \frac{\frac{2 \mu Q_0'}{\lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta^2} \left( \frac{q_1}{\lambda_1} + \frac{q_2}{\lambda_2} \right) - \frac{\mu Q_0' [3(q_1^2 - q_2^2) - (p_1^2 - p_2^2)]}{(q_1 - q_2) \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta}}{N},$$

wo der Nenner  $N$  die folgende Bedeutung hat:

$$N = \frac{[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]^2 - 4(q_1 - q_2)[q_2(p_1^2 + q_1^2) - q_1(p_2^2 + q_2^2)]}{2(q_1 - q_2)}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (6) und (9) in der oben erwähnten Arbeit von Hrn. Erskine kann der Zähler in (59a) mittels der Wurzeln ausgedrückt werden, und es ergibt sich somit:

$$(60) Y_1 = -Y_2 = 2 \mu Q_0' \frac{(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]}{[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]^2 - 4(q_1 - q_2)[q_2(p_1^2 + q_1^2) - q_1(p_2^2 + q_2^2)]}.$$

Aus den Gleichungen (59) erhält man:

$$61) \begin{cases} X_1 = \frac{2 \mu Q_0'}{p_1} \cdot \frac{(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)[q_1(p_2^2 + q_2^2) + (q_1 - 2 q_2)(p_1^2 + q_1^2)]}{[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]^2 - 4(q_1 - q_2)[q_2(p_1^2 + q_1^2) - q_1(p_2^2 + q_2^2)]}, \\ X_2 = \frac{2 \mu Q_0'}{p_2} \cdot \frac{(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)[q_2(p_1^2 + q_1^2) + (q_2 - 2 q_1)(p_2^2 + q_2^2)]}{[p_1^2 + q_1^2 - (p_2^2 + q_2^2)]^2 - 4(q_1 - q_2)[q_2(p_1^2 + q_1^2) - q_1(p_2^2 + q_2^2)]}. \end{cases}$$



Es soll hier nur ein specieller Fall angenommen werden, nämlich die Beziehung  $C_1 \varrho_1 = C_2 \varrho_2$  zwischen den Widerständen und den Capacitäten der beiden Leiter. Dieser Fall ist von Hrn. Blümcke behandelt worden, der gezeigt hat, dass unter dieser Voraussetzung die Gleichung (56) exact aufgelöst werden kann.<sup>1)</sup> Was die Auflösung betrifft, genügt es hier, auf seine Arbeit zu verweisen und wir wollen hier nur die dabei ermittelten Werte von  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  und  $q_2$  anführen:

$$q_1 = \frac{C \varrho}{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - R},$$

$$q_2 = \frac{C \varrho}{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + R},$$

$$p_1 = \frac{\sqrt{2(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) - C^2 \varrho^2 - 2R}}{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - R}$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{2(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) - C^2 \varrho^2 + 2R}}{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + R}$$

$R$  bedeutet hier die Wurzel

$$R = \sqrt{(\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2)^2 + 8 \mu^2 C_1 C_2}.$$

Von den oben erwähnten Werten der Wurzeln erhält man die folgenden Beziehungen:

$$p_1^2 + q_1^2 = \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + R}{2 \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

$$p_2^2 + q_2^2 = \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - R}{2 \lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

$$(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2) = \frac{1}{\lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

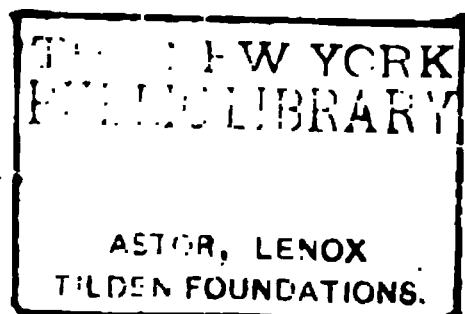
$$(p_1^2 + q_1^2) - (p_2^2 + q_2^2) = \frac{R}{\lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

$$q_2(p_1^2 + q_1^2) - q_1(p_2^2 + q_2^2) = 0,$$

$$q_1 - q_2 = \frac{R C \varrho}{\lambda_1 C_1 \lambda_2 C_2 \Delta},$$

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = 2 \cdot \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{C \varrho},$$

$$\frac{p_1^2 + q_1^2}{q_1} = \frac{p_2^2 + q_2^2}{q_2} = \frac{2}{C \varrho}.$$



1) A. Blümcke, Wied. Ann. 58. p. 415. 1896.

















fernung der letzteren voneinander das Maass von 8 mm nicht überschreitet. Ausserdem springt der Funke ja auch nicht immer genau in der Mittellinie der beiden Kugeln über.

Von Drähten sind solche von verschiedener Dicke und Material zur Untersuchung gekommen. Am besten eignete sich für die vorliegenden Versuche Messingdraht von 0,3 bis 0,5 mm Dicke.

War der Draht dünner wie 0,3 mm, so war die seitliche Entladung so stark, dass eine besondere Erscheinung nicht beobachtet werden konnte. War der Draht dagegen stärker

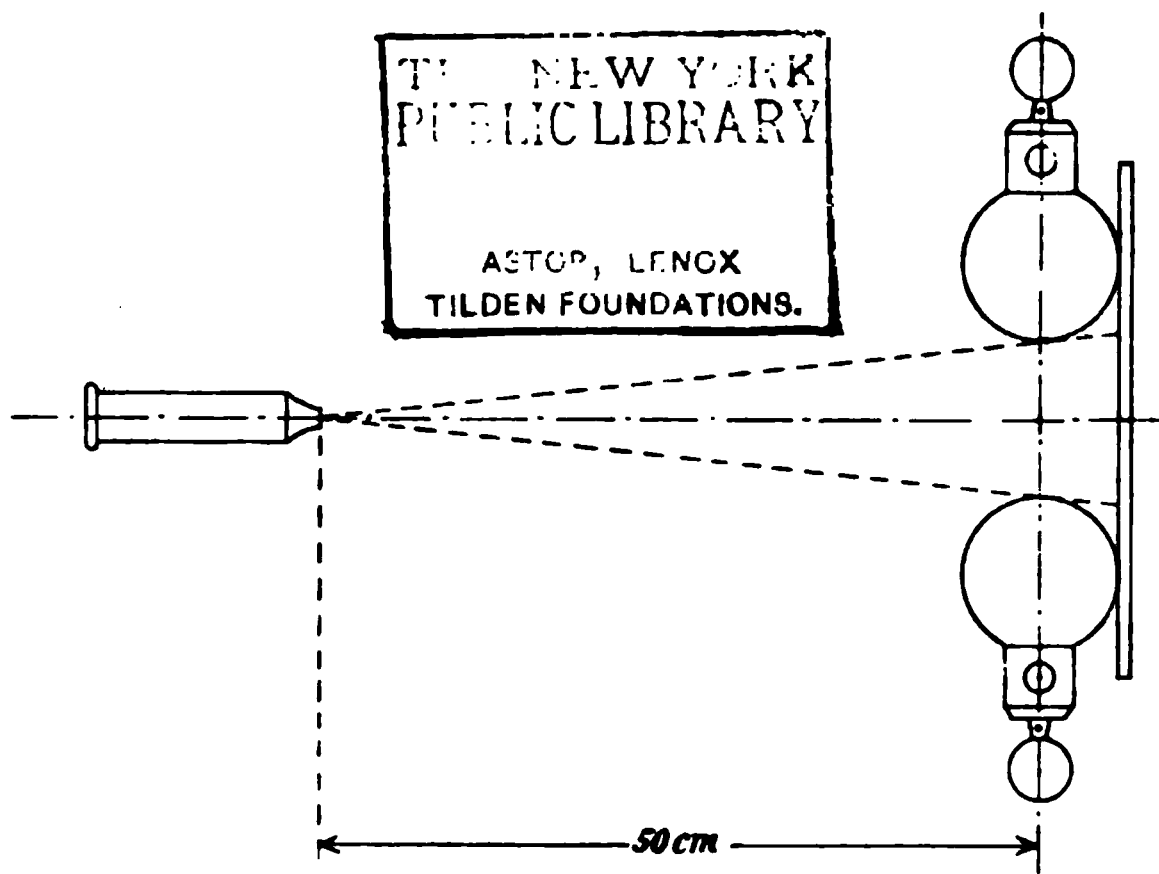


Fig. 2.

als 0,5 mm, so war die Seitenentladung zu schwach. Es kamen daher bei den Versuchen stets Messingdrähte von 0,37 und 0,42 mm Dicke zur Anwendung.

Ausserdem muss noch bemerkt werden, dass zu den vorliegenden Versuchen die Luft sehr trocken sein muss. Die besten Resultate wurden Ende April und Anfang Mai d. J. erzielt, wo die Luft nur 40 Proc. relative Feuchtigkeit besass.

Als Ende Juni einige der Versuche noch einmal wiederholt werden sollten, stiess dies auf grosse Schwierigkeiten und wurde theils unmöglich, da zu dieser Zeit die Luft nach einigen regenreichen Tagen über 70 Proc. relative Feuchtigkeit besass.



























Die Voraussetzung bestätigte sich. Zeigten sich bei einer bestimmten Funkenstrecke  $F$  auf dem Draht  $AB$  z. B. vier Bäuche, so waren auf  $CD$  nur zwei sichtbar. Zeigte hingegen  $AB$  sechs dunkle Bäuche, so waren auf  $CD$  drei. Immer war das Verhältniß das ihrer Längen. Natürlich kann man hier nur gerade Vielfache einer Wellenlänge anwenden.



Fig. 15.

Zwei Versuche sind noch zu erwähnen, welche bezweckten, das Leuchten des Drahtes intensiver zu machen.

Einmal wurde der Prüfungsdraht in eine Vacuumröhre eingezogen. Hierbei leuchtete die ganze Röhre auf und war eine Einteilung nicht zu erkennen.

Dann verwandte man ein Inductorium mit Teslaanordnung wie in Fig. 16.

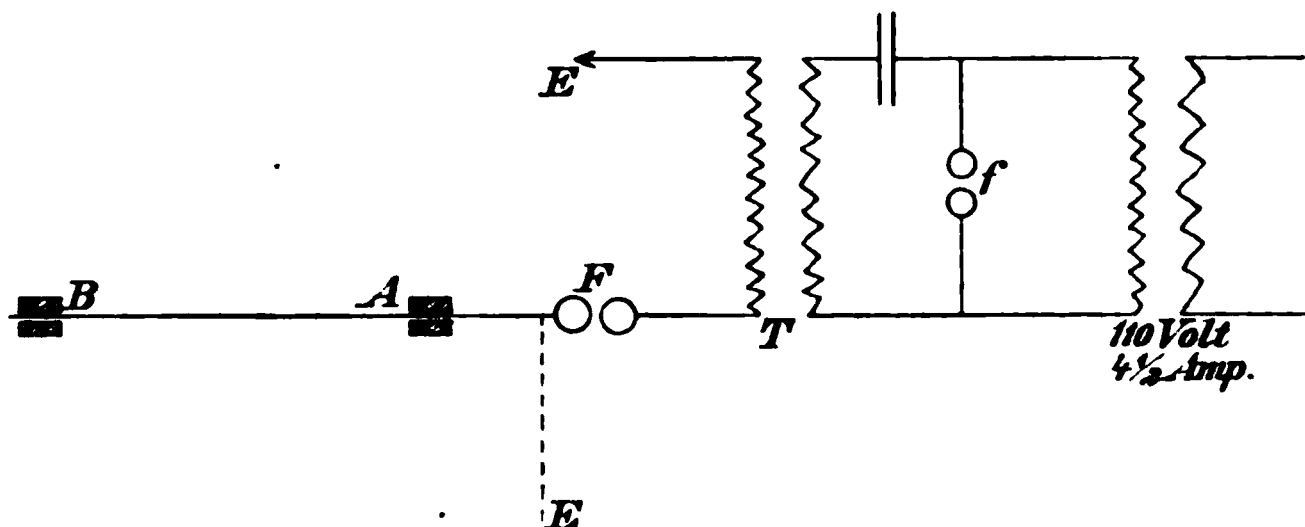


Fig. 16.

Diese Anordnung ergab nicht bessere Resultate als die Elektrisirmaschine. Der Prüfungsdraht war durch die Funkenstrecke  $F$  mit dem einen Ende der secundären Spule des Oeltransformators verbunden, während das andere zur Erde abgeleitet war.  $f$  war eine regulirbare Zinkfunkenstrecke.

Wollte man eine Einteilung auf dem Prüfungsdraht erhalten, so musste man beide Funkenstrecken zugleich verstellen. Machte man z. B. nur  $F$  kleiner, während  $f$  blieb, so leuchtete der Draht an seiner ganzen Länge auf. Erst wenn auch  $f$  verkleinert wurde, trat auf  $AB$  wieder eine Einteilung auf.

Die photographischen Aufnahmen sind jedoch bei Verwendung der Elektrisirmaschine gemacht worden.



Schwingt der Draht mechanisch, so muss er auch einen Ton erzeugen. Bei grossen Funkenstrecken kann man zwei Töne hören. Der eine ändert sich sowohl mit dem Laufe der Maschine als auch mit der Grösse der Funkenstrecke. Dies ist der Ton der letzteren, welcher sich in dem Draht fortpflanzt. Ausser diesem kräftigen Ton ist noch ein zweiter tiefer, aber schwacher Ton zu hören, der bald verschwindet oder für das Ohr nicht mehr hörbar wird, sowie der Ton der Funkenstrecke ein höherer ist.

Es lag nun nahe, nach einem Verhältniss zwischen der Zahl der Wellen, der Tonhöhe und der Grösse der Funkenstrecke zu suchen.

Die Untersuchung wurde in zwei Abteilungen geführt, und zwar wurde erst die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Funkenstrecke und dann diejenige der Zahl der Wellen von der Funkenstrecke bestimmt. Ist dann die Abhängigkeit von der Funkenstrecke die gleiche, so konnte man ohne weiteres auf ihr gegenseitiges Verhältniss schliessen.

Zur Bestimmung der Tonhöhe kamen zunächst Stimmgabeln mit 32, 64, 128 Schwingungen zur Anwendung.

Weil es für eine Messung unsicher ist, mit dem Gehör die Terz, Quinte etc. zum Grundton zu bestimmen, man aber zu einem gegebenen Ton viel leichter die höhere oder tiefere Octave bestimmen kann, so wurde ein vorhandener Stimmgabelsatz benutzt, und zwar

|       |               |          |       |
|-------|---------------|----------|-------|
| $C'$  | mit $n = 256$ | Grundton | = I   |
| $E'$  | „ $n = 320$   | Terz     | = III |
| $G'$  | „ $n = 384$   | Quinte   | = V   |
| $C''$ | „ $n = 512$   | Octave   | = II  |

Im Folgenden wird nur vom Grundton, Terz etc. die Rede sein, bezeichnet mit I, III etc., nicht aber von den Schwingungszahlen.

Der Gang der Maschine wurde möglichst constant gehalten und die Messungen rasch hintereinander ausgeführt.

Die Funkenstrecke wurde nun so lange verstellt, bis der Ton des Prüfungsdrahtes dem jeweiligen der Stimmgabel entsprach. Dann wurde, wie beschrieben, die Grösse der Funkenstrecke abgelesen. Waren alle möglichen Einteilungen bestimmt, so wurde die Messung wieder rückwärts ausgeführt.

### Messung II.

|     | <i>F</i> |
|-----|----------|
| I   | 5,0      |
| III | 4,2      |
| V   | 3,4      |
| II  | 2,8      |

Hierbei muss man die Verhältniszahlen des Accordes  $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} : 2$  erhalten.

Der Grundton wird immer als 1 gesetzt. Man erhält

$$5,0 : 4,2 = 5 : 4,2 \sim 5 : 4$$

$$5,0 : 3,4 = 3 : 2,04 \sim 3 : 2$$

$$5,0 : 2,8 = 2 : 1,16 \sim 2 : 1$$

Dieselben Betrachtungen wiederholen sich bei den folgenden Messungen.

Messung III.

|     | <i>F</i> |     |     | <i>F<sub>m</sub></i> |
|-----|----------|-----|-----|----------------------|
| I   | 3,9      | 4,0 | 4,0 | 3,96                 |
| III | 2,5      | 3,0 | 3,0 | 2,84                 |
| V   | 2,1      | 2,3 | 2,5 | 2,30                 |
| II  | 1,9      | 1,9 | 2   | 1,93                 |

*F<sub>m</sub>* bedeutet das Mittel aus den drei Messungen.

$$\begin{aligned} 3,96 : 2,84 &= 5 : 3,6 \sim 5 : 4 \\ 3,96 : 2,30 &= 3 : 1,75 \sim 3 : 2 \\ 3,96 : 1,93 &= 2 : 0,975 \sim 2 : 1 \end{aligned}$$

Messung IV.

|     | <i>F</i> |     |     | <i>F<sub>m</sub></i> |
|-----|----------|-----|-----|----------------------|
| I   | 6,3      | 6,3 | 6,1 | 6,22                 |
| III | 5,5      | 5,1 | 5,5 | 5,35                 |
| V   | 4,1      | 3,8 | 3,8 | 3,90                 |
| II  | 3,1      | 3,0 | 3,0 | 3,03                 |

$$\begin{aligned} 6,22 : 5,35 &= 5 : 4,3 \sim 5 : 4 \\ 6,22 : 3,9 &= 3 : 1,89 \sim 3 : 2 \\ 6,22 : 3,03 &= 2 : 0,975 \sim 2 : 1 \end{aligned}$$

Messung V.

|     | <i>F</i> |     | <i>F<sub>m</sub></i> |
|-----|----------|-----|----------------------|
| I   | 8        | 7,9 | 7,95                 |
| III | 6,2      | 6,0 | 6,10                 |
| V   | 5,0      | 4,8 | 4,90                 |
| II  | 4,0      | 4,1 | 4,05                 |

$$\begin{aligned} 7,95 : 6,1 &= 5 : 3,85 \sim 5 : 4 \\ 7,95 : 4,9 &= 3 : 1,85 \sim 3 : 2 \\ 7,95 : 4,05 &= 2 : 1,04 \sim 2 : 1 \end{aligned}$$

Aus diesen fünf Messungen lässt sich ohne Schwierigkeit das Gesetz ableiten, dass die Tonhöhe der Grösse der Funkenstrecke umgekehrt proportional ist.

Es bleibt nun noch der zweite Teil der Messung zu bestimmen, eine Uebereinstimmung zwischen der Grösse der Funkenstrecke und der Wellenzahl zu finden.

Hier sind zwei Octaven bestimmt; man muss also das Verhältniss 2 : 1 erhalten.

$$4,2 : 2,2 = 2 : 1,05 \sim 2 : 1 = 8 : 4$$

$$2,2 : 1,2 = 2 : 1,09 \sim 2 : 1 = 16 : 8$$

Messung IV.

| <i>F</i> | <i>N</i> |
|----------|----------|
| 3,35     | 6        |
| 2,50     | 8        |
| 1,20     | 16       |

Nach Schlussfolgerungen aus den oberen Messungen würde vier Bäuchen eine Funkenstrecke von 5 mm entsprechen. Eine Schwingung mit sechs Bäuchen ist die Quinte derjenigen mit vier Bäuchen, ihr Verhältniss also 3 : 2. Nun ist

$$5 : 3,35 = 3 : 2,01 \sim 3 : 2$$

$$2,50 : 1,20 = 2 : 0,96 \sim 2 : 1$$















bindung mit dem negativen Conductor der Draht sich nur mit leuchtenden Punkten besetzte. An die Kugel wurde nun eine in Schwingung versetzte Stimmgabel gehalten und sollte so der Draht eine Welleneinteilung zeigen durch die Stösse, die sich in ihm fortpflanzen.

Das Experiment gelang nicht, ebensowenig, wenn man die Stimmgabel seitlich, wie punktirt, an den Draht hielt.

---

Zieht man die gefundenen Resultate zusammen, so kann man folgende Sätze aufstellen:

1. Lässt man an einem Ende eines isolirt ausgespannten Drahtes Elektrizität von hoher Spannung überspringen, so gerät der Draht in Transversalschwingungen.

2. Ist diese Elektrizität negativ und die Spannung so hoch, dass sichtbare Seitenentladungen längs des Drahtes stattfinden, so wird diese an den Stellen, an denen sich der Draht in Schwingung befindet, für das Auge unsichtbar und bleibt nur an den Schwingungsknoten sichtbar. Man erhält so das Bild einer leuchtenden Welle.

3. Durch Veränderung der Funkenstrecke kann man die Zahl dieser Wellen vergrössern und verkleinern. Die Anzahl der Schwingungsbäuche ist umgekehrt proportional der Grösse der Funkenstrecke.

4. Die Höhe des Tones, der längs des gespannten Drahtes hörbar ist, ist umgekehrt proportional der Grösse der Funkenstrecke und seine Schwingungszahl entspricht der Anzahl der überspringenden Funken.

---

Zum Schlusse sei es mir gestattet, meinen hochverehrten Lehrern, Hrn. Professor Dr. Wachsmuth für die Anregung zu dieser Arbeit, und dem Director des Physikalischen Instituts, Hrn. Professor Dr. phil. et med. L. Matthiessen, für die Bereitwilligkeit, mit der er mir die erforderlichen Apparate zur Verfügung stellte, meinen ergebensten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 8. Januar 1901.)





beruhe. Bei manchen Metallen, die er positive nennt, z. B. bei Eisen, sei die *A*-Modification die normale, bei anderen, z. B. bei Kalium, die *B*-Modification.

Trifft nun eine elektrische Welle auf den Cohärer, so tritt nach Bose eine Umwandlung der normalen in die andere Modification ein, doch erstreckt sich diese nur auf die Oberflächenschichten, während die tiefer liegenden im normalen Zustande bleiben. Darum wendet er die Cohärersubstanz möglichst in gepulverter Form an, um dadurch eine grosse Oberfläche zu erzielen und die Empfindlichkeit zu steigern.

Gegen Bose's Auffassung sprechen jedoch die Versuche von Branly<sup>1)</sup>, Guthe und Trowbridge<sup>2)</sup>, bei denen Metallplatten oder Kugeln als Cohärerelektroden benutzt wurden, die stets eine sehr grosse Empfindlichkeit zeigten.

Bose fand ferner bei der Anwendung eines mit gepulverter Substanz gefüllten Cohärers, dass der Widerstand bei Wiederholung des elektrischen Einflusses in unregelmässiger Weise hin und herschwankte, in „Oscillationen“ geriet, die er auf plötzliche Auslösung der entstandenen Spannungen zwischen den äusseren und inneren Schichten der Metallstückchen zurückführt. Dieses Auftreten von Oscillationen hält Bose für eine Bestätigung seiner Theorie.

Beobachtungen über die Abhängigkeit des Cohärerwiderstandes von der Funkenzahl sind aber auch von Mizuno<sup>3)</sup> angestellt worden. Die Curven, die er erhielt, gleichen ganz und gar dem Typus der Bose'schen Curven für positive Metalle. In einem Falle jedoch hat er einen Bleicohärer mit nur einem, bez. zwei Contacten angewandt. Im ersteren Falle war nichts von einer Oscillation zu bemerken, sondern der Widerstand fiel schon nach zwei Funken auf ein constantes Minimum; bei zwei Contacten fällt der Widerstand nach einem einmaligen Hinaufgehen ebenfalls auf einen constanten Minimalwert. Auch Mizuno's Resultate mit dem nach Bose am meisten negativen Kalium widersprechen der Theorie des letzteren vollständig,

---

1) E. Branly, Compt. rend. 127. p. 219. 1898; 128. p. 1089. 1899.

2) K. E. Guthe u. A. Trowbridge, Phys. Rev. 11. p. 22. 1900; vgl. auch A. Trowbridge, Am. Journ. Science September 1899.

3) T. Mizuno, Phil. Mag. 50. p. 445. 1900.



schraube konnte der ursprüngliche Widerstand innerhalb weiter Grenzen variirt werden. Da ich in den folgenden Versuchen stets blank geputzte Metallcalotten verwendete, war grosse Sorgfalt dabei notwendig. Es ist viel leichter einen passenden hohen Widerstand zu erhalten, wenn die Metalle einige Zeit der Luft ausgesetzt sind.

Nach der Justirung wurde der Hülfskreis geöffnet und der Cohärerereffect durch eine Batterie von höherer elektromotorischer Kraft ( $B$ ) durch das Schliessen des Schlüssels  $K$  hervorgerufen.<sup>1)</sup> Dieser Strom wurde nur so lange geschlossen gehalten, als zur Ladung und Entladung des Condensators  $C$  notwendig war. Der bei der Entladung des Condensators erhaltene Galvanometerausschlag ergab dann die Potentialdifferenz an den Enden des Cohärers mittels der mit einem Normalelement gefundenen Constanten. Ein Schliessen des Hülfskreises kurz nach dem Oeffnen des Schlüssels  $K$  erlaubte die Widerstandsänderungen, die nachträglich eintraten, zu beobachten.

Zur Anwendung kamen Cohärer aus Silber, Kupfer, Zink, Aluminium, Cadmium, Zinn, Eisen, Neusilber, Nickel und Wismut.

*Die negative Cohärerwirkung konnte ich bei allen diesen Metallen unter gewissen Umständen beobachten*, doch tritt dieselbe bei den weicheren viel häufiger als bei den härteren Metallen ein und zwar besonders bei frisch hergestellten Cohärern. Dies hat auch Bose beobachtet. Die Erscheinung war ungefähr folgende. Bei der Justirung des Instrumentes trat im Ampèremeter ein Hin- und Herschwenken der Nadel ein, bis sie sich schliesslich ruhig einstellte. Sobald nun der Hauptstrom durch den Cohärer geschlossen wurde, ging der Widerstand sehr hoch hinauf. Gleich nach dem Oeffnen des Hauptstromes wurde der Hülfskreis geschlossen. Das Ampèremeter zeigte dann gewöhnlich durch ein verhältnismässig rasches, aber unregelmässiges Ansteigen des Ausschlages, dass sich der kleinere

---

1) Es scheint mir, dass man bisher stets zu viel Gewicht auf das Vorhandensein elektrischer Oscillationen gelegt hat. Die Hauptwirkung derselben beruht auf der Grösse der ersten Amplitude. Die Benutzung einer Batterie in der oben beschriebenen Weise ist jedenfalls für das Studium des Cohärerereffectes vorzuziehen.



wirkung trat bei den weichen Metallen besonders häufig auf, wenn die Calotten kurz vorher mit Smirgelpapier gereinigt waren, verschwand aber, wenn sie mit feinem Handschuhleder gerieben wurden.

Nach den vorliegenden Versuchen dürfte es wahrscheinlich sein, dass die negative Cohärerwirkung bei der so häufig angewandten Form des Cohärers auf secundäre Erscheinungen zurückzuführen ist, die mit der eigentlichen Cohärerwirkung nichts zu thun haben; denn, wenn die Cohärersubstanz in gepulvertem Zustande angewandt wird, so werden solche störende Einflüsse besonders stark hervortreten.<sup>1)</sup>

## 2. Die kritische Potentialdifferenz.

In einer früheren Arbeit haben Guthe und Trowbridge<sup>2)</sup> gezeigt, dass bei der Anwendung eines dem oben beschriebenen ganz ähnlichen Instrumentes gewisse Gesetzmässigkeiten auftraten, die sich bei allen untersuchten Metallen: Eisen, Kupfer, Blei und Phosphorbronze, als gültig erwiesen.

Wir zeigten, z. B., wenn die Cohärerwirkung durch eine in den Cohärerkreis eingeschaltete Batterie bewirkt war, 1. dass die Potentialdifferenz an den Enden des Cohärers bei genügender Stromstärke einen constanten Wert besitzt, welcher von einer weiteren Steigerung des Stromes oder einer Aenderung der angelegten elektromotorischen Kraft unabhängig ist, für verschiedene Metalle jedoch verschiedene Werte hat. Für mehrere Contacts ist dieselbe der Zahl derselben proportional. 2. Dass bei der Anwendung einer elektromotorischen Kraft, die kleiner als diese Potentialdifferenz ist, keine Cohärerwirkung eintritt. Wir nannten daher diesen Wert die „kritische Potentialdifferenz“.

Ich habe nun diese Untersuchungen auf eine grössere Anzahl von Metallen ausgedehnt, und zwar auf die schon im Cap. 1 erwähnten. Da mir nur daran lag, die kritische Potentialdifferenz dieser Metalle zu bestimmen, wurde von einer genauen Messung des Stromes abgesehen, doch vergewisserte ich mich in jedem Falle durch Aenderung der Stromstärke und der

1) Eine soeben erschienene Untersuchung von E. Marx, Physik. Zeitschr., den 26. Januar 1901, über die Wirkungsweise des Schäfer'schen Anticohärers, bestätigt meine oben ausgesprochenen Vermutungen.

2) K. E. Guthe u. A. Trowbridge, Phys. Rev. 11. p. 22. 1900.



kritische Potentialdifferenz 0,127 Volt; das giebt als Product  $26,28 = 4 \times 6,57$ .

Die ersten vier Metalle sind die besten Leiter für Wärme sowohl wie für Elektrizität, während Pb und Bi auch in dieser Beziehung für sich allein stehen.

Diese Constanz des Productes aus kritischer Potentialdifferenz und Atomgewicht für gewisse Metallgruppen ist jedenfalls auffallend. Vom Krümmungsradius ist dieselbe nach den Versuchen von Guthe und Trowbridge unabhängig. Ob jedoch die Temperatur, Oxydation der Metalle etc. einen Einfluss auf diese Erscheinung haben, sollte durch weitere Versuche festgestellt werden, da das vorliegende Beobachtungsmaterial noch nicht umfangreich genug ist.

b) Cohärer, bestehend aus verschiedenen Metallen.

Es schien bei der Verschiedenheit der kritischen Potentialdifferenzen von Interesse, zu untersuchen, ob die Richtung des Stromes auf den Cohärereffect von Einfluss sei, wenn derselbe zwischen verschiedenen Metallen hervorgerufen wird. Die folgende Tab. 3 enthält die Resultate. Darin ist die Potentialdifferenz angegeben, welche ich erhielt, wenn der Strom von dem in der horizontalen Reihe gegebenen zu dem in der verticalen Reihe stehenden Metall floss. Die Galvanometerausschläge waren im allgemeinen constant, nur mit Aluminium als einer Calotte erhielt ich durchaus unbefriedigende Resultate. Die Ausschläge wichen in den einzelnen Reihen beträchtlich voneinander ab; ich habe daher das Aluminium in der Tabelle nicht mit angeführt.

Tabelle 3.

|        | Ag    | Cu    | Zn    | Cd    | Sn       | Fe    | Neu-S.  | Ni    | Bi       |
|--------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|---------|-------|----------|
| Ag     | 0,062 | 0,082 | 0,125 | 0,127 | 0,164    | 0,256 | 0,078   | 0,209 | 0,13     |
| Cu     | 0,086 | 0,094 | 0,135 | 0,142 | 0,170    | 0,252 | —       | —     | 0,13     |
| Zn     | 0,119 | 0,143 | 0,096 | 0,109 | 0,103    | 0,141 | —       | —     | 0,117    |
| Cd     | 0,118 | 0,131 | 0,105 | 0,109 | 0,087    | 0,174 | 0,091   | —     | —        |
| Sn     | 0,166 | 0,179 | 0,089 | 0,087 | 0,095    | 0,210 | ca. 0,2 | 0,152 | ca. 0,13 |
| Fe     | 0,300 | 0,278 | 0,141 | 0,152 | 0,152    | 0,222 | 0,243   | 0,300 | 0,220    |
| Neu-S. | 0,078 | —     | —     | 0,10  | ca. 0,20 | 0,261 | 0,139   | 0,170 | 0,165    |
| Ni     | 0,122 | —     | —     | —     | 0,109    | 0,287 | 0,191   | 0,204 | 0,117    |
| Bi     | 0,26  | 0,261 | 0,196 | —     | ca. 0,22 | 0,304 | 0,209   | 0,196 | 0,183    |





Ein metallischer Widerstand als Folge des Cohärereffectes wird bekanntlich auch von Lodge angenommen, nach welchem Funken zwischen den Teilchen überspringen, dieselben zusammenschweissen und so eine metallische Brücke bilden. Dagegen sprechen jedoch die Regelmässigkeiten der Erscheinungen, die bei der Entstehung der kritischen Potentialdifferenz zu beobachten sind. Funken werden allerdings zuweilen beobachtet, doch haben dieselben stets einen störenden Einfluss auf die eigentliche Cohärerwirkung. Die im nächsten Capitel zu besprechenden Erscheinungen sprechen ebenfalls gegen diese Theorie.

#### **4. Einfluss einer Erhitzung der Contactstelle auf den Widerstand des Cohärers.**

Ein Feilichtcohärer, dessen Widerstand bereits infolge eines elektrischen Einflusses vermindert ist, kann leicht durch Erwärmen auf seinen ursprünglichen Zustand zurückgebracht werden. Es ist nicht ausgeschlossen, dass diese Wirkung auf einer Verschiebung der Teilchen infolge der Erhitzung beruht und dass dadurch der gute Contact gebrochen wird.

Es würde jedoch falsch sein, daraus zu schliessen, dass eine höhere Temperatur die Empfindlichkeit des Cohärers herabdrücke. Man muss doch annehmen, dass bei der Kleinheit der Contactstelle schon bei kleinen Strömen eine bedeutende Wärmeentwicklung eintreten kann. Bei meinen Versuchen wurden stets relativ grosse Ströme angewandt und so habe ich bei den leicht schmelzenden Metallen diese Erhitzung schon während der vorher beschriebenen Versuche nachweisen können. Während es mir im allgemeinen unmöglich war, durch eine Untersuchung mit dem Mikroskop an den Metallcalotten nach wiederholtem Gebrauch auch nur die geringsten Aenderungen an den Contactstellen zu entdecken, hatte beim Wismut und Zinn ein deutliches Schmelzen stattgefunden, wenn der Strom durch den Cohärer über ein Ampère gesteigert wurde. Bei den anderen Metallen konnte selbst bei einem Strom von vier Ampère keine Aenderung bemerkt werden.

Im Verlauf meiner Untersuchung über den Einfluss dieser Wärmeentwicklung wurde ich nun auf die Entdeckung eines, wie ich glaube, völlig unbekannten Phänomens geführt, welches



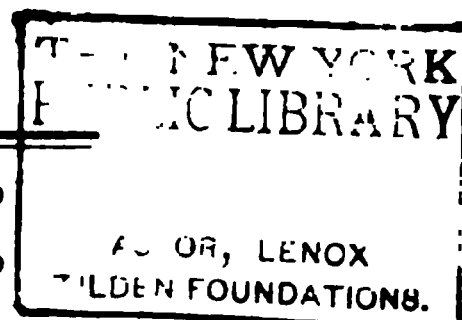
Tabelle 4.

|     |    |    |     |     |
|-----|----|----|-----|-----|
| 174 | 3  | 31 | 102 | 160 |
| 120 | 23 | 56 | 159 | 160 |

Selbst wenn der ursprüngliche Widerstand unendlich  $\infty$  — dies möge in der Tab. 5 durch  $\infty$  bezeichnet werden — konnte die Erscheinung beobachtet werden.

Tabelle 5.

|          |    |     |          |          |
|----------|----|-----|----------|----------|
| $\infty$ | 18 | 292 | $\infty$ | $\infty$ |
| $\infty$ | 19 | 229 | $\infty$ | $\infty$ |



Um den Einfluss geringerer oder grösserer Erwärmung studiren, wurde folgende Beobachtungsreihe angestellt. In der ersten Reihe der Tab. 6 ist die Stärke des erwärmten Stromes gegeben, die folgenden haben dieselbe Bedeutung wie vorher. Es mag erwähnt werden, dass die Werte in der zweiten Reihe nur auf der zufälligen Justirung des Contactes beruhen und nichts mit der Stromstärke zu thun haben.

Tabelle 6.

|          |     |     |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0,2 Amp. | 138 | 121 | 122 | 139 | 139 |
| 0,5 „    | 90  | 12  | 95  | 95  | 95  |
| 4,0 „    | 86  | 5   | 11  | 34  | 75  |

Dieselben Resultate erhielt ich bei der Anwendung eines Cohäriers aus Kupferdrähten. Hier war der Einfluss einer Erhitzung der Contactstelle noch grösser als beim Stahl. Die Ausschläge gingen auf ein bis zwei Scalenteile herunter, selbst wenn im erkalteten Cohärer der Widerstand unendlich war. Bei der Erhitzung des sehr dünnen Drahtes trat zuerst der Mangel auf, dass derselbe infolge der eintretenden Verformung von der ursprünglichen Contactstelle abglitt. Das konnte jedoch leicht dadurch verhütet werden, dass der Draht durch eine nahe beim Contacte angebrachte, feine verticale Spirale in seiner Lage festgehalten wurde.

Dass schon sehr kleine elektromotorische Kräfte genügen, um einen elektrischen Strom durch die erhitzte Contactstelle zu



Cohärern aus verschiedenen Metallen erhalten habe. Bildet Wismut die eine Seite des Cohärers, so wird diese Seite bedeutend wärmer als die andere, da Wismut ein äusserst schlechter Wärmeleiter ist, und auf der anderen Seite die Wärme viel schneller fortgeführt wird. Dieses würde dann eine geringere Potentialdifferenz erwarten lassen, im Falle, dass der Strom vom Wismut zu einem anderen Metalle fliesst, als in der entgegengesetzten Richtung. Das ist in der That der Fall, wie Tab. 3 zeigt.

Andererseits wird beim Hindurchfliessen eines Stromes von Wismut zu einem anderen Metall die Contactstelle abgekühlt und dadurch vielleicht die Potentialdifferenz erhöht. Der Peltiereffect würde also im entgegengesetzten Sinne wirken wie die oben besprochene Erscheinung. Das würde die Resultate mit dem Nickel, bei dem jedenfalls der Unterschied in der Wärmeleitung nicht so hervortritt wie beim Wismut, verständlich machen.

Ich denke mir, dass beim Ansprechen des Cohärers auf irgend einen elektrischen Einfluss ein kleiner Strom durch die Contactstelle geht, welche infolge ihrer Kleinheit schon von ausserordentlich geringen Strömen erhitzt wird. Durch die Erwärmung tritt nach den in Cap. 3 beschriebenen Versuchen eine Widerstandsverminderung ein. Darin besteht, wie ich glaube, das erste Stadium des Cohärereffectes. Doch muss noch eine weitere Erscheinung dazu treten, da, wie wir gesehen haben, nach einer blossen Erhitzung der Contactstelle der Widerstand sehr schnell wieder steigt, jedoch bei der eigentlichen Cohärenz längere Zeit auf seinem kleinen Werte verharrt und nur sehr langsam auf den hohen Wert zurückkehrt. Worin nun der Unterschied zwischen diesen beiden Erscheinungen liegt, darüber kann bei unseren jetzigen Kenntnissen der Cohärerwirkung kaum etwas bestimmtes ausgesagt werden.

Zum Schluss wünsche ich, Hrn. Prof. Warburg für das grosse Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat, meinen besten Dank auszusprechen.

Berlin, Physik. Institut der Universität, Januar 1901.

(Eingegangen 20. Januar 1901.)

---



drähte angelötet, von denen der erste dem Wismutdraht parallel läuft. Von dem so gebildeten Thermoelement befindet sich der Teil  $BD$  mit der einen Lötstelle bei  $B$  in einem in  $G$  enthaltenen Bade constanter Temperatur; die andere Lötstelle  $A$  befindet sich in einem anderen in  $E$  enthaltenen Bade. An  $B, C, D$  sind die Lötstellen von Thermoelementen Eisen-Constantan angelötet, durch welche die Temperatur dieser Punkte bestimmt wird. Alle Drähte sind zusammen auf einem Holzbrett montirt. Der untere Teil des Elementes Wismut-Kupfer befand sich zwischen den Polen des grossen Elektromagneten der Berliner Akademie,  $B$  in der Mitte des Feldes. Die elektromotorische Kraft des Elementes wurde nach der Compensationsmethode gemessen. Die Feldstärken wurden durch die im Magnetfelde folgende Widerstandsänderung einer Wismutspirale gemessen.

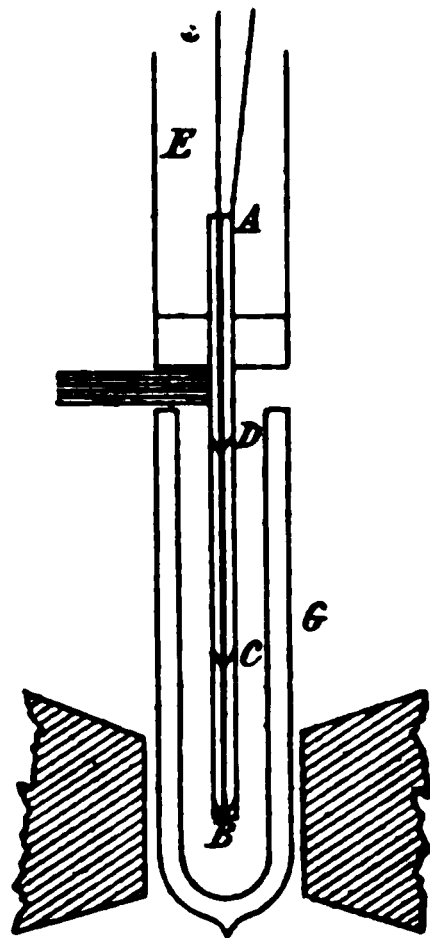


Fig. 1.

Es wurden nun zuerst Versuche gemacht bei 4 cm Polabstand und einer Feldstärke von 4720 C.G.S. 1. Mit Eis in  $G$ , Petroleum von Zimmertemperatur in  $E$ , 2. einem Gemisch aus fester Kohlensäure und Aether in  $G$ , Eis in  $E$ , 3. mit flüssiger Luft in  $G$ , Eis in  $E$ . Bei 2. und 3. war das Gefäss  $G$  ein Vacuummantelgefäss.

In allen Fällen waren nach Angabe der Eisen-Constantan-elemente die Temperaturen von  $B$  und  $C$  einander genau gleich, bei 3. war die Temperatur von  $D$  höchstens um  $1^\circ$  von der in  $B$  und  $C$  verschieden. *Ein Temperaturgefälle fand also im Magnetfeld nicht statt und unter diesen Umständen zeigte sich die elektromotorische Kraft des Elementes ungeändert, mochte das Feld erregt sein oder nicht.*

Im Fall 1 konnte ein schmäleres Gefäss, mithin ein kleinerer Polabstand und grössere Feldstärke (8100 C.G.S.) angewandt werden, wobei das Feld eine kleine zwischen  $-8$  und  $6$  Mikrovolt schwankende Aenderung der elektromotorischen Kraft bewirkte, was ich Temperaturschwankungen von  $B$  zuschreibe.





bar ist, das Magnetfeld die thermoelektrischen Constanten des Wismuts ungeändert lässt und daher der thermomagnetische Longitudinaleffect nicht als eine Aenderung dieser Constanten aufgefasst werden kann.

Ich machte noch folgenden Versuch. An einen 35 cm langen Wismutdraht wurden Kupferdrähte gelötet und der Wismutdraht vertical zwischen die Pole des Elektromagneten gebracht, sodass der Mittelpunkt des Drahtes in der Mitte des Feldes lag. Die oberhalb und unterhalb der Pole befindlichen Teile des Wismutdrahtes wurden auf constanter Temperatur gehalten, der untere Teil auf  $0^{\circ}$  in Eis, der obere

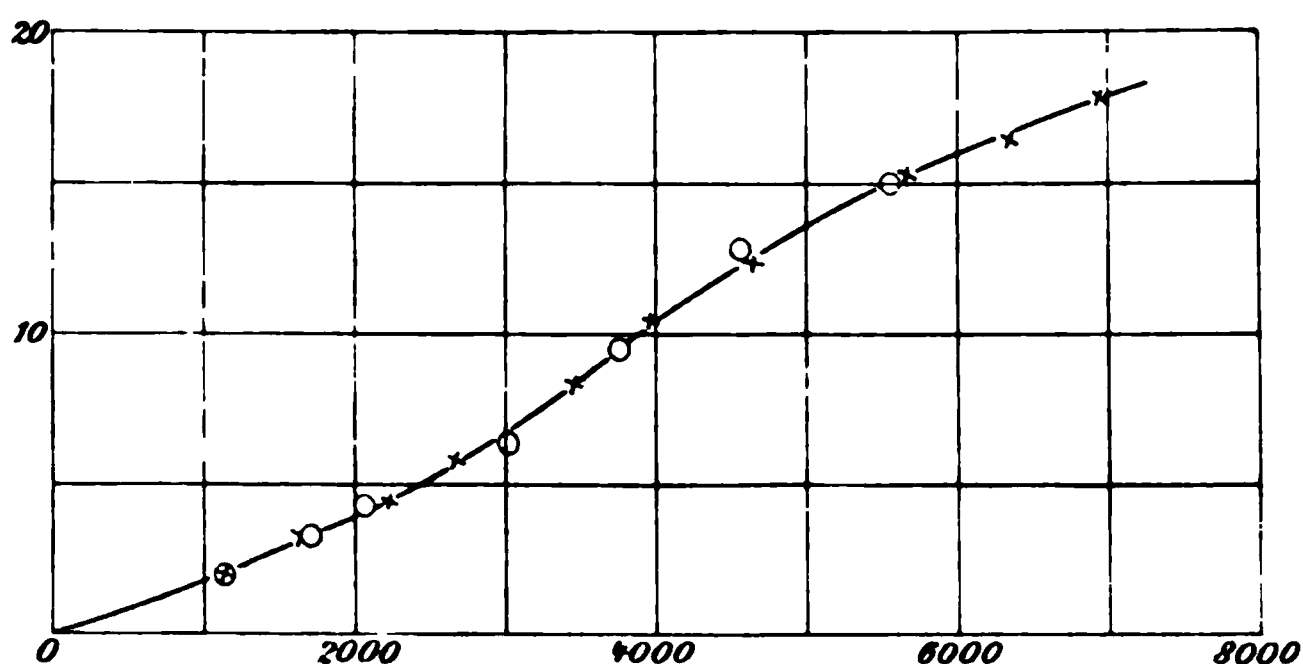


Fig. 2.

auf Zimmertemperatur in Petroleum. So fand der Temperaturfall im Felde statt, während die Lötstellen sich ausserhalb des Feldes befanden. Die durch das Feld bewirkte Aenderung der elektromotorischen Kraft dieses Elementes wurde für verschiedene Feldstärken bestimmt.

Ein zweites derartiges Element wurde aus einem 3,5 cm langen Wismutdraht gebildet, wobei die Lötstellen sich im Feld befanden, derselbe Temperaturfall wie bei dem vorigen Versuch hervorgebracht, und die elektromotorische Kraft wie zuvor bei verschiedenen Feldstärken gemessen. Die Ergebnisse beider Experimente stimmen, wie die graphische Darstellung (Fig. 2) zeigt<sup>1)</sup>, überein. Daraus folgt, dass die Feldwirkung nicht auf die Lötstellen ausgeübt wird.

1) In der Fig. 2 sind die Resultate für das 35 cm lange Stück Wismutdrahtes mit  $\odot$ , für das 3,5 cm lange Stück mit  $\times$  bezeichnet. Die Abscissen sind die Feldstärken, die Ordinaten die durch das Feld hervorgebrachten procentischen Aenderungen der elektromotorischen Kraft.



den Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  dieser Stellen. Setzt man nun nach Nernst

$$p = (t_2 - t_1) n,$$

so hängt  $n$  von der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  und der mittleren Temperatur  $t_1 + t_2/2$  ab. Bei den bisherigen diesbezüglichen Versuchen wurde die Temperatur nur innerhalb sehr enger Grenzen variirt. Ich habe mir die Aufgabe gestellt,  $n$  als Function der Feldstärke für Mitteltemperaturen zwischen ungefähr  $+70^\circ$  und Temperaturen, wie sie durch Anwendung flüssiger Luft erreicht werden können, zu bestimmen.

§ 6. Fig. 4 zeigt schematisch den von mir benutzten Apparat.  $E$  ist ein 9 cm hohes, 3,5 cm weites Messinggefäß, aussen mit Filz umhüllt. An den Boden dieses Gefäßes ist ein Holzbrett  $a b c d$ , 5 cm lang und 3 cm breit, angeschraubt. Auf diesem Brett ist ein 3,1 cm langes Stück  $AB$  von dem oben erwähnten reinen Wismutdraht befestigt, an dessen Enden die auch 1 mm starken Kupferdrähte  $AC$  und  $BD$  gelötet sind.  $AC$  endlich ist mit dem Boden des Gefäßes  $E$  verlötet. Indem man  $E$  mit siedendem Wasser, Eis, Aether-Kohlensäuremischung oder flüssiger Luft füllte, brachte man ein Temperaturgefälle in  $AB$  hervor. Die maassgebenden Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  in  $A$  und  $B$  wurden durch Eisen-Constantanelemente gemessen, deren Lötstellen bei  $A$  und  $B$  angelötet waren. Das Ganze befand sich zwischen den Polen des früher benutzten Elektromagneten so, dass die Kraftlinien den Wismutdraht rechtwinklig kreuzten.

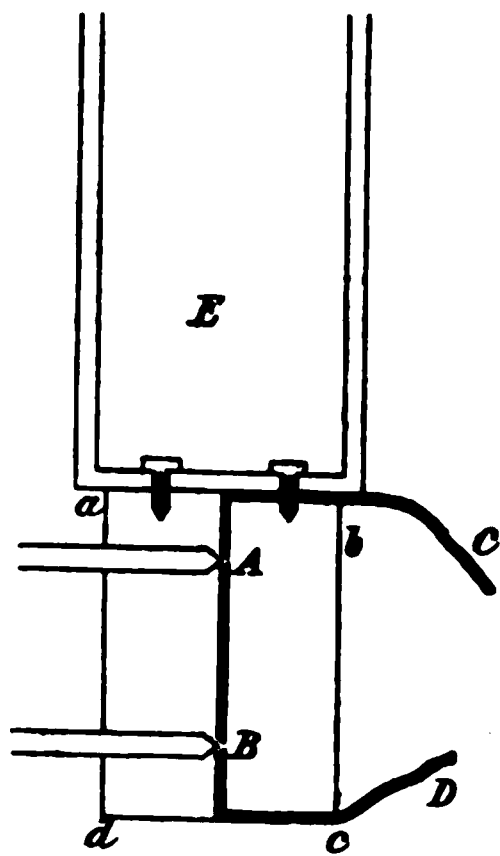


Fig. 4.

Wenn nun die Thermoelemente constante Temperatur von  $A$  und  $B$  anzeigten, wurde die elektromotorische Kraft zwischen  $A$  und  $B$  nach der Compensationsmethode gemessen, 1. ohne Feld, 2. mit Feld von der einen, 3. mit Feld von der entgegengesetzten Richtung, 4. ohne Feld.<sup>1)</sup> Als absoluter Wert von  $n$  wurde die Grösse

$$\frac{(e_2 + e_3) - (e_1 + e_4)}{2(t_2 - t_1)}$$

1) Nur bei den Versuchen mit flüssiger Luft fiel die Messung 4 fort.



Tabelle III.

Wismutdraht.

Mischung aus fester Kohlensäure und Aether im Gefäss.

Mitteltemperatur  $-27^{\circ}$  C.

|                         |                 |                |                                |
|-------------------------|-----------------|----------------|--------------------------------|
|                         | <i>A</i>        | <i>B</i>       |                                |
| Temperatur vor Versuch  | $-50,8^{\circ}$ | $-8,6^{\circ}$ | } $t_2 - t_1 = 46,6^{\circ}$ . |
| Temperatur nach Versuch | $-51^{\circ}$   | $-4,5^{\circ}$ |                                |

| Feld-<br>stärke | E.M.K.<br>ohne Feld | E.M.K. mit Feld |      | $\frac{(e_2 + e_3) - (e_1 + e_4)}{2}$ | <i>n</i> |
|-----------------|---------------------|-----------------|------|---------------------------------------|----------|
|                 |                     | →               | ←    |                                       |          |
| 6760            | 3290                | 3876            | 3836 | 577                                   | 12,4     |
| 5550            | 3269                | 3780            | 3755 | 506                                   | 10,9     |
| 3950            | 3254                | 3653            | 3641 | 396                                   | 8,5      |
| 2660            | 3248                | 3512            | 3504 | 267                                   | 5,7      |
| 1850            | 3235                | 3332            | 3340 | 98                                    | 2,1      |
| —               | 3241                | —               | —    | —                                     | —        |

Tabelle IV.

Wismutdraht.

Flüssige Luft im Gefäss. Mitteltemperatur  $-112^{\circ}$  C.

|                         |                |                 |                                 |
|-------------------------|----------------|-----------------|---------------------------------|
|                         | <i>A</i>       | <i>B</i>        |                                 |
| Temperatur vor Versuch  | $-175^{\circ}$ | $-50^{\circ}$   | } $t_2 - t_1 = 124,2^{\circ}$ . |
| Temperatur nach Versuch | $-178^{\circ}$ | $-49,5^{\circ}$ |                                 |

| Feld-<br>stärke | E.M.K.<br>ohne Feld | E.M.K.<br>mit Feld | $e_2 - \frac{1}{2}(e_1 + e_4)$ | <i>n</i> |
|-----------------|---------------------|--------------------|--------------------------------|----------|
| 2660            | 7584                | 8125               | 607                            | 4,9      |
| 3950            | 7453                | 7943               | 495                            | 4,0      |
| 5550            | 7448                | 7720               | 263                            | 2,1      |
| 6760            | 7471                | 7584               | 103                            | 0,8      |
| —               | 7490                | —                  | —                              | —        |
| 1320            | 7546                | 7871               | 348                            | 2,8      |
| —               | 7500                | —                  | —                              | —        |

Fig. 5.

benutzten Platte gemacht. Die Ergebnisse sind in den folgenden Tab. V—VIII verzeichnet und ebenfalls in Fig. 5 graphisch dargestellt.

1) E. Yamaguchi, Ann. d. Phys. 1. p. 214. 1900.

Tabelle V.

Wismutplatte.

Siedendes Wasser im Gefäss. Mitteltemperatur 69,5° C.

A

B

Temperatur vor Versuch 91,3°50,2°

Temperatur nach Versuch 90,4°46°

$t_2 - t_1 = 42,7^\circ.$

| Feld-<br>stärke | E.M.K.<br>ohne Feld | E.M.K. mit Feld |      | $\frac{(e_2 + e_3) - (e_1 + e_4)}{2}$ | n   |
|-----------------|---------------------|-----------------|------|---------------------------------------|-----|
|                 |                     | →               | ←    |                                       |     |
| 6760            | 3075                | 3455            | 3476 | 311                                   | 7,8 |
| 5550            | 3233                | 3493            | 3451 | 282                                   | 6,6 |
| 3950            | 3147                | 3356            | 3488 | 185                                   | 4,8 |
| 2660            | 3278                | 3380            | 3413 | 105                                   | 2,5 |
| 1350            | 3305                | 3329            | 3344 | 41                                    | 1,0 |
| —               | 3286                | —               | —    | —                                     | —   |

Tabelle VI.

Wismutplatte.

Eis im Gefäss. Mitteltemperatur 7° C.

A

B

Temperatur vor Versuch 2,4°11,4°

Temperatur nach Versuch 2,5°11,6°

$t_2 - t_1 = 9^\circ.$

| Feld-<br>stärke | E.M.K.<br>ohne Feld | E.M.K. mit Feld |     | $\frac{(e_2 + e_3) - (e_1 + e_4)}{2}$ | n    |
|-----------------|---------------------|-----------------|-----|---------------------------------------|------|
|                 |                     | →               | ←   |                                       |      |
| 6760            | 731                 | 843             | 843 | 110                                   | 12,2 |
| 5550            | 735                 | 830             | 834 | 95,5                                  | 10,5 |
| 3950            | 738                 | 806             | 809 | 70,5                                  | 7,7  |
| 2660            | 736                 | 777             | 781 | 43,5                                  | 4,8  |
| 1350            | 735                 | 746             | 749 | 12,5                                  | 1,4  |
| —               | 735                 | —               | —   | —                                     | —    |





Feldstärke, erreicht bei 2450 C.G.S. ein Maximum und nimmt alsdann mit wachsender Feldstärke ab; dass er bei einer gewissen, hier nicht erreichten Feldstärke negativ werden würde, geht aus dem Verhalten der Platte bei  $-135^{\circ}$  mit Evidenz hervor.

2. Der Verlauf der auf die höheren Temperaturen bezüglichen Curven legt die Vermutung sehr nahe, dass auch hier Maximum- und Zeichenwechsel beobachtet worden wären, wenn man zu hinreichend starken Feldern hätte vordringen können, und dass die entsprechenden Feldstärken um so höher hinauf-rücken, je höher die Temperatur ist.

3. Ganz anders als nach 1. und 2. der Longitudinaleffect verhält sich nach Yamaguchi<sup>1)</sup> der thermomagnetische Transversaleffect, welcher bei den tiefsten erreichten Temperaturen mit wachsender Feldstärke fortwährend ansteigt.

4. E. van Everdingen bestimmte an derselben Platte zwischen Zimmertemperatur und  $100^{\circ}$  für verschiedene Feldstärken sowohl den Longitudinaleffect als die Widerstandsänderung, und fand, dass beide Effecte  $E$  in ihrer Abhängigkeit vom Feld  $\mathfrak{H}$  durch dieselbe Formel, nämlich

$$E = \frac{C_1 \mathfrak{H}^2}{1 + C_2 \sqrt{\mathfrak{H}^2}}$$

dargestellt werden konnten. Nach meinen Versuchen verliert diese Beziehung bei tiefen Temperaturen vollständig ihre Gültigkeit. In der That wechselt der Longitudinaleffect, als Function der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  betrachtet, bei  $-135^{\circ}$  für  $\mathfrak{H} = 3560$  C.G.S. das Zeichen, während die durch das Magnetfeld in reinem Wismut hervorgebrachte Widerstandsvermehrung mit wachsender Feldstärke fortwährend steigend gefunden wird.<sup>2)</sup>

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle dem Hrn. Prof. Warburg für die Anregung zu dieser Arbeit und für das freundliche Interesse während des Fortganges derselben meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Berlin, Physik. Inst. d. Univ., 19. Januar 1901.

1) E. Yamaguchi, l. c.

2) J. A. Fleming u. J. Dewar, Proc. Roy. Soc. 60. p. 72—75. 1896.

(Eingegangen 20. Januar 1901.)











III. wird verwaschen, würde sich also bei grösserer Dispersion in sehr viele feine Linien auflösen, wie sie Hasselberg auch gemessen. Ferner treten zwei Banden neu auf,

IV. von 4810 bis 4648 und

V. von 4594 bis 4470, wie sie Hasselberg angiebt.

Auf Photographien mit dem elektrischen Bogen bis 2100 hin habe ich weitere Banden nicht gefunden.

Bei dem mit Selbstinduction im Ultraviolett erhaltenen Stickstoffbandenspectrum, dessen Wellenlängen ich in der Tabelle am Schluss gebe, kann man fünfzehn Gruppen unterscheiden.

- |       |        |     |         |   |
|-------|--------|-----|---------|---|
| I.    | 4254,6 | bis | 3910,8  | matt.   |
| II.   | 3905,1 | „   | 3597,5  | abschattirt, mit intensiven Linien.               |
| III.  | 3593,2 | „   | 3575,8  | sehr intensiv.                                    |
| IV.   | 3357,3 | „   | 3164,0  | die einzelnen Linien liegen dicht aneinander.     |
| V.    | 3155,7 | „   | 3064,0  | die intensivste Gruppe.                           |
| VI.   | 3060,0 | „   | 2980,8  | sehr schwach.                                     |
| VII.  | 2971,2 | „   | 2715,0  | unregelmässig.                                    |
| VIII. | 2710,4 | „   | 2586,6. |   |
| IX.   | 2584,1 | „   | 2466,1  | intensiver u. dichter, wie die umgebenden Banden. |
| X.    | 2465,4 | „   | 2440,4  | die Linien liegen sehr dicht aneinander.          |
| XI.   | 2438,9 | „   | 2356,9  | mit weiten Zwischenräumen.                        |
| XII.  | 2355,9 | „   | 2257,8. |   |
| XIII. | 2256,5 | „   | 2211,3  | schwach.  |
| XIV.  | 2210,0 | „   | 2201,0  | die Linien liegen weit voneinander ab.            |
| XV.   | 2199,9 | „   | 2194,2  | ganz schwach, allmählich verschwindend.           |

Zur Bestimmung der Wellenlänge habe ich die Messungen bei Zink, Cadmium, Kupfer und Platin, von 2300 ab bei Aluminium und Zink benutzt, die mit einer Teilmaschine ausgeführt wurden. Der Maximalfehler dürfte bei 4250 etwa 0,7, bei 2200 etwa 0,3 Ångström'sche Einheiten betragen.

Die Aufnahmen wurden mit dem grossen Quarzspectrographen des Institutes gemacht; verwendet wurden orthochromatische und gewöhnliche Schleussnerplatten, für das Gebiet von 2300 ab Lumièreplatten; hier beträgt die Expositionsdauer  $\frac{1}{2}$  bis 1 Stunde.

Für die Herstellung der Spectralröhren bin ich dem ersten Assistenten, Hrn. Dr. H. Schultze, zu Dank verpflichtet.

Zum Schluss bleibt mir noch übrig, Hrn. Prof. Dr. Dorn für seine Anregung und freundliche Unterstützung bei vorliegender Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.





**VIII.** 2710,4 08,0 06,8 06,1 05,0 01,9 2699,0 96,1 94,9 93,0 91,1 88,8  
86,9 84,6 82,1 80,1 77,9 75,8 74,2 71,1 69,7 67,7 64,3 62,0 59,4  
57,5 56,0 53,8 53,0 50,6 48,4 47,2 45,7 43,0 40,4 38,2 34,6 32,8  
29,9 26,9 23,8 21,7 20,1 18,9 14,3 11,8 09,9 08,4 06,8 05,3 02,6  
01,4 2599,1 98,2 96,7 94,9 94,0 93,1 92,5 92,0 91,5 91,0 90,4 89,9  
89,0, 88,1 87,2 86,6.

**IX.** 2584,1 82,8 81,7 80,0 79,3 78,2 77,0 75,9 74,3 73,1 71,8 70,7 69,0  
67,1 65,8 64,1 62,6 60,8 58,7 57,4 56,0 54,9 54,2 52,7 52,1 51,5  
50,1 49,1 48,4 47,9 45,9 44,7 43,7 41,2 39,1 37,4 35,0 32,9 31,6  
30,4 29,3 28,2 27,0 26,0 25,0 23,9 22,7 21,3 20,0 18,9 17,7 16,1  
15,8 14,9 12,4 10,7 10,0 08,7 07,7 06,5 04,4 02,7 00,1 2499,0 98,0  
97,0 96,0 94,0 92,7 91,8 90,3 89,1 87,8 86,8 84,2 83,6 86,9 80,9  
80,0 78,0 76,1 74,3 73,1 71,9 70,2 68,4 67,2 66,1.

**X.** 2465,4 64,8 63,9 63,2 62,2 61,4 60,7 59,6 58,7 57,8 56,6 55,4 54,2  
53,0 52,3 51,8 50,9 50,0 49,4 48,8 47,9 46,6 44,9 44,1 43,1 41,9  
41,1 40,4.

**XI.** 2438,9 38,1 37,3 35,8 34,9 34,1 33,0 32,4 31,1 30,0 29,0 27,5 25,6  
23,7 21,6 19,8 17,7 15,3 13,4 11,1 08,9 06,9 04,3 02,3 00,1 2397,3  
94,9 93,8 92,9 92,0 89,8 87,9 85,3 84,9 83,3 81,0 78,7 77,7 76,0  
73,9 72,4 71,0 69,9 68,9 68,3 67,9 67,5 67,1 66,7 66,3 65,8 65,1  
64,5 63,7 63,1 62,4 61,8 61,0 60,1 58,9 58,5 57,8 56,9.

**XII.** 2355,9 55,0 54,3 53,5 52,8 51,8 50,7 49,8 48,9 47,8 46,6 45,4 44,5  
43,0 41,8 40,3 39,8 37,9 36,9 35,9 34,0 31,6 31,0 29,3 28,1 26,8  
24,9 23,3 21,2 19,9 18,3 16,4 14,5 12,8 10,9 08,9 07,1 05,0 02,7  
00,8 2299,3 97,6 95,0 92,9 90,7 88,8 86,3 84,1 81,9 79,7 77,5 75,3  
73,1 70,9 68,7 66,5 64,3 62,1 59,9 57,7.

**XIII.** 2256,5 56,0 55,3 54,6 53,9 53,2 52,7 52,1 51,3 50,2 49,0 47,4 47,0  
45,5 44,9 43,5 42,4 41,2 40,0 38,6 37,5 36,6 35,5 34,4 33,7 32,9  
32,1 31,7 30,2 28,8 27,2 26,2 25,7 25,1 23,9 22,7 22,0 21,1 20,4  
18,8 17,0 15,2 13,4 12,0 11,3.

**XIV.** 2210,0 09,0 08,0 07,2 06,4 05,3 04,2 03,2 02,2 01,0.

**XV.** 2199,9 97,2 95,4 94,2.

Halle a. S., 19. Januar 1901.

(Eingegangen 25. Januar 1901.)



verluste zu vermeiden, gerade das Gegenteil erstrebt worden. Das hat aber den Nachteil, dass man nicht mit ganz monochromatischem (Natriumflamme etc.) oder mit weissem Licht arbeiten, ferner nicht den Grad der Homogenität beliebig ändern und auch nicht in den Fällen, wo grosse Helligkeit erforderlich ist, Lichtfilter benutzen kann. Hierzu kommen noch infolge der Einschaltung des Prismas systematische Fehler, die auch bei der besten Construction, der von Hrn. A. König, vorhanden sind.<sup>1)</sup> Die zweite Bedingung war die, dass die zu vergleichenden Flächen möglichst klein genommen werden können; denn nur selten erhält man grössere homogene Stücke *fester* Substanzen, und die Inhomogenität ist bei Absorptionsmessungen sehr störend. Diese letztere Forderung wies auf die Anwendung des Mikroskopes hin. Am einfachsten war die Messung bei Anwendung polarisirten Lichtes und Benutzung eines planparallelen Kalkspatrhomboeders, wobei die zu vergleichenden Lichtbündel durch Verschiebung und nicht durch Neigungsänderung erhalten werden. Die erste Anordnung war eine dem Photometer von Glan analoge, wobei unter dem Kalkspat zwei Oeffnungen angebracht waren, deren beide innere senkrecht zu einander polarisirte Bilder verglichen wurden. Das Verschwinden der Trennungslinie für alle Farben wird durch geringe Drehung der Oeffnungen relativ zum Kalkspat erreicht.

Unter oder über dem Kalkspat befand sich ein auf einem Teilkreis drehbarer Glan-Thompson'scher Nicol. Der mittlere Fehler von acht Ablesungen beträgt etwa  $\pm 15' = 1,75$  Proc. der Intensität.

Bei der zweiten und dritten Anordnung, welche genauere und bequemere Messungen erlaubten, waren unter dem Kalkspat zwei Oeffnungen so nahe bei einander angebracht worden, dass bei der Beobachtung durch ein auf die Oeffnungen eingestelltes Mikroskop mit etwa 20 maliger Vergrösserung die beiden mittleren Bilder sich teilweise überlagern. Sind an dieser Stelle gleiche Teile senkrecht zu einander polarisirten Lichtes vorhanden, so werden Interferenzerscheinungen, die nur in polarisirtem Licht vorhanden sind, ausbleiben, also z. B. die Ringe einer Kalkspatplatte  $\perp$  Axe oder die Streifen einer

---

1) Vgl. J. Ehlers, N. J. f. Min. Beilagebd. 11. p. 268. 1897.



bei absteigender Temperatur des Luftbades vorgenommen. Letzteres bestand aus einem viereckigen schmalen Messingkasten, an dessen Längsseiten in Oeffnungen runde Deckgläser mit Asbest eingedichtet werden konnten. Von oben wurde ein Thermometer und eine die zu untersuchende Substanz festhaltende justirbare Messingklemme in den Kasten eingesenkt. Die ganze Vorrichtung wurde mit einem etwas grösseren Kasten aus Eisenblech, an dessen Längsseiten ebenfalls zwei Fenster ausgeschnitten waren, bedeckt und von unten durch eine Reihe kleiner Bunsenschnittbrenner erwärmt. Um die Temperatur einwandfrei festzustellen wurden in den Plattenhalter kleine Glasröhren mit Substanzen von genau ermitteltem Schmelzpunkt befestigt und mit diesen wurde das Thermometer im Luftbade geaicht. Diese Projectionsphotometrie erfordert vor allem eine unveränderliche Aufstellung des gesamten Apparates und ausserdem ein etwas mühsames Aufsuchen der geeignetsten Lage der Lichtquelle, ist aber sonst vollkommen zuverlässig. Bei den Versuchen wurde stets darauf geachtet, ob die untersuchte Substanz an der Oberfläche oder im Innern eine chemische Veränderung zeigte; nur die Resultate wurden verwertet, bei denen die Differenzen der Beobachtung bei aufsteigender und abnehmender Temperatur innerhalb der Beobachtungsfehler des Photometers liegen. Aus diesem Grunde musste ich auch von der Untersuchung krystallwasserhaltiger Salze absehen.

#### Beobachtungen.

Im Folgenden bedeutet  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichtes,  $d$  das Verhältniss der Intensität des durch die Platte gegangenen zum auffallenden Licht,  $\alpha$  den Extinctionscoefficienten.

Bezeichnet  $J'$  die nach Elimination des Reflexionsverlustes erhaltene Intensität des durch die Platte gegangenen Lichtes, so erhält man die Beziehung  $J' = J \cdot e^{-4\pi\alpha l}$ , wobei  $J$  die Intensität des auffallenden Lichtes,  $l$  die Schichtdicke des absorbirenden Mediums ist.

Die untersuchten Flintglassorten verdanke ich mit Angabe der chemischen Zusammensetzung und der Brechungsindices dem Glaswerk von Schott u. Gen. in Jena.

79 PbO; 20,9 SiO<sub>2</sub>; 0,1 As<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.  
 $n_D = 1,9025$ ;  $n_D - n_C = 0,0114$ ;  $n_F - n_D = 0,0299$ .

Dicke der Platte: 6,4 mm.

Bei Zimmertemperatur:

| $\lambda$ | $d$   | $\alpha \cdot 10^3$ |
|-----------|-------|---------------------|
| 0,63      | 0,825 | 0                   |
| 0,46      | 0,807 | 0,13                |

| $\lambda$ | Werte von $\alpha \cdot 10^3$ bei |      |      |      |      |      |      |
|-----------|-----------------------------------|------|------|------|------|------|------|
|           | 15°                               | 100° | 150° | 200° | 250° | 300° | 360° |
| 0,46      | 0,13                              | 0,20 | 0,27 | 0,40 | 0,69 | 0,99 | 1,83 |

Für  $\lambda = 0,63$  und  $\lambda = 0,59$  war keine Änderung der Absorption zu bemerken.

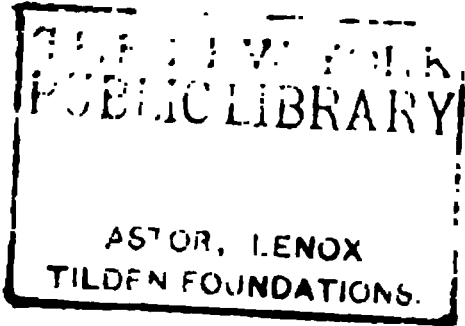
Flintglas (0,1606).

67,5 PbO; 3,0 K<sub>2</sub>O; 29,2 SiO<sub>2</sub>; 0,3 As<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

$n_D = 1,7469; n_D - n_C = 0,0075; n_F - n_D = 0,0193.$

Dicke der Platte: 6,4 mm.

| $\lambda$ | $d$  | $\alpha$ |
|-----------|------|----------|
| 0,63      | 86,7 | 0        |
| 0,46      | 85,0 | 0,06     |



| $\lambda$ | Werte von $\alpha \cdot 10^3$ bei |      |      |      |      |
|-----------|-----------------------------------|------|------|------|------|
|           | 15°                               | 100° | 200° | 300° | 360° |
| 0,46      | 0,06                              | 0,23 | 0,35 | 0,57 | 0,92 |

Alle drei Flintgläser zeigen demnach eine starke Absorptionszunahme mit steigender Temperatur; diese Erscheinung ist schon bei der Messung der Aenderung des Brechungsindex von Hrn. Pulfrich<sup>1)</sup> und später von Hrn. Reed<sup>2)</sup> bemerkt worden.

Hier sei nur darauf aufmerksam gemacht, dass die Absorptionszunahme mit der Grösse des Brechungsindex und der Grösse der Zunahme desselben parallel geht. Wahrscheinlich ist es ein in den verschiedenen Glassorten in verschiedener Menge enthaltenes Bleisilicat, welches durch ein Gebiet selectiver Absorption im Ultraviolett jene Erscheinungen bedingt.

Silberoxydglas.

(Durch Silberoxyd gelb gefärbtes Crown Glas. Das Silberoxyd ist in geringer Menge im Glase enthalten, sodass es nur die Absorption, aber nicht die Brechung beeinflusst.)

Dicke der Platte: 0,765 mm.

$n_D = 1,5225.$

| $\lambda$ | $d$   | $\alpha$ |
|-----------|-------|----------|
| 0,63      | 0,730 | 0,237    |
| 0,59      | 0,614 | 0,416    |
| 0,50      | 0,340 | 1,09     |

1) C. Pulfrich, Wied. Ann. 45. p. 609. 1882.  
2) J. O. Reed, Wied. Ann. 65. p. 707. 1898.





sorption mit steigender Temperatur, die bei der Abkühlung wieder zurückging, konnte mit Sicherheit festgestellt werden. *Brookit* findet sich selten in klaren Krystallen; bei den mir gehörenden war nur qualitativ die starke Absorptionszunahme zu beobachten.

Die obigen Versuche zeigen, dass rote, braune, gelbe Körper, also solche die selective Absorption im Ultraviolett zeigen, eine Zunahme und Ausbreitung der Absorption mit steigender Temperatur erfahren. Hierdurch erklären sich die lange bekannten Thatsachen, dass Brom, Schwefel, Kaliumbichromat u. a. bei tiefen Temperaturen heller und schliesslich farblos werden. Auch die von Hrn. J. Kastle neuerdings<sup>1)</sup> angestellten Versuch über die Einwirkung tiefer Temperaturen auf die Farbe von Brom- und Jodverbindungen dürften durch die obige Regel erklärt werden.<sup>2)</sup>

Sehr viel geringer ist die Zahl von Substanzen, die grün oder blau aussehen, und es ist eine merkwürdige, aber durch die Dispersionsmessungen bestätigte Thatsache, dass Substanzen mit *Eigenabsorption*<sup>3)</sup> im Rot oder im Ultrarot in der Nähe des sichtbaren Spectrums äusserst selten sind. Da aber Stellen schwacher Absorption durch geringe Mengen von Substanzen mit selectiver metallischer Absorption hervorgerufen sind und demnach qualitativ sich von letzterer nicht unterscheiden, so konnten für diese Versuche alle grünen und blauen Substanzen, obgleich sie keine Eigenabsorption besitzen, herangezogen werden.

Blaue und grüne Gläser, sowie grün gefärbte Silicate wie Klinochlor, Diopsid etc. wurden untersucht.

Metallsalze konnten wegen des Krystallwassergehaltes nicht erhitzt werden. Bezüglich der Zahlen sei auf die Habilitationsschrift verwiesen.

---

1) J. H. Kastle, Beibl. 24. p. 1286. 1900.

2) Auch die *Lösungen* solcher Substanzen zeigen mit steigender Temperatur eine Absorptionszunahme, so z. B. Lösungen von Eisenchlorid, chromsauren Salzen, Titanperoxyd etc. Bei colorimetrischen Bestimmungen von Chrom und Titan ist deshalb Temperaturgleichheit beider Gefässe erforderlich.

3) Die einzige derartige Substanz dürfte Wasser sein; alle übrigen grün oder blau gefärbten festen oder flüssigen Körper haben, wie aus dem Verhalten des Brechungsindex hervorgeht, keine metallische Eigenabsorption im Ultrarot, die für das sichtbare Gebiet in Betracht käme; es überwiegt vielmehr bei allen der Einfluss der Absorption im Ultraviolett.



Das Minimum der Absorption des Fuchsin liegt bei 0,54; vom Maximum nach grösseren Wellenlängen zu nimmt die Absorption mit steigender Temperatur zu, nach kleineren wenn auch in geringerem Maasse ab; im Maximum selbst scheint die Zu- oder Abnahme innerhalb der Beobachtungsfehler zu liegen. Demnach findet wirklich eine Verschiebung der Absorptionscurve nach grösseren Wellenlängen hin statt; eine Ausdehnung des Absorptionsgebietes oder eine Verstärkung desselben ist anscheinend nicht vorhanden.

Eine Bestätigung bietet ferner das Verhalten des Aktinolith. Dieser hat ein Absorptionsmaximum im Ultrarot und eins im Ultraviolett, muss also bei steigender Temperatur im Rot eine Abnahme, im Blau eine Zunahme der Absorption zeigen.

#### Aktinolith.

Dicke der Platte: 1,01 mm.  $n_D = 1,620$ .

| $\lambda$ | Werte von $d$ bei |       |       |       |       |
|-----------|-------------------|-------|-------|-------|-------|
|           | 15°               | 100°  | 200°  | 300°  | 350°  |
| 0,63      | 0,438             | 0,445 | 0,455 | 0,464 | 0,470 |
| 0,46      | 0,500             | 0,491 | 0,478 | 0,470 | 0,460 |

Es sind nur Werte von  $d$  angegeben, weil der Strahlstein nicht ganz gleichmässig gefärbt, also die Dicke der eigentlich wirksamen Schicht unbekannt war. Die Ergebnisse, welche sich ja nur auf die Aenderung der Absorption mit der Temperatur beziehen, werden dadurch nicht beeinträchtigt.

Aus diesen Versuchen ergibt sich folgende Regel:

*In festen selectiv absorbirenden Körpern bewirkt steigende Temperatur eine Verschiebung der Absorptionscurven nach grösseren Wellenlängen und in einzelnen Fällen gleichzeitig eine geringe Ausdehnung des Absorptionsgebietes. Die Grösse der maximalen Absorption ändert sich anscheinend nicht.*

Hierbei ist, was bei festen Körpern gestattet, die Dichteänderung vernachlässigt worden.

*Derselbe Satz gilt, wie weitere Beobachtungen ergaben, auch für Flüssigkeiten und für die Absorptionsbanden absorbiren-*







violett wie Phosphor, Schwefel etc., die auch alle schwach gelb gefärbt sind. Weit geringer ist die Zunahme der Brechung bei der grossen Zahl farbloser Substanzen, deren Absorptionsgebiet schon weiter entfernt ist, wie bei Kalkspat, den Feldspäten und der Crowngläser und vielen anderen Substanzen.<sup>1)</sup> Bei den Crowngläsern findet im Gelb und Rot bereits eine schwache Abnahme statt, weil hier die Abnahme der Dielektricitätsconstante einen stärkeren Einfluss als die Verschiebung des entfernten Absorptionsgebietes hat. Diese Substanzen bilden den Uebergang zu denjenigen, bei welchen das Absorptionsgebiet noch weiter entfernt liegt. Bei diesen ist der Einfluss der Verringerung der Dielektricitätsconstante in allen Teilen des Spectrums vorwiegend; aber auch hier kann die durch Annäherung des Absorptionsgebietes erhöhte Dispersion durch die kleine Verminderung der Dielektricitätsconstante nicht aufgehoben werden, und man beobachtet deshalb zwar *Abnahme der Brechung*, aber doch *Zunahme der Dispersion*. Zu diesen Substanzen gehören alle, die noch im Anfang des Ultraviolett durchlässig sind, wie Fluorit, Quarz, Steinsalz, Sylvin. Hr. Reed<sup>2)</sup> hat in der That bei Quarz und Fluorit das angegebene Verhalten gefunden.

2. Feste Körper, deren *den Brechungsindex beeinflussendes Absorptionsgebiet nach grösseren Wellenlängen* liegt. Hierfür sind Beispiele im sichtbaren Gebiet einige Anilinfarbstoffe und vielleicht auch Eis. Bei diesen entfernt sich mit steigender Temperatur das Absorptionsgebiet, und es müsste *Abnahme der Brechung*, falls der Einfluss der Dielektricitätsconstante überwiegt, sonst aber *Zunahme* derselben eintreten, und in beiden Fällen jedenfalls als charakteristischer Unterschied von 1. *Abnahme der Dispersion*. Eine Prüfung dieser Folgerung ist noch nicht erfolgt.

#### **Abhängigkeit der Absorption der Metalle von der Temperatur.**

Mit derselben Versuchsanordnung wurde die Absorption und Reflexion von Metallschichten untersucht (Gold nach dem Verfahren von Wernicke niedergeschlagen und Goldlösung

---

1) Vgl. Literatur bei H. Landolt u. R. Börnstein, Tabellen p. 415ff. 1894.

2) J. Reed, Wied. Ann. 65. p. 707. 1898.





**11. Ueber den Einfluss  
eines selbstinductionslosen Widerstandes auf die  
oscillatorische Condensatorentladung;  
von T. Mizuno.**

Die Gleichung für den Entladungsstrom eines Condensators von der Capacität  $C$  in einem Draht vom Widerstand  $R$  und der Selbstinduction  $L$  ist bekanntlich folgende (vgl. auch Fig. 1):

$$(1) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0.$$

Wenn

$$(2) \quad R^2 < \frac{4L}{C},$$

so ist der Entladungsstrom oscillirend und seine Stärke in einem Zeitmoment

$$(3) \quad i = \frac{Q}{LC \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \left[ \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot t \right],$$

wo  $Q$  die Anfangsladung des Condensators ist.

Im Folgenden soll der Einfluss eines dem Stromkreise parallelgeschalteten inductionsfreien Widerstandes  $S$  (Fig. 2) untersucht werden.

Die Differentialgleichungen sind hier folgende:

$$(4) \quad S i_2 = \frac{q}{C}.$$

$$(5) \quad R i_1 + L \frac{di_1}{dt} = \frac{q}{C},$$

$$(6) \quad i_1 + i_2 = - \frac{dq}{dt}.$$

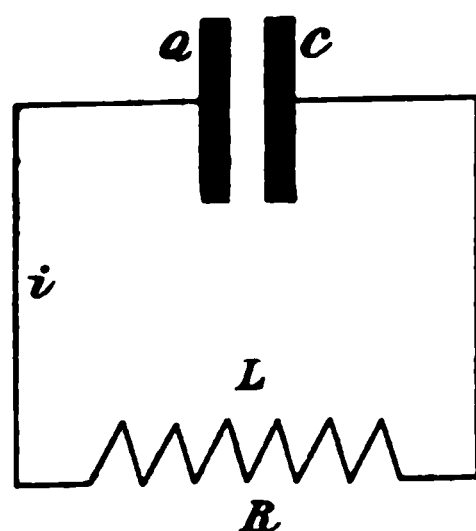


Fig. 1.

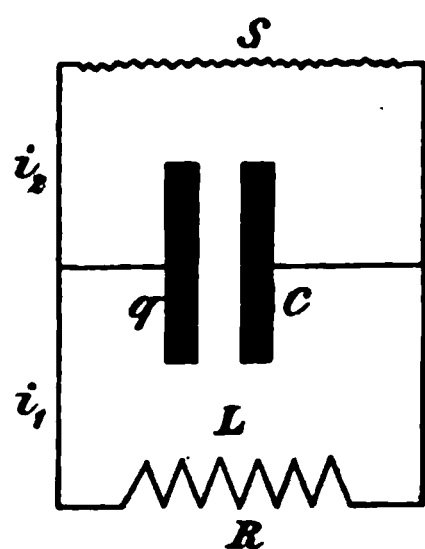


Fig. 2.

Hier bedeuten  $i_1$  und  $i_2$  die Stromstärken,  $q$  die Condensatorladung im Zeitmoment  $t$ .

und Capacitätsverkleinerung zu den Werten:

$$(9) \quad R' = R + \frac{L}{SC},$$

$$(10) \quad C' = C \frac{S}{R+S}.$$

Wird  $S$  unendlich gross, so reducirt sich Gleichung (8) auf (1). Es ergiebt sich aus der Lösung der Differentialgleichung das interessante Resultat, dass, wenn auch die Entladung durch den inductiven Stromkreis allein ohne parallelgeschalteten Widerstand  $S$  oscillirend ist, dies nach Einschaltung des letzteren durchaus nicht mehr der Fall zu sein braucht. Damit Schwingungen eintreten, muss vielmehr der neuen Bedingung genügt sein:

$$(11) \quad R^2 < \frac{4L}{C'},$$

d. h.

$$\left(R + \frac{L}{S C}\right)^2 < \frac{4 L}{C \frac{S}{R + S}},$$

d. h.

$$R^2 \left(1 + \frac{L}{S R C}\right)^2 < \frac{4 L}{C} \left(1 + \frac{R}{S}\right),$$

d. h.

$$\frac{L^2}{S^2 C^2} < \left(\frac{4 L}{C} - R^2\right) + \frac{2 L R}{S C},$$

d. h.

(12)

$$E C^2 S^2 + 2 L R C S > L^2,$$

wo

$$E = \frac{4 L}{C} - R^2.$$

Die Stromstärke im Hauptkreise ist, vorausgesetzt dass die Ungleichung (12) besteht, gegeben durch den Ausdruck:

$$(13) \quad i_1 = \frac{Q'}{L C' \sqrt{\frac{1}{L C'} - \frac{R'^2}{4 L^2}}} e^{-\frac{R'}{2 L} t} \sin \left[ \sqrt{\frac{1}{L C'} - \frac{R'^2}{4 L^2}} \cdot t \right],$$

wo

$$Q' = Q \frac{C'}{C},$$

$$R' = R + \frac{L}{S C},$$

und

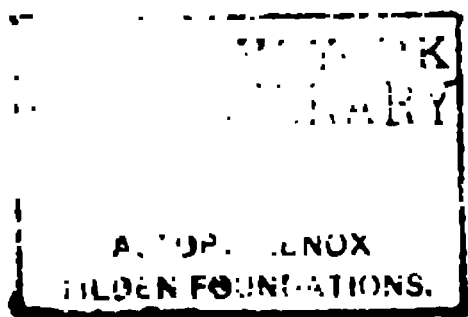
$$C' = C \frac{S}{R + S}.$$

Aus (5) und (6) folgt dann auch die Stromstärke im Nebenschluss  $S$ , gleichfalls oscillirend.

Die obige Berechnung hat zu folgenden Resultaten geführt:

1. Die Nebenschaltung eines inductionslosen Widerstandes zu dem Hauptentladungskreis eines Condensators erhöht den scheinbaren Widerstand desselben und somit die Dämpfung der Oscillationen, und zwar um so mehr, je kleiner er ist.

2. Wenn der Widerstand  $S$  kleiner wird als der durch Ungleichung (12) gegebene Grenzwert, so wird die Entladung





## 12. *Das Luftbarometer;* *von H. A. Naber.*



Als historische Ergänzung zum Artikel von Wohlmill<sup>1)</sup> und zu der Beschreibung eines Luftbarometers von Fischer<sup>2)</sup> mögen mir folgende Bemerkungen gestattet sein.

Es giebt ein altes, noch jetzt gebrauchtes, ja gepriesenes, bei Glasfirmen käufliches Luftbarometer. Die Form ist stereotyp wie unten (vgl. Fig. 1).

Die höchst mangelhafte Construction, die Abwesenheit eines Thermometers deuten wohl auf ein hohes Alter; und

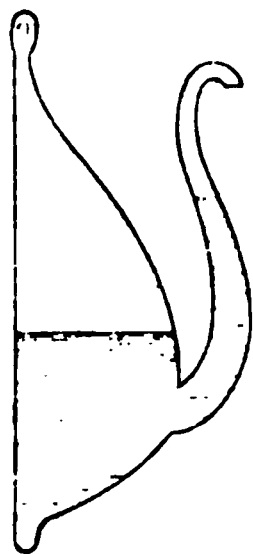


Fig. 1.

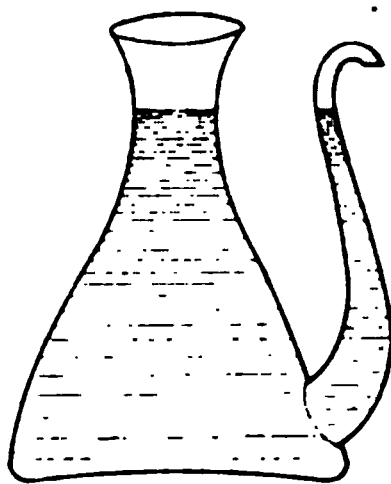


Fig. 2.

dazu kommt, dass man nirgends eine einzige Zeile diesem Instrumente gewidmet findet. Ist es vielleicht das von Francis Bacon genannte „vitrum calendare“? Oder ist es von ähnlicher Herkunft wie die „Florentiner Flasche“ (Fig. 2), die sich noch in chemischen Laboratorien vorfindet und dort als Karaffe benutzt wird?

Leider giebt unsere altholländische Literatur hier keine Anweisung; jedoch ein hohes Alter scheint mir unzweifelhaft, ist ja das Instrument von der Lampe des Cardanus (1550) oder von einer Trinkflasche für Vögel nur wenig verschieden; und folgen wir der Geschichte abgeschlossener Luftvolumina

1) E. Wohlmill, Pogg. Ann. 124. p. 163. 1865.

2) K. Fischer, Ann. d. Phys. 3. p. 428. 1900.



dann „A dialogue philosophicall“ (1612) von Tymme<sup>1)</sup>, einem Freunde unseres Landesgenossen Drebbel, und den Brief des letzteren an Jacobus I., der mechanische Arbeiten zu schätzen wusste, so geht hervor, dass Drebbel ziemlich dasselbe geleistet hat. Und während die genannte Schrift von Tymme den „Mythus“ von Drebbel's Leistungen zur Wirklichkeit macht, erklärt sie uns auch die Anordnung von Archimedes und seine Folger; und wiewohl die letzteren ähnliche Instrumente wie Archimedes gemacht haben, werden sie von Drebbel mit ebensoviel Unglauben oder Herablassung erwähnt, wie unsere Zeit dem „Instrumentum Drebbelianum“ gegenüber zeigt.

Während also Schieck in einer dem Himmelsglobus des Archimedes gewidmeten Monographie<sup>2)</sup> denselben ein unauflösbares Rätsel nannte und F. Hultsch eine Erklärung zu geben suchte, die den obigen Citaten geradezu widerspricht<sup>3)</sup>, kommen wir mit Tymme's, also mit Drebbel's Hülfe zur folgenden, meines Erachtens unabweisbaren, und, wiewohl überraschenden, des Archimedischen Genies würdigen Lösung.

Archimedes hat eine hohle, unten geöffnete Kugel von grossem Diameter gemacht und sie in Wasser untergetaucht,

---

mundum aedificavit, Platonis deus, ut tarditate et celeritate dissimillimos motus una regeret conversio. Quod si in hoc mundo fieri sine deo non potest, ne in sphaera quidem eosdem motus Archimedes sine divino ingenio potuisset imitari.“

1) Ich fand diese kleine Schrift vor 6 Jahren im Brit. Museum zu London. Sie enthält ausserhalb der Beschreibung auch eine ziemlich deutliche Zeichnung des königlich ausschenden Instrumentes. Wohlmill (Pogg. Ann. 24. p. 163. 1865), der die Leistungen Drebbel's zu einem Mythus reducirt, hätte seinen Artikel in mancher Hinsicht ändern können, wäre er damit bekannt gewesen. Er hätte seine Vermutung: „Ist vielleicht Drebbel's Perpetuum mobile wirklich eine thermometerartige Vorrichtung gewesen?“ bejahen können und sodann nicht gesprochen von einem „letzten Schlupfwinkel Drebbel'scher Ansprüche“ und von einem „interessanten Beitrage zur Geschichte des modernen Mythus“.

2) Programm Gymn. Hanau 1843 u. 1846. Leider fehlen mir diese und andere in Engelmann's Bibl. Scriptorum Classicorum genannten kleineren Schriften.

3) F. Hultsch (l. c.) nimmt an, „dass der Himmelsglobus des Archimedes durch ein hydraulisches Werk getrieben worden sei; ... an Wasser, als Triebkraft des Kunstwerkes, fehlte es weder in Syracus noch später in Rom“. Wir sahen jedoch, dass z. B. Sextus Empiricus ein solches Kunstwerk *nicht* bewundert hätte.





die ganze Anordnung war ein Bild des Weltalls<sup>1)</sup>, an dem Jupiter selbst Behagen fand. Sagt ja Claudianus im 18. Epigramm „In sphaeram Archimedis“:

„Jupiter in parvo cum cerneret aethera vitro  
Risit et ad superos talia dicta dedit:

— — — — —  
„Jamque suam volvens audax industria mundum  
Gaudet, et humana sidera mente regit:  
Quid falso insontem tonitru Salmonea<sup>2)</sup> miror?“

War nun die Einrichtung, wie ich oben angab<sup>3)</sup>, war es also die Veränderung des Luftvolumens, welche sein Planetarium trieb, so wird wohl nicht bezweifelt werden, dass Archimedes auch die *Veränderungen* im *Archimedischen* Auftrieb hohler Körper gekannt und näher untersucht hat. Denn Studium und Vorbereitungen zu der kostbaren Einrichtung hätten ja einen weniger genialen Mann zur Entdeckung des Archimedischen Principis geführt, sind ja hydrostatische Experimente mit solchen hohlen Körpern besonders anregend und möchten letztere in dieser Hinsicht der massiven Krone Hiero's überlegen sein.

Wird nun zugegeben, dass Archimedes den veränderlichen Auftrieb wahrscheinlich gekannt hat, so folgt, dass Archimedes, der die Sache auf so grosser Scala verfolgte, die unregelmässigen Bewegungen nicht hat übersehen können, welche Caswell<sup>4)</sup>, Prof. d. Astr. zu Oxford, in einem Briefe

1) Hätte Plutarchus nicht so bestimmt die Figur auf Archimedes' Grabmal beschrieben (Kugel und umschriebener Cylinder), so dürfte es zweifelhaft sein, ob es nicht eher eine Abbildung des Planetariums war. Das Grabmal wurde von Marcellus gesetzt; und er sandte die zwei Planetaria als eine Trophäe nach Rom. Uebrigens ist der Tod des Archimedes doch wohl der drohenden Zerstörung seines Apparates zuzuschreiben. Des Plutarch' dritte Erzählung besagt, dass Soldaten des Marcellus dem Archimedes begegneten, der seine Apparate dem römischen Sieger zu übertragen begriffen war; man vermutete, es sei Gold darin etc.

2) Salmoneus hatte den Blitz nachahmen wollen.

3) Ich kann noch keine Antwort auf die Frage geben, wie tief die Kugel in Wasser tauchte, aber sie ist nicht essentiell. Die Kugel hat ja auch feststehen können, ohne dass die Bewegung des Planetariums dadurch litt.

4) Im Fischer'schen Artikel wurde Oliver als Autor genannt; dieser jedoch schrieb einen dem Caswell'schen vorangehenden Artikel botanischen Inhalts in den Phil. Trans.



dieser Gruppe am besten einzuverleiben ist. Es wundert mich, dass der Erfinder<sup>1)</sup>, als er das labile Gleichgewicht sah, dem Taucher keine feine bis auf den Boden gehende Kette angehängt hat.

Eine Kette ist ja das Mittel, dem Taucher eine beliebig grosse Stabilität zu geben. Da er auf und ab geht, wäre sein Gang sehr leicht photographisch zu registriren.

II. Aehnliches Loos, nämlich abwechselnde Anerkennung und Vergessenheit bez. zu denselben Zeiten, wurde dem Hooke'schen Barometer zu Teil. Dies Instrument, eine Vereinigung von Luft- und Flüssigkeitsthermometer, wurde von Halley, Phipps und anderen mit bestem Erfolge gebraucht; es geriet ca. 1800 in Vergessenheit und wurde dann 1816 aufs neue erfunden von Adie, der es „Sympiesometer“ nannte. Und wiederum gebrauchten und lobten es Seefahrer und wissenschaftliche Männer (John Ross, James D. Forbes). Ungefähr 1830 findet man, das Instrument sei wohldurchdacht, von anerkannter Eleganz, an Bord von grossem Nutzen. Aber 1870 war es schon wieder vergessen, diesmal wohl durch die Einführung des Aneroides. Und wiewohl Calantarients als auch später Callendar automatischen Ausgleich des Temperatureinflusses erdachten, und neuerdings Grützner einen Apparat vorschlug, der bei constanter Temperatur (n. l. der Zunge) abgelesen werden soll (und wohl zu einfach, auch für Bergsteiger, zu sein scheint); — das Hooke'sche Barometer hat sich bis jetzt nicht wieder geltend machen können, ja es wird in keinem meteorologischen oder physikalischen Werke erwähnt.

III. In dritter Linie haben wir dann die von Magnus, August, Brunner, Blakesley vorgeschlagenen Apparate zur Messung nicht der Druckänderungen, sondern des Druckes selbst. Sie beruhen alle auf dem Boyle'schen Gesetze.

IV. Endlich könnten die Vorrichtungen von Davy, Doyère, Gibbs, Lunge etc. zur Reduction von Gasvolumina auf 0°

---

1) Ich fand den Apparat in Cartesius' Werken nicht erwähnt, wohl aber in Boyle's. Uebrigens kam ihnen die Natur zuvor, wenn sie den „Nautilus“ machte.



Interesse sein, wenn Prof. Pictet<sup>1)</sup> aus Genf Recht gehabt, als er im Jahre 1810 behauptete, die Barogramme für London, Madrid, Turin etc. seien *hauptsächlich* dieselben. Leider fehlt mir zur Zeit das Material zur Verification dieser der heutigen Meteorologie unglaublich vorkommenden wie auch unbekannten Behauptung.<sup>2)</sup> Sollte Pictet Recht haben — und sein umfangreiches Material, die von einem jüngeren Pictet publicirten synoptischen Barogramme, seine hohe wissenschaftliche Stellung sollten die Meteorologie von einem aprioristischen Urtheil abhalten —, so erlangen die kleinen Differenzen der Ordinate und Abscisse, welche auch Pictet nicht übersehen hat, eine grosse Wichtigkeit, und damit das Variationsbarometer.

Der zweite von mir construirte Apparat ist ein gewöhnliches Barometer, speciell Taschenbarometer. Es beruht auf Hooke's Princip; also ist *A* (Fig. 5) ein Quecksilberthermometer (z. B. 0—20°), *B* ein Luftthermometer; Gummiringe halten sie

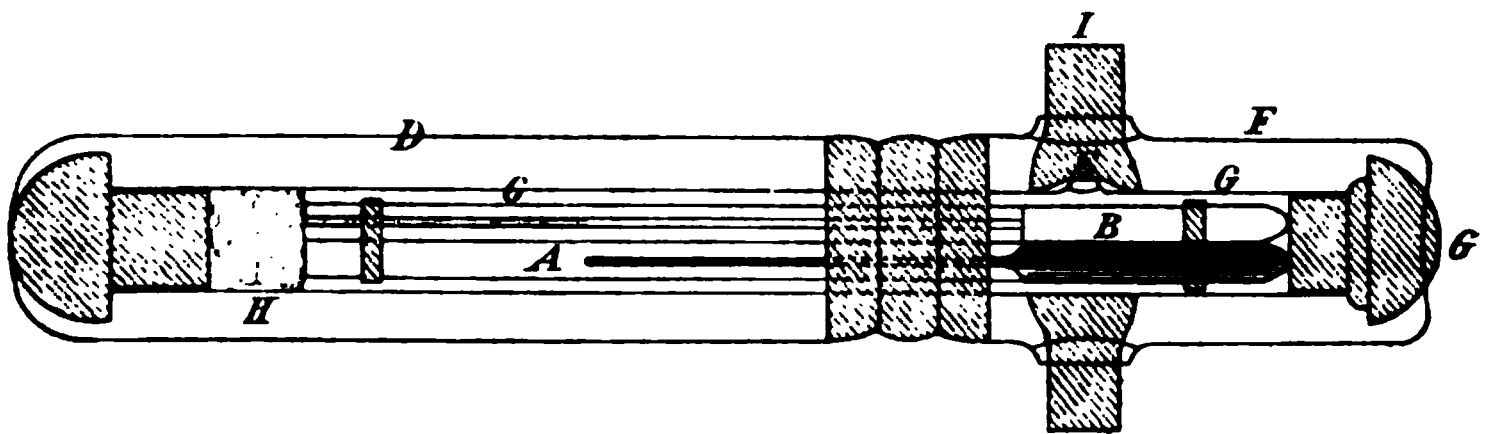


Fig. 5 (Scala 1 : 2).

nebeneinander fest; sie sind enthalten im Tubus *C*, der grösstentheils mit Wasser gefüllt ist. Durch *E* und *G* ist Communication mit der Atmosphäre. Nun ist *B* so gemacht worden, dass bei Erwärmung der relative Stand von *A* und *B* (d. h. des Quecksilbers in *A* und der Luft in *B*) nicht geändert wird. Also liest man nur diesen relativen Stand ab. Dem Thermometer *A* oder *B* giebt man eine solche Scala, dass Aenderungen des relativen Standes ohne Umrechnung in Millimeter Quecksilber abgelesen werden können.

1) Bibl. Britannique 1810. II. p. 22. Vgl. auch andere Artikel ebendasselbst, oder Gilb. Ann. 41. p. 74. 1812.

2) Ich habe sie natürlich verificirt für Amsterdam, London, Edinburg, Berlin und Paris, soweit die dürftigen Zeitungsbarogramme etc. es mir ermöglichten.



so wird Hahn *F* geöffnet und das Voltameter links besorgt die Einstellung der Flüssigkeit bei *b*. Dann liest man die Scala ab; es sei der Minderdruck  $p_1$ . Wenn man jetzt die Flüssigkeit bei *a* einstellt, Hahn *F* schliesst und den Minderdruck zur Einstellung bei *b* aufs neue bestimmt, findet man den viel grösseren Minderdruck  $p_2$ . Und der gesuchte Barometerstand berechnet sich wie folgt:

$$(n + 1)(p_2 - p_1) \text{ oder } \frac{n+1}{13,6}(p_2 - p_1),$$

wenn  $n$  das Verhältniss der Volumina *B* und *A* ist.

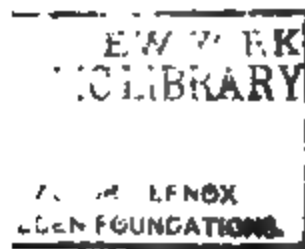
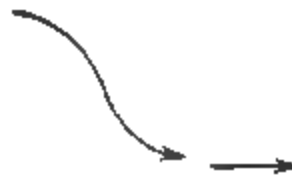


Fig. 6 (Scala 1 : 7).

Fig. 7 (Scala 1 : 2).

Leider habe ich mit dem Apparate nur wenig arbeiten können, verzichte also auf die Behandlung der Besonderheiten. Nur möchte ich betonen, dass die Ablesung des Flüssigkeitsniveaus im Voltameter sehr genau geschehen kann, weil es ringförmig ist und die Scala umfasst, sodass Parallax ausgeschlossen ist. Und zweitens, dass die Flüssigkeit *C* zu gleicher Zeit die Temperatur constant hält.





keine Erklärung. Jedoch diese Art „Perpetuum mobile“ war, soviel mir bekannt, bis jetzt die einzige, welche des Namens (in ursprünglicher Bedeutung) wirklich würdig ist. Die Construction ist wahrscheinlich erst in den letzten Jahrhunderten vergessen worden, denn nach Archimedes haben Posidonius und andere sie gemacht. Weiter ist ein Instrument, das man Karl V. geschenkt hat und von John Dee und Cardanus gesehen wurde, wahrscheinlich ähnlicher Natur gewesen; und Drebbel hat auch mehrere Exemplare angefertigt.

Zu bedauern ist, dass diese Kunst ganz vergessen worden; würde ja ein Instrument, das ein Planetarium treiben konnte, wohl auch im stande sein, die Meteorographen längerer Periode zu treiben — wozu man 1894—1895 mit fraglichem Erfolge auf dem Mont-Blanc ein Gewicht von 90 kg benutzte.

Was Drebbel's Sauerstoff angeht, einen schlagenden Beweis findet man bei Boyle, Opera I. p. 140, wo er das Drebbel'sche unter Wasser fahrende Boot beschreibt.

Am Ende möchte ich den Leser höflichst bitten, mir womöglich historische oder sonstige Beiträge zukommen zu lassen.

setzen kann, worin  $J_\lambda$  das Reflexionsvermögen des Körpers bedeutet, so lässt sich  $a_\lambda$  durch  $N$  und  $K$  darstellen, wenn man mit  $N$  den Brechungs-, mit  $K$  den Absorptionscoefficienten bezeichnet.

Es ist dann nämlich:

$$J_\lambda = \frac{(1 - N)^2 + K^2}{(1 + N)^2 + K^2}, \quad a_\lambda = \frac{4N}{(1 + N)^2 + K^2}.$$

Nun sind nach allen Dispersionstheorien  $N^2 - K^2$  und  $2NK$  gewisse *algebraische* Functionen von  $\lambda$ ; es ist somit dies auch für  $a_\lambda$  der Fall.  *$a_\lambda$  soll also eine algebraische Function von  $\lambda$  sein*; dabei kann natürlich die Abhängigkeit von der Temperatur auch transcendent sein.

Wir schliessen daraus: *enthält der Ausdruck für  $\epsilon_\lambda$  eine transcendente Function von  $\lambda$ , so muss auch  $e_\lambda$  dieselbe Function enthalten.*



Nach Thiesen<sup>1)</sup> haben wir z. B.:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{C T^5}{(\lambda T)^{4.5}} \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}},$$

$$c = 4,5 \lambda_m T;$$

es soll daher jede  $\varepsilon_\lambda$ , für jeden blanken festen Körper, den Factor  $e^{-\frac{c}{\lambda T}}$  enthalten.

2. Es sei ferner gesetzt

$$a_\lambda = \varphi(T, \lambda T);$$

da immer

$$a_\lambda \leq 1$$

ist, so folgt auch

$$\varphi(T, \lambda T) \leq 1.$$

Schreiben wir für die schwarze Strahlung

$$\varepsilon_\lambda = C T^5 F(\lambda T),$$

so haben wir offenbar ganz allgemein

$$e_\lambda = C T^5 F(\lambda T) \varphi(T, \lambda T);$$

da aber immer

$$e_\lambda \leq \varepsilon_\lambda$$

sein soll, so folgt:

$$\int_0^\infty e_\lambda d\lambda \leq \int_0^\infty \varepsilon_\lambda d\lambda,$$

oder

$$e \leq s,$$

worin  $e, s$  die Gesamtstrahlungen bedeuten.

Nach dem Stefan'schen Gesetz ist

$$s = \sigma T^4;$$

es muss auch

$$e = \Phi(T)$$

sein; setzen wir

$$e = \Phi(T) = \sigma T^4 f(T),$$

so folgt unmittelbar

$$f(T) \leq 1.$$

---

1) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 37. 1900.

Nun ist bekanntlich für die schwarze Strahlung

$$\epsilon_m T^{-5} = \text{const.} = B.$$

Es folgt daraus

$$e_m T^{-5} \leq B,$$

oder auch

$$e_m T^{-6} \leq \frac{B}{T}.$$

Nach den Beobachtungen von Lummer und Pringsheim<sup>2)</sup> scheint  $e_m T^{-6}$  nahezu constant zu bleiben; wäre aber wirklich

$$e_m T^{-6} = \text{const.} = D',$$

so würde folgen

$$D' T \leq B,$$

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Physik. Gesellsch. zu Berlin 17. p. 106. 1898.

2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 215 1899.

was offenbar unmöglich ist. *Es kann also für keinen Körper  $e_m T^{-5}$  constant bleiben.* Unverändert bleiben soll aber der Wert

$$\frac{e_m T^{-5}}{\varphi(T, \lambda_m' T)} = C \cdot F(\lambda_m' T) = D.$$

Da nun

$$B = C F(\lambda_m T)$$

ist, so haben wir

$$D = B \cdot \frac{F(\lambda_m' T)}{F(\lambda_m T)}.$$

Ist uns also die Form der Function  $F(\lambda T)$  für die schwarze Strahlung bekannt, so lässt sich  $D$  für jeden Körper berechnen, wenn nur  $B$ ,  $\lambda_m T$  und  $\lambda_m' T$  bekannt sind.

4. Die angeführten Betrachtungen erlauben uns eine Eigentümlichkeit in der Emission des blanken Platins zu erklären, die Lummer und Pringsheim beobachtet hatten. Diese Verfasser<sup>1)</sup> haben nämlich gefunden, dass die Spectralgleichung des Platins sich in der Form

$$e_\lambda = \frac{C'}{\lambda^5} e^{-\frac{c'}{\lambda T}}$$

darstellen lässt, wenn  $C'$  selbst eine Temperaturfunction bedeutet. Für jede Temperatur ist dabei das Uebereinstimmen der beobachteten Curven mit den berechneten „überraschend“. Setzen wir

$$C' = C \psi(T),$$

worin  $C$  die entsprechende Constante der schwarzen Strahlung bedeutet, so haben wir

$$e_\lambda = C \frac{\psi(T)}{\lambda^5} e^{-\frac{c'}{\lambda T}}$$

und nach dem Früheren muss sein

$$c' = c = 4,5 \lambda_m T,$$

worin  $\lambda_m T$  sich auf die schwarze Strahlung bezieht und etwa 2940 ist. Nun wird das Maximum von  $e_\lambda$  bestimmt durch die Beziehung

$$\frac{\partial e_\lambda}{\partial \lambda} = 0, \quad 5 = \frac{c}{\lambda_m' T},$$

woraus sich  $\lambda_m' T$  berechnen lässt, und zwar wird

$$\lambda_m' T = \frac{c}{5} = 0,9 \cdot 2940 = 2646,$$

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, l. c. p. 234; O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Physik. 3. p. 294. 1900.

|   |       |      |      |      |      |      |
|---|-------|------|------|------|------|------|
| Beobachtet $\epsilon_\lambda = 0,040$   | 0,099 | 0,49 | 1,11 | 1,29 | 1,78 | 1,96 |
| nach Thiesen $\epsilon_\lambda = 0,040$ | 0,107 | 0,57 | 1,24 | 1,41 | 1,87 | 2,11 |
| nach Planck $\epsilon_\lambda = 0,040$  | 0,107 | 0,55 | 1,26 | 1,46 | 2,02 | 2,34 |

Freilich sind dabei die beobachteten Zahlen um einige Procente unsicher, da die Correctionen infolge der Breite des Spaltes und des Bolometers nicht angebracht sind. Nun hat ganz neuerdings Planck<sup>2)</sup> eine Formel für die schwarze Strahlung vorgeschlagen, die lautet:

$$\epsilon_\lambda = \frac{C}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\lambda T} - 1}.$$

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 163. 1900.

2) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 237. 1900.

Berechnen wir daraus  $c$  mit der Bedingung

$$\frac{\partial \varepsilon_\lambda}{\partial \lambda} = 0,$$

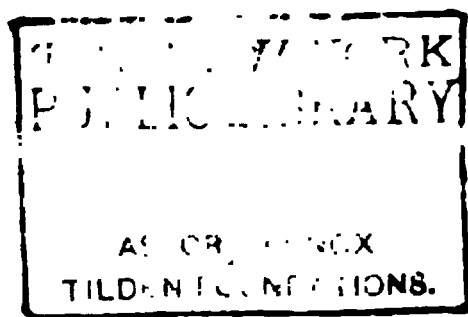
so ergibt sich etwa

$$c = 14597.$$

Nehmen wir  $\varepsilon_\lambda$  für  $T = 287$  als Ausgangspunkt, und berechnen dann  $\varepsilon_\lambda$  für andere Temperaturen bei  $\lambda = 12,3 \mu$ , so bekommen wir die Zahlen der letzten Reihe der angeführten kleinen Tabelle. Diese Zahlen sind bei den Temperaturen von  $1000^\circ$  abs. aufwärts immer grösser, als dieselben nach Thiesen. Ist also wirklich die Thiesen'sche Formel unrichtig, so wäre das auch für die neue Planck'sche Formel der Fall.

Kasan, 15./2. Januar 1901.

(Eingegangen 23. Januar 1901.)



dieses Resultat mit den Folgerungen aus der elektromagnetischen Lichttheorie Maxwell's übereinstimmt.

In der That lesen wir bei Maxwell den folgenden für *nicht leitende* Körper geltenden Satz<sup>1)</sup>: „in a medium in which waves are propagated there is a pressure in direction normal to the waves and numerically equal to the energy in unit of volum“; einige Zeilen weiter (Art. 793) äussert sich Maxwell in einer noch viel allgemeineren Weise, indem er sagt: „a flat

1) Aus den „Archives Néerlandaises“, 1900; für die Ann. d. Phys. zum Teil neu bearbeitet vom Verfasser.

2) A. Bartoli, Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore. 56 pp. Firenze 1876.

3) L. Boltzmann, Wied. Ann. 22. p. 31. 1884.

4) l. c. p. 293.

5) J. C. Maxwell, Treatise on electricity and magnetism, Second ed. 11. p. 401. Art. 792. 1881.



body exposed to sunlight would experience this pressure on its illuminated side only, and would therefore be repelled from the side on which the light falls“.

Diese Behauptung Maxwell's interpretirt nun Boltzmann in folgender Weise: „Maxwell's Resultat gilt,“ sagt er<sup>1)</sup>, „wenn der Strahl senkrecht auf die gedrückte Fläche auffällt und von derselben absorbiert wird. Würde er nahe senkrecht auffallen und unter demselben Winkel reflectirt, so wäre der Druck der doppelte.“ Natürlich sind hier Absorption und Reflexion als vollkommen gemeint.

Wir sehen also, dass es zwei vollkommen voneinander unabhängige Wege zur Ableitung dieses sogenannten „Lichtdruckes“ giebt: der thermodynamische und der elektromagnetische.

Nun schreibt Boltzmann selbst seinen Rechnungen einen „vielfach provisorischen Charakter“ zu<sup>2)</sup>; Bartoli hält die Einführung des Lichtdruckes nur als „l'ipotesi più semplice“<sup>3)</sup>; auch nach Boltzmann<sup>4)</sup> könnte der Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatze „auch durch eine andere Hypothese gehoben werden“.

Was aber die elektromagnetische Lichttheorie Maxwell's anbetrifft, so ist ohne weiteres klar, dass der oben angeführte (aus Art. 792) Satz noch nicht erlaubt, direct über die an der Grenze zweier Medien wirkende ponderomotorische Kräfte zu schliessen, denn auf eine Grenzfläche gegen einen anderen Körper wirkt durchaus nicht dieser Druck direct, sondern „die Resultirende derjenigen Kräfte, welche sich nach der aus der Elasticitätstheorie bekannten Regel aus den im Innern eines jeden Körpers vorhandenen Spannungen ergeben.“<sup>5)</sup>

Nur in den Grenzfällen einer normalen Incidenz auf eine vollkommen reflectirende bez. vollkommen schwarze Fläche kann diese Resultirende direct angegeben werden: bei einer vollkommenen Reflexion sind alle elektromagnetische Vektoren im Innern des reflectirenden Körpers Null; bei einer voll-

---

1) L. Boltzmann, l. c. p. 291—292.

2) l. c. p. 293.

3) A. Bartoli, l. c. p. 25.

4) L. Boltzmann, l. c. p. 38.

5) Vgl. F. Pockels, Grunert's Archiv 12. p. 60. 1894.



setzt,  $\mu$ ,  $\varepsilon$  als Constante betrachtet und die Bezeichnungen von Hertz benutzt,

$$A \mu \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\beta L - \alpha M) - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha N - \gamma L) \right. \\ \left. + \alpha \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

analog für  $M$ ,  $N$ , und

$$A \varepsilon \left\{ \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\beta X - \alpha Y) - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha Z - \gamma X) \right. \\ \left. + \alpha \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4 \pi A u,$$

analog für  $Y$  und  $Z$ .

2. Wir wollen zunächst die Werte der ponderomotorischen Kräfte im Innern unseres Mediums auf etwas anderem Wege ableiten, als es bei Hertz und v. Helmholtz der Fall war.

Zu dem Zweck multipliren wir unsere Gleichungen mit

$$\frac{1}{4 \pi A} d \Omega,$$

worin  $d \Omega$  ein Volumenelement bedeutet, dann der Reihe nach mit  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , addiren und integriren über einen durch eine geschlossene Fläche begrenzten Raum mit constantem  $\varepsilon$ ,  $\mu$ .

Dann bekommen wir nach der Ausführung der partiellen Integration in dem ersten Integrale auf der rechten Seite:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint d \Omega \left\{ \frac{\varepsilon}{8 \pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8 \pi} (L^2 + M^2 + N^2) \right\} \\ + \frac{1}{4 \pi} \iiint d \Omega \mu \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} (M^2 + N^2) + \frac{\partial \beta}{\partial y} (L^2 + N^2) + \frac{\partial \gamma}{\partial z} (L^2 + M^2) \right. \\ \left. - L M \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - M N \left( \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) - L N \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \right\}, \\ + \frac{1}{4 \pi} \iiint d \Omega \varepsilon \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} (Y^2 + Z^2) + \frac{\partial \beta}{\partial y} (X^2 + Z^2) + \frac{\partial \gamma}{\partial z} (X^2 + Y^2) \right. \\ \left. - X Y \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - Y Z \left( \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) - X Z \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \right\}, \\ + \frac{1}{4 \pi} \iiint d \Omega \left\{ \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial x} [\mu (L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon (X^2 + Y^2 + Z^2)] \right. \\ + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial y} [\mu (L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon (X^2 + Y^2 + Z^2)] \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial}{\partial z} [\mu (L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon (X^2 + Y^2 + Z^2)] \right\},$$



In dieser Weise bekommt man

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{8\pi} \iint dS \{ \mu (L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon (X^2 + Y^2 + Z^2) \} \times \\
 & \quad (\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz), \\
 & - \frac{1}{8\pi} \iiint d\Omega \{ \mu (L^2 + M^2 + N^2) + \varepsilon (X^2 + Y^2 + Z^2) \} \times \\
 & \quad \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right).
 \end{aligned}$$

Das erste Glied ist nun als diejenige Energieströmung zu betrachten, die von der Bewegung der Materie abhängt und die also eine Erweiterung des Poynting'schen Satzes darstellt<sup>1)</sup>; was aber das Volumenintegral anbetrifft, so ist dasselbe mit den anderen die Arbeit darstellenden Integralen zu verbinden. Wir gelangen auf diese Weise zu dem zuerst von Hertz<sup>2)</sup> abgeleiteten Ausdruck der Arbeit von ponderomotorischen Kräften

$$\begin{aligned}
 \iiint d\Omega \left\{ X_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + Y_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + Z_z \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right. \\
 \left. + X_y \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + Y_z \left( \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) + Z_x \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

$$X_x = X'_x + X''_x \text{ etc. } X_y = X'_y + X''_y \text{ etc.}$$

$$X'_x = \frac{\mu}{8\pi} (-L^2 + M^2 + N^2), \quad X'_y = Y'_x = -\frac{\mu}{4\pi} LM,$$

$$Y'_y = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 - M^2 + N^2), \quad Y'_z = Z'_y = -\frac{\mu}{4\pi} MN,$$

$$Z'_z = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 - N^2), \quad Z'_x = X'_z = -\frac{\mu}{4\pi} NL,$$

$$X''_x = \frac{\varepsilon}{8\pi} (-X^2 + Y^2 + Z^2), \quad X''_y = Y''_x = -\frac{\varepsilon}{4\pi} XY,$$

$$Y''_y = \frac{\varepsilon}{8\pi} (X^2 - Y^2 + Z^2), \quad Y''_z = Z''_y = -\frac{\varepsilon}{4\pi} YZ,$$

$$Z''_z = \frac{\varepsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 - Z^2), \quad Z''_x = X''_z = -\frac{\varepsilon}{4\pi} ZX,$$

der nach der Ausführung der partiellen Integration die folgende Form annimmt:

1) Vgl. W. Wien, Wied. Ann. 47. p. 337. 1892

2) H. Hertz, Wied. Ann. 41. p. 394. 1890.

die auf jeder Grenzfläche wirkenden, worin  $\Lambda_x, \dots$  die Werte von  $X_x, \dots$  unendlich nahe an der Grenzfläche von der Seite der inneren Normale  $n$  bedeuten.

6. Die Ausführung der Differentiation in den Ausdrücken von  $\Xi, \dots$  ergibt nun

$$\begin{aligned}\Xi = & \frac{\mu}{4\pi} L \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) + \frac{e}{4\pi} X \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\mu}{4\pi} M \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{e}{4\pi} Y \left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\mu}{4\pi} N \left( \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) + \frac{e}{4\pi} Z \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right),\end{aligned}$$

analog für  $H, Z$ .



Es sei unser Körper zunächst in Ruhe; wir lassen durch denselben sich eine elektromagnetische Störung fortpflanzen, die durch bekannte Gleichungen

$$A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi Au,$$

$$A\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad A\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} - 4\pi Av,$$

$$A\mu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \quad A\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi Aw,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

dargestellt wird. Dann folgen die Werte von  $\Xi, H, Z$  in der Form

$$\Xi = \frac{A\varepsilon\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (MZ - NY) + A\mu (Mw - Nv),$$

$$H = \frac{A\varepsilon\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (NX - LZ) + A\mu (Nu - Lw),$$

$$Z = \frac{A\varepsilon\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (LY - MX) + A\mu (Lv - Mu),$$

worin

$$u = \frac{X}{k}, \quad v = \frac{Y}{k}, \quad w = \frac{Z}{k}$$

ist und  $k$  den specifischen Widerstand des Körpers bedeutet.

Um nun  $\alpha, \beta, \gamma$  zu finden, sollen wir diese Kräfte als *äussere* Kräfte in die bekannten Differentialgleichungen der Bewegung elastischer Körper einführen; in gleicher Weise müssen  $\Xi_n, H_n, Z_n$  als äussere Kräfte in die Grenzbedingungen der elastischen Druckkräfte eingesetzt werden. Sind dabei  $X, \dots, N$  periodisch veränderlich, so wird dasselbe auch für  $\alpha, \beta, \gamma$  der Fall, sodass wir im allgemeinen elastische Schwingungen erhalten werden. Da aber, wie schon v. Helmholtz<sup>1)</sup> bemerkt hatte,  $\Xi, \dots, Z_n$  Grössen zweiten Grades und bei regelmässigen Lichtschwingungen verschwindend kleine zweiter Ordnung sind, so werden auch  $\alpha, \beta, \gamma$  ebenso klein und wir können daher den Einfluss von  $\alpha, \beta, \gamma$  auf  $L, M, N, X, Y, Z$  auch für die bestevacuirtten Räume ausser acht lassen.<sup>2)</sup> Nur für den reinen Aether (sogar ohne Beharrungsvermögen) wäre

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 53. p. 139. 1894.

2) H. Hertz, Wied. Ann. 41. p. 398. 1890.

die Mittelwerte von  $\Xi$ , ... nur dann verschwinden, wenn

$$\frac{MZ - NY}{k} = 0, \quad \frac{NX - LZ}{k} = 0, \quad \frac{LY - MX}{k} = 0,$$

also wenn entweder

$$MZ - NY = 0, \quad NX - LZ = 0, \quad LY - MX = 0,$$

oder

$$k = \infty.$$

Da ferner  $MZ - NY$ , ... die Componenten des bekannten Poynting'schen Vectors darstellen, so sehen wir daraus, dass auch in den Leitern die Werte von  $\Xi$ , ... innig mit der Bewegung der Energie verbunden sind.<sup>1)</sup>

1) Vgl. H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 53. p. 139. 1894.



Von jetzt ab wollen wir im weiteren unter  $X_z, \dots \Xi, \dots \Xi_n, \dots X^2 \dots$  immer die in der angegebenen Weise berechneten Mittelwerte verstehen.

8. Wir stellen uns nun zwei sich an der Ebene  $z = 0$  angrenzende Medien vor und wählen die  $yz$ -Ebene für die Einfallsebene einer linearpolarisirten ebenen Lichtwelle, sodass wir setzen

$$Y = Z = 0, \quad L = 0.$$

Von der Seite der negativen  $z$  liege ein *nichtleitendes* Medium, für welches offenbar gilt

$$\Xi = 0, \quad H = 0, \quad Z = 0,$$

$$X_x = \frac{\mu}{8\pi} (M^2 + N^2) - \frac{s}{8\pi} X^2, \quad X_y = 0,$$

$$Y_y = \frac{\mu}{8\pi} (-M^2 + N^2) + \frac{s}{8\pi} X^2, \quad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} MN,$$

$$Z_z = \frac{\mu}{8\pi} (M^2 - N^2) + \frac{s}{8\pi} X^2, \quad Z_x = 0,$$

und an der Ebene  $z = 0$ , wo  $\cos nz = -1$  ist, haben wir

$$\Xi_n = 0, \quad H_n = +Y_z, \quad Z_n = +Z_z.$$

Setzen wir in leicht verständlichen Bezeichnungen

$$X_0 = \mathfrak{A}_0 \cos 2\pi \left( \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{\lambda} - \frac{t}{T} \right),$$

$$X_r = \mathfrak{A}_r \cos \left[ 2\pi \left( \frac{-x \cos \varphi + y \sin \varphi}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \delta \right]$$

und rechnen wir  $\mathfrak{A}_r$  immer positiv, so folgt für die Mittelwerte  $X^2 = (X_0 + X_r)^2$  etc. auf der Ebene  $z = 0$

$$\frac{\mu}{8\pi} X^2 = \frac{1}{2} \frac{s}{8\pi} (\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 + 2\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_r \cos \delta),$$

$$\frac{\mu}{8\pi} M^2 = \frac{1}{2} \frac{s}{8\pi} (\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 - 2\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_r \cos \delta) \cos^2 \varphi,$$

$$\frac{\mu}{8\pi} N^2 = \frac{1}{2} \frac{s}{8\pi} (\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 + 2\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_r \cos \delta) \sin^2 \varphi,$$

$$\frac{\mu}{4\pi} MN = -\frac{s}{8\pi} (\mathfrak{A}_0^2 - \mathfrak{A}_r^2) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Für den Fall *vollkommener Reflexion* haben wir  $J_\varphi = 1$  und

$$\psi = 0,$$

$$p = 2 \epsilon_0 \cos^2 \varphi, ^1)$$

für *vollkommene Absorption* wird  $J_\varphi = 0$  und

$$\psi = \varphi,$$

$$p = \epsilon_0 \cos \varphi,$$

endlich für *normale Incidenz* ist

$$\psi = 0,$$

$$p = \epsilon_0 (1 + J_0).$$

1) Vgl. die Betrachtungen von Boltzmann, l. c. p. 292.

Daraus folgt gerade das Resultat von Maxwell für  $J_0 = 0$  und von Boltzmann für  $J_0 = 1$ .

10. Wir stellen uns vor, dass die einfallenden Strahlen einen Kreiscylinder bilden, dessen Axe die  $z = 0$ -Ebene in dem Koordinatenanfang schneidet; diese Strahlen beleuchten auf der Ebene  $z = 0$  eine Ellipse, deren Axen in der Richtung von  $y$  und  $x$ -Axe fallen. Die reflectirten Strahlen bilden offenbar einen ähnlichen Cylinder. *Ausserhalb der Schnittpunkte der beiden Cylinder* haben wir, wie leicht zu ersehen ist, für die einfallenden Strahlen:

$$\begin{aligned} X_z &= 0, & X_y &= 0, \\ Y_y &= e_0 \sin^2 \varphi, & Y_z &= e_0 \sin \varphi \cos \varphi, \\ Z_z &= e_0 \cos^2 \varphi, & Z_x &= 0. \end{aligned}$$

Eine einfache Coordinatentransformation zeigt, dass diese Kräfte nur eine Resultirende geben, und zwar einen mit der Wellennormale zusammenfallenden Druck, dessen Wert  $e_0$  beträgt, wie es schon Maxwell auf anderem Wege gefunden hat. Ein solcher Druck kann keine auf der Mantelfläche des Cylinders wirkende Kraft ergeben; dasselbe Resultat gilt natürlich auch für die reflectirten Strahlen. Es bleiben also im ersten Medium nur Kräfte in den Schnittpunkten der beiden cylindrischen Mantelflächen.

Ihre grösste Wirkung erhalten diese Kräfte bei der normalen Incidenz. Dann sind die Mittelwerte

$$\begin{aligned} \frac{s}{8\pi} X^2 &= \frac{1}{2} \frac{s}{8\pi} \left( \mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 + 2 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_r \cos \left( \frac{4\pi z}{\lambda} - \delta \right) \right), \\ \frac{\mu}{8\pi} M^2 &= \frac{1}{2} \frac{s}{8\pi} \left( \mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_r^2 - 2 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_r \cos \left( \frac{4\pi z}{\lambda} - \delta \right) \right) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} X_x &= -2 \sqrt{e_0 e_r} \cos \left( \frac{4\pi z}{\lambda} - \delta \right), & X_y &= 0, \\ Y_y &= 2 \sqrt{e_0 e_r} \cos \left( \frac{4\pi z}{\lambda} - \delta \right), & Y_z &= 0, \\ Z_z &= e_0 + e_r, & Z_x &= 0 \end{aligned}$$

und auf der Mantelfläche des Cylinders

$$\bar{\Xi}_n = -X_x \cos nx, \quad \bar{H}_n = -Y_y \cos ny, \quad \bar{Z}_n = 0.$$



Der Einfachheit wegen nehmen wir jetzt  $\varphi = 0$ , also betrachten den Fall der normalen Incidenz, und suchen die die vollkommen bewegliche Platte in Bewegung zu setzenden Kräfte. Da dieselben nach dem früheren nur von dem Lichte ausser der Platte abhängen, so haben wir mit der Lichtbewegung in der Platte nichts zu thun. Es sei  $e_1$  die mittlere Energie der Volumeneinheit der Strahlen, die im ersten Medium sich in der Richtung von der Platte fortpflanzen; ebenso sei  $e_a$  die Energie der Strahlen, die aus der Platte bei  $z = h$  herausgetreten sind. Dann haben wir

$$\begin{aligned} z = 0, \quad \bar{Z}_0 &= e_0 + e_1, & \cos nz &= -1, \\ z = h, \quad \bar{Z}_h &= -e_a, & \cos nz &= +1 \end{aligned}$$

und die die Platte in der Richtung der  $z$ -Axe bewegende Kraft, der Lichtdruck, wird

$$p = e_0 + e_1 - e_a.$$

Bekanntlich ist

$$e_a = e_0 \frac{1 - J_0}{1 + J_0},$$

$$e_0 = e_1 + e_a,$$

woraus folgt

$$p = 2 e_0 \left( 1 - \frac{1 - J_0}{1 + J_0} \right)$$

oder

$$p = e_0 \frac{4 J_0}{1 + J_0}.$$

Bei  $J = \frac{1}{2}$  würde folgen  $p = e_0$ , gerade wie in dem Falle einer absolut schwarzen Fläche. Da ferner

$$J_0 = \left( \frac{N-1}{N+1} \right)^2$$

ist, so können wir auch schreiben

$$p = 2 e_0 \frac{(N-1)^2}{N^2 + 1}.$$

Für das Glas in der Luft ist  $N = 1,5$ ; für den Diamanten ist  $N = 2,5$ ; das giebt im ersten Falle

$$p = 0,15 \cdot e_0,$$

in dem zweiten

$$p = 0,62 \cdot e_0.$$



$M_x, M_y, M_z$  bezeichnen wollen. Es seien ferner  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  und  $\bar{x}_h, \bar{y}_h, \bar{z}_h$  die Coordinaten der entsprechenden Punkte der Ebenen  $z = 0$  bez.  $z = h$ ,  $dS_0, dS_h$  die Flächenelemente; dann ist

$$M_x = \iint (\bar{y}_0 \bar{Z}_0 - \bar{z}_0 \bar{H}) dS_0 + \iint (\bar{y}_h \bar{Z}_h - \bar{z}_h \bar{H}_h) dS_h,$$

analoge Ausdrücke für  $M_y, M_z$ ; nun haben wir offenbar

$$\bar{x}_h = \bar{x}_0, \quad \bar{y}_h = \bar{y}_0 + h \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \bar{z}_h = \bar{z}_0 + h, \quad dS_0 = dS_h,$$

woraus folgt

$$M_x = \iint [\bar{y}_0 (\bar{Z}_0 + \bar{Z}_h) - \bar{z}_0 (\bar{H}_0 + \bar{H}_h)] dS_0 + h \iint (\bar{Z}_h \operatorname{tg} \varphi_1 - \bar{H}_h) dS_0,$$

$$M_y = \iint [\bar{x}_0 (\bar{H}_0 + \bar{H}_h) - \bar{y}_0 (\bar{\Xi}_0 + \bar{\Xi}_h)] dS_0 - h \operatorname{tg} \varphi_1 \bar{\Xi}_h \iint dS_0,$$

$$M_z = \iint [\bar{z}_0 (\bar{\Xi}_0 + \bar{\Xi}_h) - \bar{x}_0 (\bar{Z}_0 + \bar{Z}_h)] dS_0 + h \bar{\Xi}_h \iint dS_0,$$

oder

$$M_x = h S_0 (\bar{Z}_h \operatorname{tg} \varphi_1 - \bar{H}_h), \quad M_y = 0, \quad M_z = 0,$$

worin  $S_0$  die beleuchtete Fläche auf der Ebene  $z = 0$ ,  $\varphi_1$  den Brechungswinkel bedeuten.

Die Substitution der Werthe von  $\bar{Z}_h, \bar{H}_h$  ergibt ferner

$$M_x = e_0 S_0 h \cos \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi_1),$$

oder da

$$\operatorname{tg} \varphi = N = \operatorname{ctg} \varphi_1$$

ist, so folgt endlich

$$M_x = e_0 S_0 h \frac{N^2 - 1}{N(N^2 + 1)}.$$

Für Glas in der Luft berechnet man daraus  $M_x = 0,26 e_0 S_0 h$ ; für den Diamanten  $M_x = 0,29 e_0 S_0 h$ . Das gewonnene Drehungsmoment ist offenbar *eine ganz neue Folgerung* der elektromagnetischen Lichttheorie.

15. Wir wollen nun den Fall der *sphärischen* Wellen untersuchen. Es liege der Coordinatenanfang in dem leuchtenden Punkte, die Reflexionsebene sei die Ebene  $z = h$ ; wir behalten

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\sqrt{\frac{s}{\mu}} \mathfrak{A} \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right\}, & \alpha_2 &= \sqrt{\frac{s}{\mu}} \mathfrak{B} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x}, \\
\alpha_3 &= \sqrt{\frac{s}{\mu}} \mathfrak{C} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x}, \\
\beta_1 &= \sqrt{\frac{s}{\mu}} \mathfrak{A} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y}, & \beta_2 &= -\sqrt{\frac{s}{\mu}} \mathfrak{B} \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right\}, \\
\beta_3 &= \sqrt{\frac{s}{\mu}} \mathfrak{C} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y}, \\
\gamma_1 &= \sqrt{\frac{s}{\mu}} \mathfrak{A} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x}, & \gamma_2 &= \sqrt{\frac{s}{\mu}} \mathfrak{B} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x}, \\
\gamma_3 &= -\sqrt{\frac{s}{\mu}} \mathfrak{C} \left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

1) P. Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes p. 65.  
Leipzig 1891.



Für die reflectirte Kugelwelle müssen wir nehmen

$$r'^2 = x^2 + y^2 + (2h - z)^2,$$

und  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  bez. durch  $\mathfrak{A}_r$ ,  $\mathfrak{B}_r$ ,  $\mathfrak{C}_r$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_2'$ ,  $\theta_3'$  ersetzen; es ist dabei offenbar für  $z = h$

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial x} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{r}'}{\partial y} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{r}'}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{r}}{\partial z}; \quad \bar{r} = \bar{r}'$$

und die Berechnung von den Mittelwerten  $\bar{X}^2 = (\bar{X}_0 + \bar{X}_r)^2, \dots$ , wenn auch langweilig, bietet doch keine Schwierigkeit dar.

In dieser Weise berechnen wir die Normalcomponente des Druckes auf die Ebene  $z = h$  zu

$$\bar{Z}_h = (\bar{e}_0 + \bar{e}_r) \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \right)^2 = (\bar{e}_0 + \bar{e}_r) \cos^2 \varphi,$$

worin  $\bar{e}_0$ ,  $\bar{e}_r$  die mittlere Energie der Volumeneinheit der einfallenden bez. der reflectirten Strahlen bei der Ebene  $z = h$  bedeuten; dabei sind natürlich diese Grössen, wie auch  $\varphi$ , für verschiedene Strahlen verschieden.

16. Es sei nun  $i_0$  diejenige Energie, die die auffallende Welle in einer Secunde auf die Einheit der Fläche  $z = h$  bringt; die analoge Grösse für die reflectirte Welle sei  $i_r$ ; bezeichnen wir mit  $V$  die Lichtgeschwindigkeit, so folgt, wie leicht zu sehen ist,

$$\bar{e}_0 = \frac{i_0}{V \cos \varphi}, \quad \bar{e}_r = \frac{i_r}{V \cos \varphi},$$

$$\bar{Z}_h = \frac{i_0 + i_r}{V} \cos \varphi.$$

Diese Beziehung bleibt auch dann gelten, wenn man eine *strahlende* Fläche hat; dann ist nur  $i_0 + i_r$  durch die ausgestrahlte Energie zu ersetzen.

Betrachten wir z. B. eine absolut schwarze Fläche, deren 1 qcm in der Zeiteinheit normal die Energie  $i$  ausstrahlt, dann ist für den Winkel, der zwischen  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  liegt,

$$i_\varphi = i \cos \varphi$$

und die entsprechende Druckcomponente wird

$$\bar{Z}_h = \frac{i_\varphi \cos \varphi}{V} = \frac{i \cos^2 \varphi}{V}.$$





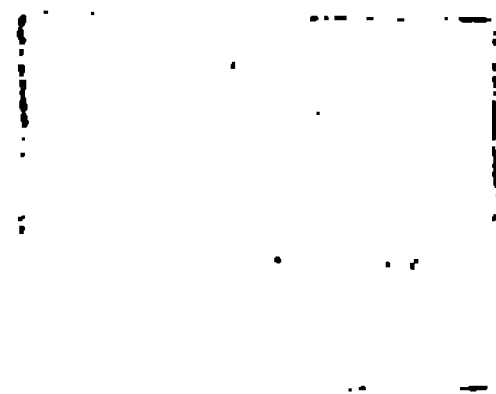


hinterlassene remanente Moment ausübt. Hr. Holitscher findet, „dass wenn das remanente Moment durch genügend oft wiederholte Einwirkung einer gewissen Kraft seinen Grenzwert  $M_{rm}$  erreicht hat, nicht nur eine grössere Kraft, sondern auch eine *etwas* kleinere Kraft denselben vergrössern kann“. Das ist richtig, aber falsch ist, „dass keine, wie immer geartete, gleichgerichtete Kraft dieses  $M_{rm}$  *verkleinern* könne“. Vielmehr verhält es sich so, dass die *etwas* kleineren Kräfte das  $M_{rm}$  *vergrössern* und die *viel* kleineren es *schwächen*. Zwischen beiden Gruppen von Kräften liegt eine neutrale Kraft, mit der ich besonders interessante Versuche angestellt habe.

Ich komme schliesslich zu einer Frage, welche Hr. Holitscher nach seinen Versuchen bejahen zu müssen glaubt, während sie von Frankenheim im negativen Sinne beantwortet war, zu der Frage nach dem Einfluss der Magnetisierungsdauer auf das remanente Moment. Die Versuche Hrn. Holitscher's wurden in der Weise angestellt, dass der Stab zuerst so oft einer Magnetisierungsdauer von 5 sec unterworfen wurde, bis das remanente Moment nicht mehr zunahm. Dann erst wurde die Dauer der Magnetisierung auf 10 sec gesteigert, und dies wieder bis zur Erreichung eines constanten Grenzwertes des remanenten Momentes wiederholt, und so fort bis zur Magnetisierungsdauer von  $1\frac{3}{4}$  Min. Es ergab sich ein Anwachsen des Grenzwertes mit wachsender Dauer der Kraftwirkung bei kleinen wie bei grossen Kräften. Meine Bedenken gegen die Beweiskraft dieser Versuche gründen sich auf die Nichtbeachtung folgender zwei Punkte.

Bei der zuerst angewandten Magnetisierungsdauer von 5 sec wächst das remanente Moment zunächst stark mit Wiederholung der Impulse an, die Zunahme wird dann bei weiteren Impulsen kleiner und immer kleiner. In dem von Hrn. Holitscher angeführten Beispiel ist eine Zunahme bis zum fünften Impuls bemerkbar, die folgenden 9 Impulse ändern das remanente Moment nicht mehr, daher wird das Mittel aus den letzten (10) Impulsen 17,14 als Maximalwert bei einer Dauer von 5 sec betrachtet. Nunmehr wird zu einer Magnetisierungsdauer von 10 sec übergegangen, hier wie bei allen höheren Zeiten werden aber nur 5 Impulse angewandt, und als Maximalwerte für 10, 20, 30, 40, 50, 60, 75 sec Magnetisierungsdauer































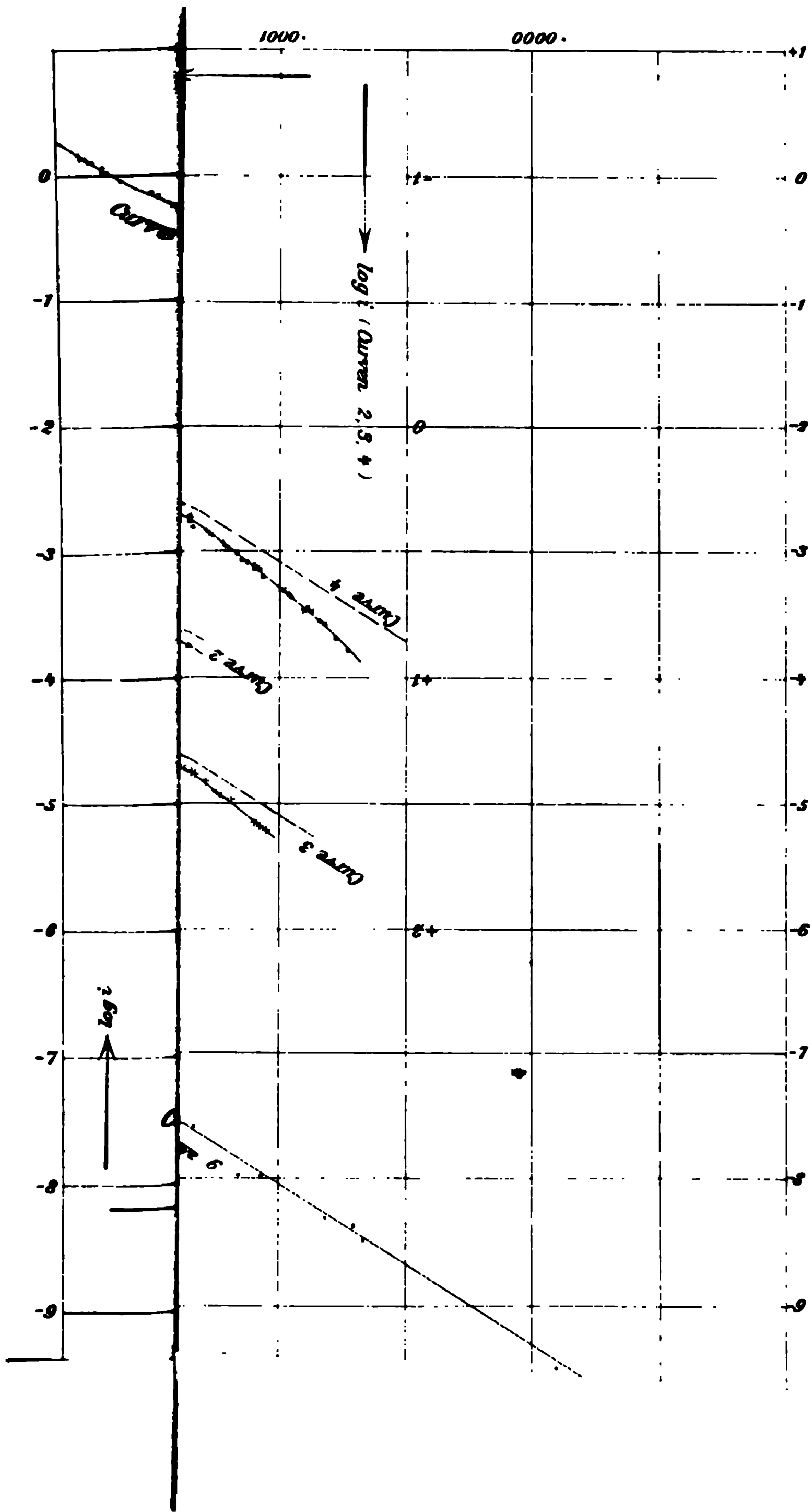






100-443887-100

ASTOR. LENI  
TILDEN FC









1

2



1. The first part of the document is a list of names and addresses.

2. The second part of the document is a list of names and addresses.







